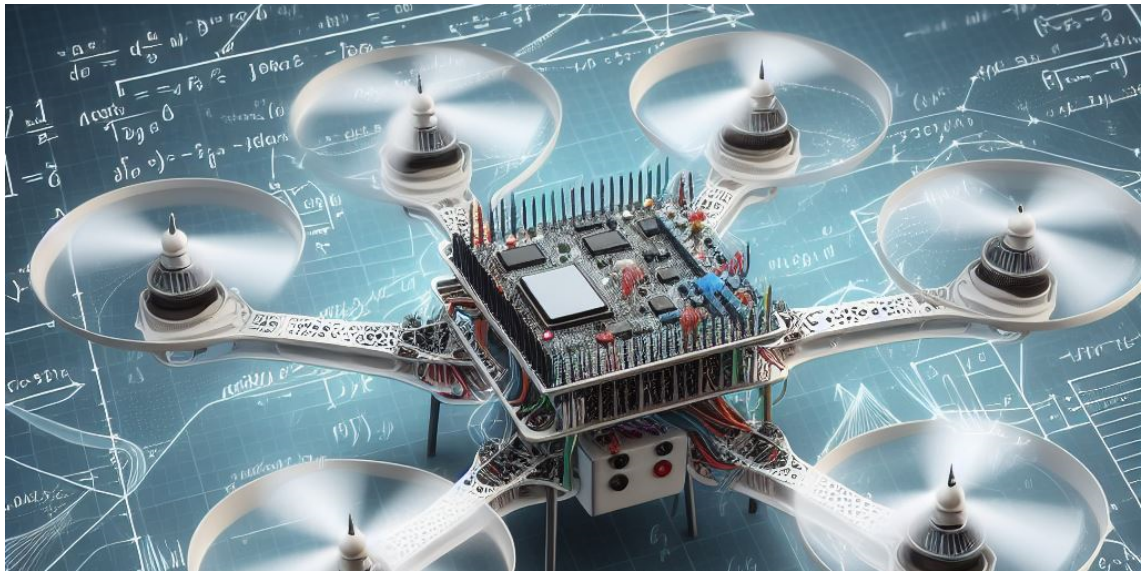


Ingénierie des systèmes cyber-physiques

R6.10 - Asservissement des systèmes mécatroniques

Support de cours

Thomas Fromentèze



1 Modélisation

1.1 Introduction et objectifs

Cette ressource a pour objectif de vous faire découvrir les bases de la modélisation et de l'asservissement des systèmes mécatroniques. Ce cours se démarque des activités de BUT1 et BUT2 parce que nous allons découvrir pour la première fois comment traiter les signaux variant de façon continue, en complément des simples logiques tout ou rien.



FIGURE 1 – L'asservissement de grandeurs continues comme la température, la vitesse ou l'inclinaison nécessite le développement de modèles et de systèmes de commande adaptés. Sources : Raise3D, Tesla, Wikimedia.

La plus grande limitation de ce domaine vient des mathématiques. Tous ces systèmes reposent sur des équations différentielles qui permettent d'étudier l'évolution des grandeurs continues en fonction du temps et de l'espace. Voici quelques exemples :

Diffusion de la chaleur	Mouvement d'un ressort	Charge d'un circuit RLC
$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$	$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$	$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t)$

Vous avez déjà eu l'occasion de découvrir ces modèles en mécanique et en électricité, vous permettant d'étudier les solutions d'équations caractéristiques sous forme canonique. Toutefois, ces techniques sont rapidement limitées par la complexité croissante des systèmes réels et par l'interaction entre différents domaines physiques. Dans des systèmes comme les véhicules autonomes ou les systèmes de contrôle industriels, les interactions entre mécanique, électronique, et informatique nécessitent une approche de modélisation plus complexe. La nécessité de modéliser des comportements non linéaires, des phénomènes transitoires, ou des systèmes multidimensionnels dépasse souvent les capacités des méthodes classiques.

La première partie de ce cours se concentre sur l'introduction de méthodes permettant de modéliser les systèmes complexes initialement représentés par des équations différentielles. Nous allons apprendre à les remplacer par des modèles équivalents où le passage dans un système correspond à une simple multiplication.

