Méthode de Newton-Raphson : convergence locale

Tristan Vaccon

24 septembre 2012

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et $B = B(x_0, r)$. Soit $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue par la méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n)$. On suppose que :

- $\forall (x, y) \in B^2, \|f'(x) - f'(y)\| \leqslant \gamma\|x - y\|$;
- pour tout $x \in B$, $f'(x)$ est inversible et $\|f'(x)^{-1}\| \leqslant \beta$;
- $\alpha = \|x_1 - x_0\| < \frac{2r}{2+\beta\gamma r}$.

Nous allons montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers un zéro de f, et nous allons étudier la vitesse de convergence.

On commence par un lemme d'analyse :

Lemme 1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable dans un ouvert convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que :*

$$\forall (x, y) \in C^2, \|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma\|x - y\|.$$

Alors on a $\forall (x, y) \in C^2, \|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)\| \leqslant \frac{\gamma}{2}\|x - y\|^2$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in C^2$. C étant convexe, le segment $[x, y]$ est inclus dans C. Soit $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto f(y + t(x - y))$.

On a $\phi'(t) = f'(y + t(x - y)).(x - y)$ et $\phi'(0) = f'(y).(x - y)$. Ainsi,

$$\|\phi'(t) - \phi'(0)\| \leqslant \|f'(y + t(x - y)) - f'(y)\|\|x - y\| \leqslant \gamma t\|x - y\|^2.$$

On a

$$f(x) - f(y) - f'(y).(x - y) = \phi(1) - \phi(0) - \phi'(0) = \int_0^1 (\phi'(t) - \phi'(0))\mathrm{dt}.$$

Finalement

$$\|f(x) - f(y) - f'(x - y)\| \leqslant \int_0^1 \gamma t\|x - y\|^2\mathrm{dt} \leqslant \frac{\gamma}{2}\|x - y\|^2.$$

□

Lemme 2. *On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B$ et $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha h^{2^n-1}$ où $h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$ et on a $h < 1$.*

Démonstration. On montre d'abord que $h < 1$. On a

$$\alpha\beta\gamma < 2\frac{\beta\gamma r}{2+\beta\gamma r} < 2.$$

Pour $n = 0$, $\alpha = \|x_1 - x_0\|$ et l'inégalité recherchée est vrai. De plus, $\alpha < \frac{2r}{2+\beta\gamma r} \leqslant r$ et donc $x_1 \in B$.

On suppose le résultat vrai pour tout $k \leq n-1$. Alors

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \| - f'(x_n)^{-1} f(x_n)\| \leqslant \beta\|f(x_n)\|.$$

Par définition de x_n, $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$, donc

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \beta\|f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1}) - f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\| \leqslant \beta\frac{\gamma}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

en utilisant le lemme précédent.

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \beta\frac{\gamma}{2}(\alpha h^{2^{n-1}-1})^2 = \beta\frac{\gamma}{2}\alpha^2 h^{2^n-2} = \alpha h^{2^n-1}.$$

Maintenant, montrons que x_{n+1} est bien dans B. Avec l'hypothèse, on a $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \alpha h^{2^k-1}$ si $k \leq n$. Donc :

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n} h^{2^k-1} \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} h^k = \frac{\alpha}{1-h}.$$

Or avec $\alpha < \frac{2r}{2+\beta\gamma r}$,

$$\frac{\alpha}{1-h} = \frac{2\alpha}{2-\alpha\beta\gamma} < \frac{4r}{2+\beta\gamma r}\frac{2+\beta\gamma r}{2*(2+\beta\gamma r) - 2r*\beta\gamma} = r.$$

Et on a donc bien le résultat par récurrence. □

Proposition 1. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\xi \in B$ tel que $f(\xi) = 0$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|x_n - \xi\| \leqslant \alpha\frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}.$$

Démonstration. $\overline{B}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$ qui est complet, et du fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha h^{2^n-1}$ avec $0 < h < 1$, on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers $\xi \in \overline{B}$ tel que $\|\xi - x_0\| \leqslant \alpha(1 + h + h^3 + \dots) < \frac{\alpha}{1-h} < r$. Donc $\xi \in B$. Les fonctions f et $(f')^{-1}$ étant continues dans B, on a $\xi = \xi - f'(\xi)^{-1}f(\xi)$ et comme par définition, $f'(\xi)^{-1}$ est inversible donc injective, $f(\xi) = 0$.

Enfin, pour la vitesse de convergence,

$$\begin{aligned}
\|x_n - \xi\| &= \|\sum_{k=n}^{+\infty}(x_k - x_{k+1})\| \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\|(x_k - x_{k+1})\| \leqslant \alpha \sum_{k\geqslant n} h^{2^k-1}. \\
&\leqslant \alpha h^{-1}\sum_{k\geqslant 1} h^{k*2^n} = \alpha\frac{h^{2^n-1}}{1-h^{2^n}}
\end{aligned}$$

□

Références

[1] Chambert-Loir, Antoine & Fermigier, Stéfane Analyse 2, exercices. Agrégation de mathématiques