Méthode de Newton pour les polynômes réels à racines réelles

Tristan Vaccon

24 septembre 2012

Soit $r \in \mathbb{N}$ ($r > 1$) et $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in \mathbb{N}^r$ et soit $P = \prod_{i=1}^r (X - \xi_i)^{m_i}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > \xi_r$. On définit par récurrence, $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Proposition 1. *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante, et converge vers ξ_r.*

Démonstration. On définit f sur $]\xi_r, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$.

Un polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré n a au plus n racines, on en déduit directement avec le théorème de Rolle, du fait que ξ_i est racine d'ordre $m_i - 1$ de P' et que P' a toutes ses racines dans $[\xi_1, \xi_r]$, que f est bien définie (on peut aussi invoquer le théorème de Gauss-Lucas).

P' s'écrit $(X - \xi_r)^{m_r - 1} Q(X)$ où Q a toutes ses racines dans $[\xi_1, \xi_r[$. Comme $P = \prod_{i=1}^r (X - \xi_i)^{m_i}$, cela nous donne directement le fait que f est C^∞ sur $[\xi_r, +\infty[$.

Si on considère la dérivée logarithmique de P, on obtient $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \xi_i}$. Ainsi, $x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x_n - \xi_i}\right)^{-1}$.

Montrons que si $x_n > \xi_r$, alors $\xi_r < x_{n+1} < x_n$.

Avec $f(\xi_r) = \xi_r$, f est dérivable sur $[\xi_r, +\infty[$ et on a $f' = 1 - 1 + \frac{PP''}{P'^2} = \frac{PP''}{P'^2}$. Donc :

$$f' = \frac{PP''}{P'^2}.$$

De la même manière que pour P', les zéros de P'' sont dans $[\xi_1, \xi_r]$, et P, P' et P'' ont leur coefficient dominant positif. On en déduit que $f' = \frac{PP''}{P'^2} > 0$ sur $]\xi_r, +\infty[$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $]\xi_r, +\infty[$, donc sur $[\xi_r, +\infty[$ (f étant continue), et si $\xi_r < x_n$, alors $\xi_r = f(\xi_r) < f(x_n) = x_{n+1}$.

De plus, si $x_n > \xi_r$, alors comme $x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x_n - \xi_i}\right)^{-1}$, on obtient directement que $x_{n+1} < x_n$, et donc au final, on a bien, comme $x_0 > \xi_r$,

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\xi_r < x_{n+1} < x_n$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante et minorée (par ξ_r), donc convergente. Par continuité de f, sa limite est nécessairement un point fixe de f, donc un zéro de $\frac{P}{P'}$, dans $[\xi_r, +\infty[$, soit ξ_r.

□

On peut maintenant évaluer la vitesse de convergence selon si ξ_r est une racine simple ou double.

Proposition 2. *Si $m_r = 1$, alors : $\forall c > 0, |x_n - \xi_r| = o(c^n)$ (on parle de convergence surlinéaire), et si $m_r > 1$, il existe $c \neq 0$ tel que $|x_n - \xi_r| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.*

Démonstration. Nous allons d'abord calculer la limite en ξ_r de f'.

On a $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x-\xi_i}$ donc en dérivant, $\frac{P''P-P'^2}{P^2} = -\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$. Ainsi, $f'(x) = \frac{PP''}{P'^2} = 1 - (\frac{P}{P'})^2 \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}\right)$, soit $f'(x) = 1 - \left(\sum_{i=1}^r \frac{m_i}{x-\xi_i}\right)^{-2} \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{(x-\xi_i)^2}$.

En particulier, on en déduit que $\lim_{x\to\xi_r^+} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}$.

Dans le cas où $m_r = 1$, $f'(\xi_r) = 0$. Si $n \in \mathbb{N}$, par l'égalité des accroissements finis, il existe $y_n \in]\xi_r, x_n[$ tel que $x_{n+1} - \xi_r = f(x_n) - f(\xi_r) = (x_n - \xi_r)f'(y_n)$. On définit ainsi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $c > 0$. Comme $x_n \to \xi_r$, on a par encadrement $y_n \to \xi_r$ et donc $f(y_n) \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|f'(y_n)| < c$.

Mais alors, si $n \geq n_0$, $|x_{n+1} - \xi_r| \leq c|x_n - \xi_r|$. On en déduit directement par récurrence que si $n \geq n_0$, $|x_n - \xi_r| \leq c^{n-n_0}|x_{n_0} - \xi_r|$.

Ainsi, si $c > 0$, $x_n - \xi_r = 0(c^n)$ et donc si $c' < c$, $x_n - \xi_r = O(c'^n) = o(c^n)$, d'où le résultat pour $m_r = 1$:

$$\forall c \in \mathbb{R}_+^*, x_n - \xi_r = o(c^n).$$

Maintenant, si $m_r > 1$, on a $f'(\xi_r) = 1 - \frac{1}{m_r} > 0$. On a de même une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\xi_r < y_n < x_n$ tel que $x_{n+1} - \xi_r = f'(y_n)(x_n - \xi_r)$. Avec la première proposition et le fait que $f' > 0$ sur $[\xi_r, +\infty[$, on peut alors écrire $\ln(x_{n+1} - \xi_r) = \ln f'(y_n) + \ln(x_n - \xi_r)$ et donc :

$$ln(x_{n+1} - \xi_r) - \ln(x_n - \xi_r) \sim_{+\infty} \ln f'(\xi_r) \neq 0.$$

Par comparaison de séries divergentes à termes positifs de termes équivalents : $\ln(x_n - \xi_r) \sim_{+\infty} n \ln f'(\xi_r)$. Montrons maintenant que $\ln(x_n - \xi_r) - n \ln f'(\xi_r)$ converge.

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a $x_{n+1} - \xi_r = f'(\xi_r)(x_n - \xi_r) + O((x_n - \xi_r)^2)$. On en déduit $\varepsilon_n = \frac{x_{n+1}-\xi_n}{f'(\xi_r)(x_n-\xi_r)} - 1 = O(x_n - \xi_r)$.

Prenons $c \in]f'(\xi_r), 1[$, on a alors $\ln f'(\xi_r) < \ln c < 0$ et $1 - \frac{\ln c}{\ln f'(\xi_r)} < 0$ alors comme $\ln(x_n - \xi_r) \sim n f'(\xi_r)$, on aura $\ln(x_n - \xi_r) - n \ln c \sim n(\ln f'(\xi_r)) \left(1 - \frac{\ln c}{\ln f'(\xi_r)}\right)$ donc $\lim_{n \to +\infty} \ln(x_n - \xi_r) - n \ln c = -\infty$ et $|x_n - \xi_r| = O(c^n)$.

Ainsi, $\ln(x_{n+1} - \xi_r) - \ln(x_n - \xi_r) - \ln f'(\xi_r) = \ln(1 + \varepsilon_n) = O(c^n)$, et la série ayant cela pour terme général converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si l'on regarde la somme partielle, par téléscopage, on obtient $\lim_n(\ln(x_n - \xi_r) - n \ln f'(\xi_r)) = \lambda$, et donc enfin $x_n - \xi_r \sim e^\lambda f'(\xi_r)^n = e^\lambda \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$, ce que l'on souhaitait démontrer. $\square$

On remarquera que la convergence est plus rapide dans le cas où ξ_r est racine simple, et on peut en fait se ramener à ce cas en considérant $\frac{P}{PGCD(P,P')}$.

Références

[1] Chambert-Loir, Antoine & Fermigier, Stéfane Analyse 2, exercices. Agrégation de mathématiques