Système masse-ressort

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F(t)$$

Modèle équivalent

$$\frac{1}{mp^2 + k}$$

1.2 Schémas fonctionnels dans le domaine de Laplace

Nous souhaitons étudier une méthode permettant de simplifier les mathématiques impliquées dans l'étude des systèmes physiques. Pour pleinement comprendre les difficultés que nous souhaitons contourner, il est nécessaire de définir les calculs de convolution et leur signification physique.

1.2.1 Introduction des convolutions (et pourquoi on veut faire sans)

Nous étudions dans ce cours les systèmes physiques dont l'évolution dans le temps et l'espace est décrite par des équations différentielles. Un système masse-ressort est présenté en Fig. 2.

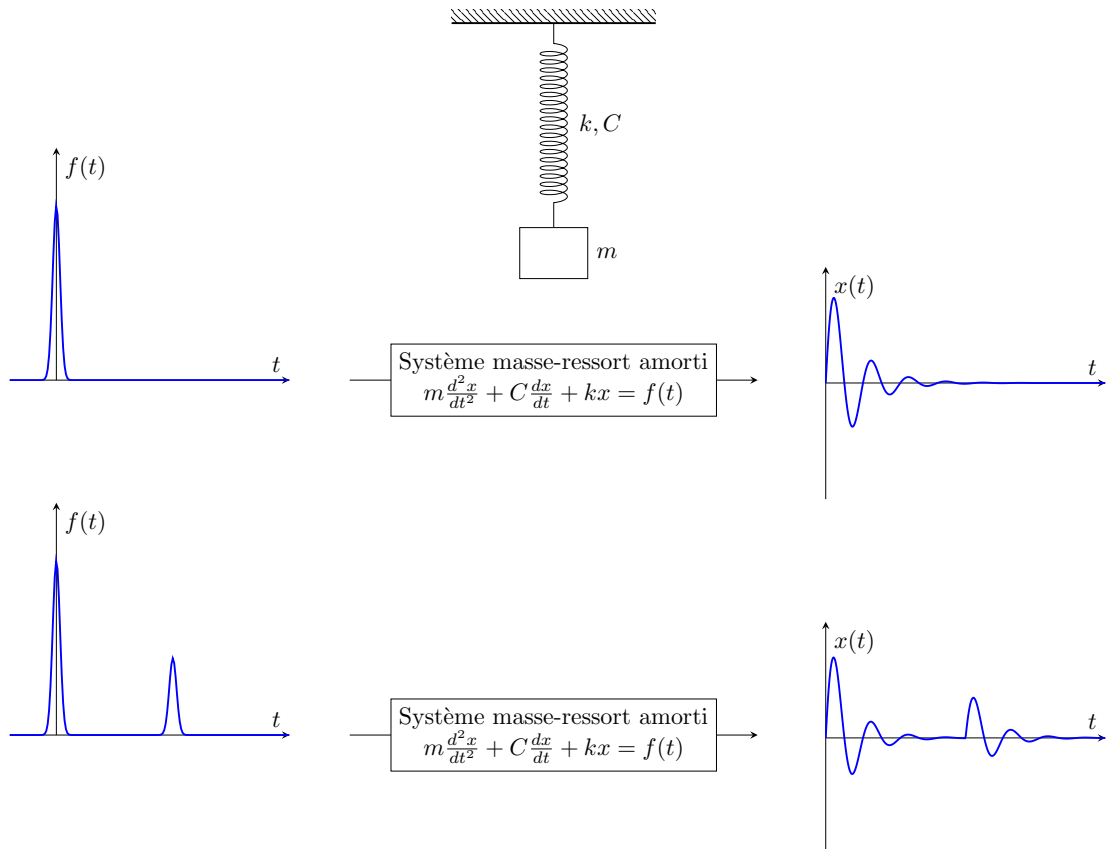
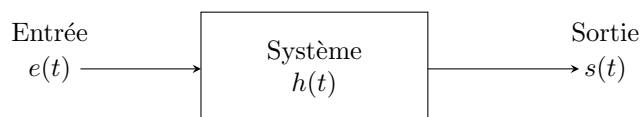


FIGURE 2 – Application d'impulsions sur un système masse-ressort amorti.

La réponse d'un système à une impulsion appliquée à son entrée est appelée **réponse impulsionnelle**, souvent notée $h(t)$. Cette dernière doit normalement être définie rigoureusement à partir d'une impulsion infiniment courte, appelée le delta de Dirac et notée $\delta(t)$. Si ce système mécanique est modifié, par exemple en changeant le coefficient de raideur k , la réponse impulsionnelle du système sera différente mais le résultat de l'application de deux impulsions sera toujours une combinaison linéaire de cette nouvelle réponse recopiée deux fois.

