Le théorème de Molien

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. On considère l'action (à gauche) de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ définie par, $A \in GL_n(\mathbb{C}), P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, $A.P = P\left(A^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\right)$. On regardera plus particulièrement la restriction de cette action à G, et on s'intéressera à l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^G$ des polynômes invariants par cette action.

La *Computational Invariant Theory* a en particulier l'objet de trouver des générateurs des cet anneau. Le théorème de Molien permet de savoir dans quel $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_d$ les chercher (avec $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_d$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $d \in \mathbb{N}$).

Théorème 1. *On a l'égalité de séries formelles :*

$$\frac{1}{\sharp G} \sum_{A \in G} \frac{1}{\det(1 - tA)} = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_d^G) t^d.$$

De plus, la série entière a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On remarque d'abord que notre action de G sur $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ définit une représentation de G dans $V_d = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_d$, $d \in \mathbb{N}$ (de dimension $\binom{n+d-1}{n-1}$). On notera ρ_d et χ_d les représentations et caractères correspondants.

Proposition 0.1. *soit $d \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\dim\left(V_d^G\right) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_d(g)$$

On pose $p_G = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} g$ (on reconnaîtra l'opérateur de Reynold). On montre que p_G est une projection sur V_d^G.

En effet, si $x \in V_d^G$, alors on a directement $p_G(x) = x$, donc $p_G(V_d^G) = V_d^G$. De plus, si $x \in V_d$, alors si $\phi \in G$,

$$\phi(p_G(x)) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \phi(g(x)) = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g' \in G} g'(x) = p_G(x).$$

On en déduit que $p_G(V_d) \subset V_d^G$ et finalement

$$p_G(V) = V^G,$$

$$p_G^2 = p_G.$$

Comme nous sommes en caractéristique nulle, on a $rg(G) = \mathrm{tr} p_G$, soit $\dim V_d^G = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \mathrm{tr} g = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \chi_d(g)$.

Proposition 0.2. *Montrons que* $\frac{1}{\det(1-tg)} = \sum_{l=0}^{+\infty} \chi_l(g) t^l$, *avec la série entière ayant un rayon de convergence au moins* 1.

Si $g \in G$, on a $g^{\sharp G} = Id_{V_d}$, et $X^{\sharp G} - 1$ est scindé à racines simples. Ainsi, il existe $u \in GL_{\dim V_d}(\mathbb{C})$ tel que $u^{-1} g u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Si l'on procède à un changement de groupe étudié, en remplaçant G par $u^{-1}Gu$ (ce qui correspond à un changement de variables linéaire), on travaille toujours avec la même action de groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ou sur $\mathbb{C}_d[X_1, \ldots, X_n]$, et en particulier, traces, déterminants et caractères sont conservés. On peut donc se ramener au cas où g est diagonal.

Nous allons donc supposer que $g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$. De plus, on a $|\lambda_i| = 1$.

On peut alors écrire :

$$\frac{1}{\det(1-tg)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\lambda_i t} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \lambda_i^p t^p \right).$$

Par définition du produit de Cauchy, on obtient alors, avec rayon de convergence au moins 1 pour la série :

$$\frac{1}{\det(1-tg)} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} \right) t^p.$$

D'un autre côté, si on regarde un élément de la base canonique de V_p, $X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$ avec $k_1 + \cdots + k_n = p$, alors $\rho_p(g)(X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}) = g.(X_1)^{k_1} \ldots g.(X_n)^{k_n} = \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n} X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$.

Ainsi, $\chi_p(g) = \mathrm{tr}(\rho_p(g)) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n}$.

On obtient alors bien au final $\frac{1}{\det(1-tg)} = \sum_{l=0}^{+\infty} \chi_l(g) t^l$, avec la série entière ayant un rayon de convergence au moins 1.

Enfin,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sharp G}\sum_{A\in G}\frac{1}{\det(1-tA)} &= \frac{1}{\sharp G}\sum_{g\in G}\sum_{p=0}^{+\infty}\chi_p(g)t^p \quad \text{somme finie} \\
&= \frac{1}{\sharp G}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{g\in G}\chi_p(g)\right)t^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\dim(\mathbb{C}\left[X_1,\ldots,X_n\right]_p^G)t^p.
\end{aligned}$$

Remarque. La généralisation de ce résultat à tout corps de caractéristique nulle est relativement aisée. Pour la caractéristique non nulle, c'est plus compliqué, mais on peut aussi généraliser le résultat... (en un certain sens).

Références

[1] Leichtnam Exercices corrigés posés aux oraux de Polytechnique et des ENS, tome algèbre et géométrie p 95

[2] Peyré L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, p 219-220 et 288-289.