Il est donc nécessaire de développer un calcul mathématique permettant d'étudier la relation entre un signal d'entrée appliqué sur un système et le résultat obtenu en sortie. L'impact d'un système générique de réponse $h(t)$ sur un signal d'entrée $e(t)$ est représentable par le schéma suivant :



L'expression du signal en sortie $s(t)$ s'écrit alors de la forme suivante :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) \otimes h(t) \quad (1)$$

où \otimes représente le produit de convolution, parfois aussi noté $*$. Ce type de calcul est généralement difficile. Il est possible d'étudier la résolution sur papier de quelques cas simples mais tous les autres cas sont généralement résolus sur ordinateur avec de la programmation.

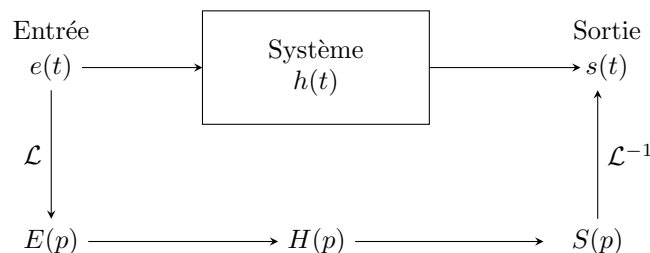
Mise en garde : Ces formalismes peuvent être complexes, mais ils reposent déjà sur d'importantes simplifications. On considère notamment que :

- nos systèmes sont **linéaires** :
 - petits effets = petites causes
 - somme de causes = somme des effets associés
- nos systèmes sont **invariants par translation** :
 - La réponse des systèmes ne change pas au cours du temps (ou de l'espace).

Malgré toutes ces simplifications, nous souhaitons étudier une méthode permettant d'éviter ces calculs d'intégrales.

1.2.2 Transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de faciliter grandement ces calculs au moyen d'un changement de domaine. On effectue en début et en fin de calcul une transformation permettant de simplifier le passage dans le système $h(t)$.



Les signaux temporels d'entrée et de sortie sont alors représentés sous forme d'*harmoniques complexes* et sont liés par la fonction de transfert $H(p)$ du système. p est la variable de Laplace, définie par une valeur complexe telle que $p = a + ib$, avec a la partie réelle de p et b , sa partie imaginaire. **La variable p est parfois notée s dans les ressources anglo-saxonnes.**

Transformation de Laplace :

$$E(p) = \mathcal{L}\{e(t)\} = \int_0^{+\infty} e(t) e^{-pt} dt \quad (2)$$

Transformation de Laplace inverse :

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} E(p) e^{pt} dp \quad (3)$$

Ces formules sont à connaître, mais ne vous laissez pas décourager par leur complexité apparente. **Pour nous mettre au niveau d'un BUT GMP, nous n'allons développer aucun calcul d'intégration dans ce cours et nous concentrer sur les mécanismes de simplification associés.**

Propriétés utiles :**• Simplification des convolutions en simples produits :**

$$S(p) = \mathcal{L} \{e(t) \otimes h(t)\} \quad (4)$$

$$= \mathcal{L} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\} \quad (5)$$

$$= E(p) H(p) \quad (6)$$

• Additivité :

$$\mathcal{L} \{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L} \{f(t)\} + \mathcal{L} \{g(t)\} \quad (7)$$

$$= F(p) + G(p) \quad (8)$$

• Homogénéité :

$$\mathcal{L} \{a f(t)\} = a F(p) \quad (9)$$

Dans ce calcul, a est une constante.

• Constante :

$$\mathcal{L} \{c\} = \frac{c}{p} \quad (10)$$

• Simplification des dérivées :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = p F(p) - f(0) \quad (11)$$

Pour simplifier les études, on aura tendance à considérer que $f(0) = 0$ à votre niveau (choix des conditions initiales).

• Simplification des intégrales :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{p} F(p) \quad (12)$$

1.2.3 Illustration par un exemple

On souhaite étudier un système RLC série

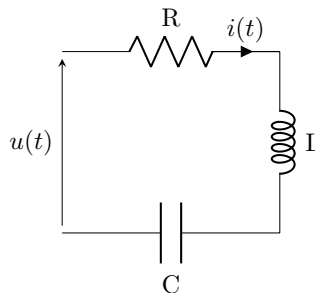


FIGURE 3 – Circuit RLC série.

En utilisant les formules étudiées en BUT2, il est possible de donner la relation entre une tension $u(t)$ appliquée sur l'ensemble et le courant transitoire $i(t)$ parcourant tous les éléments. On obtient l'équation différentielle suivante :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (13)$$

On applique maintenant les règles définies dans la section précédente :

$$U(p) = R I(p) + p L I(p) + \frac{1}{C} \frac{1}{p} I(p) \quad (14)$$

$$= \left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right) I(p) \quad (15)$$

Après avoir identifié la donnée d'entrée du problème $U(p)$ et celle de sortie $I(p)$, on présente le calcul de la façon suivante :

$$I(p) = H(p) U(p) \quad (16)$$

Par identification, $H(p) = 1 / \left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right)$ est la fonction de transfert du circuit RLC étudié dans le domaine de Laplace.

Cet exemple a pour avantage de montrer les transformations de Laplace sur tous les opérateurs que nous rencontrerons. En pratique, on préfère démarrer d'un problème légèrement différent, analysant la charge électrique $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ pour obtenir une équation différentielle du second ordre avec second membre. Cette étude fera l'objet d'un exercice de travaux dirigés.

1.2.4 Modélisation par schémas fonctionnels

Ayant présenté les règles associées aux transformées de Laplace, nous étudions maintenant l'efficacité de ces formalismes pour coupler de nombreuses équations différentielles pour étudier des systèmes mécatroniques.

Considérons un pendule simple constitué d'une masse m suspendue au bout d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable. La mesure de l'angle θ est assurée au moyen d'un potentiomètre exploité pour réaliser une liaison pivot avec la tige.

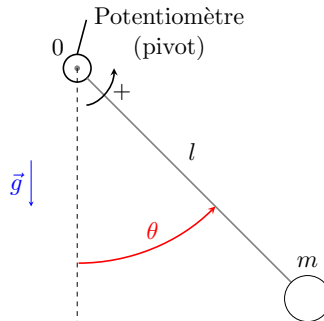


FIGURE 4 – Pendule composé d'une masse m attachée à une tige rigide de longueur l . Le pivot est réalisé à l'aide d'un potentiomètre.

• Système 1 : Pendule

Considérons maintenant que le pendule est soumis à un couple externe $C_{ext}(t)$. La deuxième loi de Newton pour la rotation, en considérant le couple externe, s'écrit :

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \sum_i C_i \quad (17)$$

$$J \ddot{\theta} = \sum_i C_i \quad (18)$$

Le moment d'inertie du système est défini tel que $J = ml^2$. Le couple résistant du pendule est déterminé en fonction de la force de pesanteur appliquée sur l'ensemble : $\vec{P} = m\vec{g}$. Le

moment associé est déterminé par le produit vectoriel avec le vecteur \vec{d} défini entre l'origine du repère et le centre de la masse.

$$C_r = -\vec{P} \wedge \vec{d} \quad (19)$$

$$= -mgl \sin(\theta) \quad (20)$$

Le développement de la loi de Newton donne :

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = C_{ext}(t) + C_r \quad (21)$$

$$= C_{ext}(t) - mgl \sin(\theta(t)) \quad (22)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin(\theta(t)) = C_{ext}(t) \quad (23)$$

Cette dernière est **non-linéaire** à cause du terme $\sin(\theta(t))$, rendant la résolution particulièrement délicate. Le problème est linéarisé en étudiant seulement de petits angles tel que, $\sin(\theta) \approx \theta$. L'équation devient :

$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mgl\theta(t) = C_{ext}(t) \quad (24)$$

En prenant la transformée de Laplace avec des conditions initiales nulles, nous obtenons :

$$ml^2 p^2 \Theta(p) + mgl\Theta(p) = C_{ext}(p) \quad (25)$$

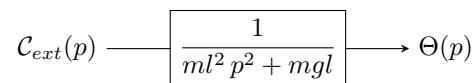
On trouve enfin :

$$\Theta(p) = \frac{1}{ml^2 p^2 + mgl} C_{ext}(p) \quad (26)$$

Par identification, la fonction de transfert du pendule, qui relie le déplacement angulaire $\Theta(p)$ au couple externe $T_{ext}(p)$, est donc :

$$H_{pendule}(p) = \frac{1}{ml^2 p^2 + mgl} \quad (27)$$

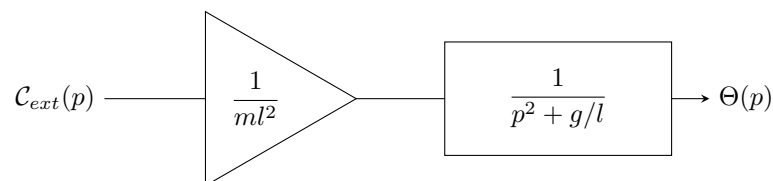
Tout ce travail permet finalement de proposer une représentation schématique du système, où la fonction de transfert du pendule est représentée par un bloc rectangulaire :



Sous forme canonique, la fonction de transfert est présentée en isolant le terme de plus haut degré (ici p^2). En divisant l'ensemble des termes par le facteur ml^2 , on obtient :

$$H_{pendule}(p) = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{p^2 + g/l} \quad (28)$$

Le facteur constant $\frac{1}{ml^2}$ est appelé un gain, représentable par un triangle dans nos schémas fonctionnels :



• Système 2 : Potentiomètre

Le potentiomètre est alimenté avec une tension d'entrée V_{cc} . Sa patte centrale est reliée à l'entrée analogique d'un Arduino UNO pour réaliser une mesure de tension. Sa troisième patte est reliée à la masse.

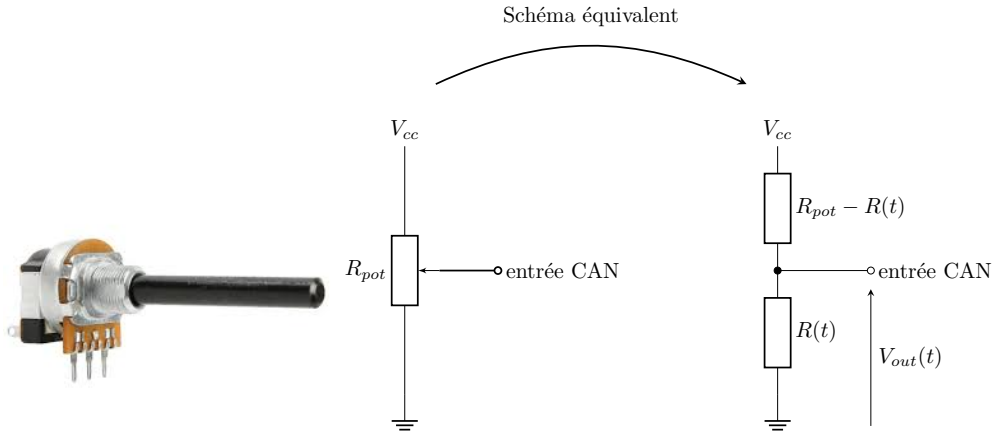


FIGURE 5 – Extraction de la position angulaire du pendule à partir de la rotation du potentiomètre.

En utilisant un pont diviseur de tension avec une tension d'entrée V_{cc} et en considérant que le potentiomètre présente une résistance totale R_{pot} , la tension de sortie est :

$$V_{out}(t) = \frac{R(t)}{R_{pot}} V_{cc} \quad (29)$$

Il reste alors à trouver l'expression de la résistance $R(t)$ obtenue en fonction de l'angle $\theta(t)$ du potentiomètre :

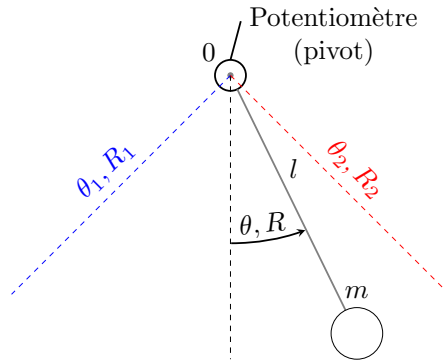


FIGURE 6 – Relation entre la position du pendule et la résistance mesurée sur le potentiomètre.

Supposant que la variation de la résistance en fonction de l'angle du potentiomètre suit un comportement linéaire, son expression prend alors la forme suivante :

$$R(t) = R_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{\theta_2 - \theta_1} \right) (\theta(t) - \theta_1) \quad (30)$$

La transformation de Laplace de la tension mesurée est :

$$\mathcal{V}_{out}(p) = \mathcal{L}\{V_{out}(t)\} \quad (31)$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \frac{V_{cc}}{R_{pot}} R(t) \right\} \quad (32)$$

$$= \frac{V_{cc}}{R_{pot}} \mathcal{L}\{R(t)\} \quad (33)$$

Il nous reste donc à calculer l'expression de $\mathcal{L}\{R(t)\}$ en utilisant l'ensemble des règles introduites précédemment :

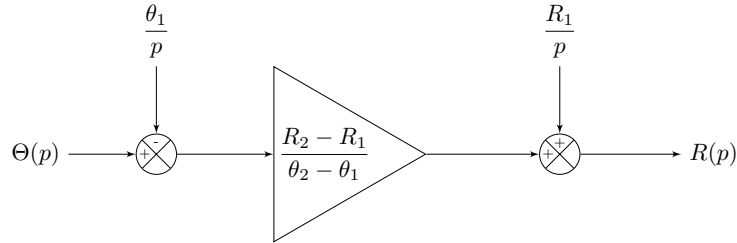
$$\mathcal{L}\{R(t)\} = \mathcal{L}\left\{R_1 + \left(\frac{R_2 - R_1}{\theta_2 - \theta_1}\right) (\theta(t) - \theta_1)\right\} \quad (34)$$

$$= \mathcal{L}\{R_1\} + \mathcal{L}\left\{\left(\frac{R_2 - R_1}{\theta_2 - \theta_1}\right) (\theta(t) - \theta_1)\right\} \quad (35)$$

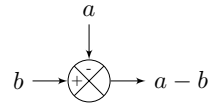
$$= \frac{R_1}{s} + \left(\frac{R_2 - R_1}{\theta_2 - \theta_1}\right) (\mathcal{L}\{\theta(t)\} - \mathcal{L}\{\theta_1\}) \quad (36)$$

$$\mathcal{R}(p) = \frac{R_1}{p} + \left(\frac{R_2 - R_1}{\theta_2 - \theta_1}\right) \left(\Theta(p) - \frac{\theta_1}{p}\right) \quad (37)$$

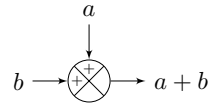
L'extraction de la réponse du potentiomètre est réalisée en rappelant qu'ici, $\Theta(p)$ correspond à la donnée d'entrée et que $\mathcal{R}(p)$ est la sortie, correspondant à la valeur de la résistance mesurée au borne de deux ports exprimée dans le domaine de Laplace. Le schéma fonctionnelle de cette partie prend la forme suivante :



Le premier bloc circulaire est un comparateur. Il permet de réaliser une différence :



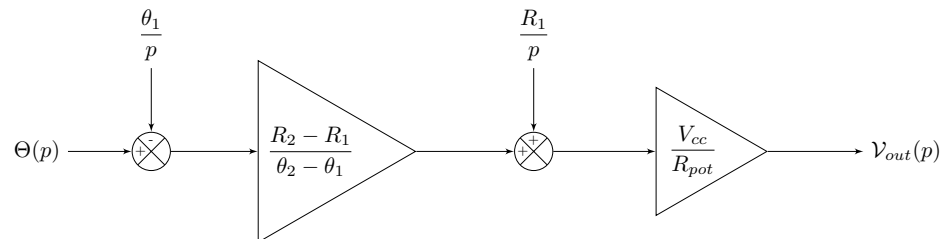
Le deuxième bloc circulaire est un sommateur :



Il reste maintenant à ajouter une dernière partie permettant de convertir la résistance du potentiomètre en tension mesurée, rappelant que :

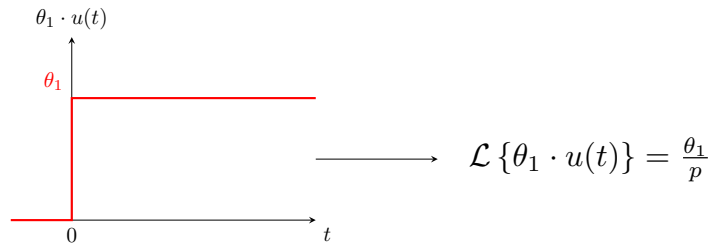
$$\mathcal{V}_{out}(p) = \frac{V_{cc}}{R_{pot}} \mathcal{R}(p) \quad (38)$$

Le schéma complet du potentiomètre devient alors :

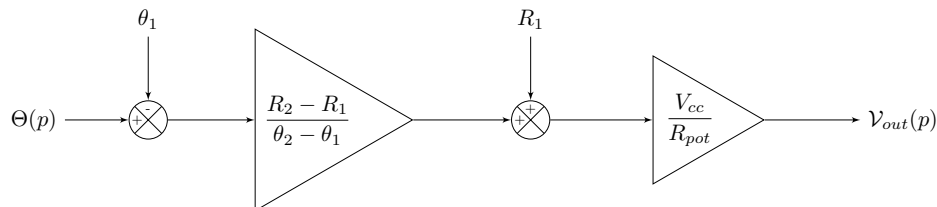


Note : Il est possible de remplacer les précédents termes θ_1/p et R_1/p par de simples constantes θ_1 et R_1 , à condition que ces valeurs soient appliquées au système avant le temps $t = 0$ où l'on considère que l'expérience commence.

Cette subtilité est liée au fait que les transformées de Laplace ne sont calculées qu'à partir du temps $t = 0$. Il n'y a ainsi pas de différence avec la transformée de Laplace d'un signal appelé "échelon" (ou échelon de Heaviside), noté $u(t)$, qui correspond à l'application de la constante au seul début de l'expérience :



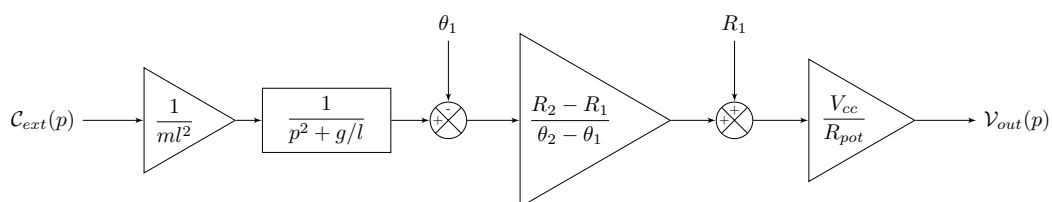
On obtient finalement le schéma simplifié suivant :



Nous pourrions étudier en TP l'effet de cette modification sur la partie transitoire des signaux obtenus.

• Système complet :

Les deux précédentes parties ont permis l'extraction de schémas fonctionnels correspondant au comportement mécanique du pendule, puis à la réponse du potentiomètre. Nous pouvons enfin proposer un schéma englobant les deux parties en considérant que l'angle θ correspond à la fois à la donnée de sortie du pendule et à la donnée d'entrée du potentiomètre.



Ce modèle permet finalement de faire directement le lien entre le couple appliqué au système et la valeur de tension mesurée à sa sortie. La prochaine étape consiste ensuite à transférer ce schéma dans une plateforme de simulation telle que *Simulink* (inclus avec le logiciel *MATLAB*). La première partie de la séance de travaux pratiques sera dédiée à la prise en main et à l'exploitation de cette plateforme.

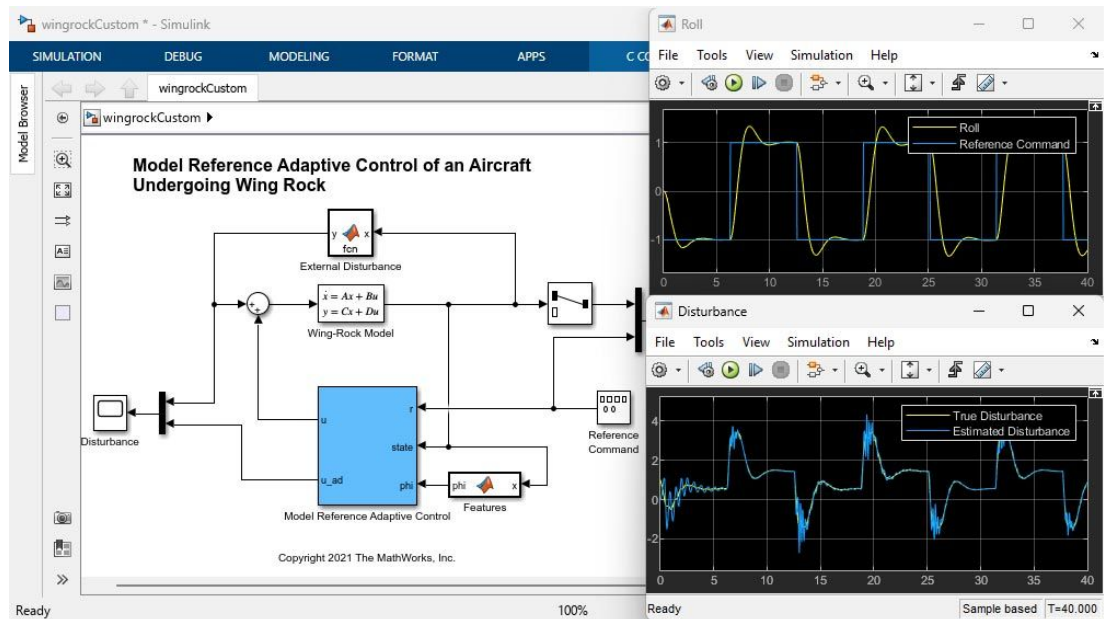


FIGURE 7 – Simulation avec *Simulink* d'un système représenté par ses fonctions de transfert et extraction des réponses temporelles.

Pour l'instant, il n'y a aucun moyen de contrôler la valeur obtenue à la fin de la chaîne parce que cette sortie n'a aucune influence sur la donnée appliquée en entrée du système. Il s'agit ici d'une **fonction de transfert en boucle ouverte**.

L'asservissement de la réponse d'un système n'est ainsi possible que si un élément, généralement un capteur, remonte une information qui peut influencer la donnée d'entrée.

2 Régulation et asservissement

2.1 Présentation avec un exemple

Ces problématiques peuvent être illustrées en analysant le fonctionnement d'un four électrique :

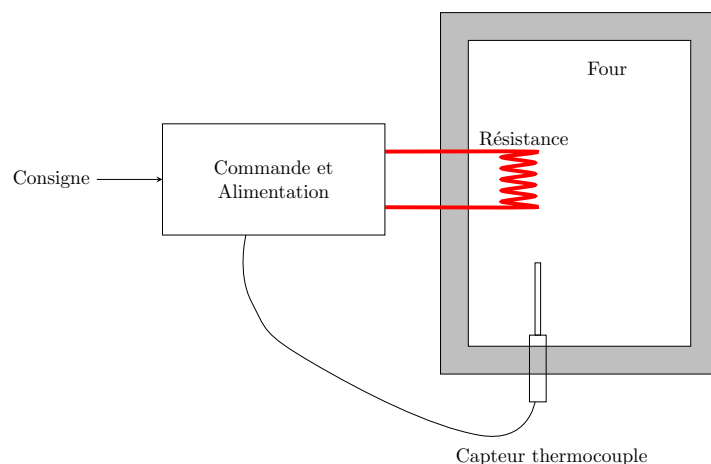
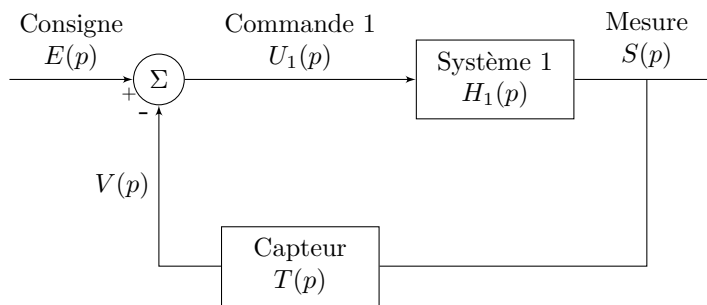


FIGURE 8 – Schéma simplifié d'un four électrique asservi en température

Comment concevoir un système automatique pour obtenir la température souhaitée dans l'enceinte du four ?

Un modèle générique de système à boucle fermé est présenté :



Ce système est maintenant représenté par une **fonction de transfert en boucle fermée**. Un **consigne** $E(p)$ est choisie afin de déterminer la **commande** $U_1(p)$ alimentant le système 1 de fonction de transfert $H_1(p)$. Une **boucle de rétroaction** permet de récupérer la valeur en sortie du système 1 grâce à un capteur ayant pour fonction de transfert $T(p)$ afin d'ajuster la commande au moyen d'un **comparateur** (le symbole présenté est une notation alternative).

Suite d'événements dans le cas du four :

1. On fixe une tension de consigne avec un objectif de température de 200°C .
2. Le capteur mesure une température dans le four de 20°C et renvoie une tension $V(p)$.
3. Le comparateur calcule un signal de commande $U_1(p)$ positif.
4. Le four chauffe et la température $S(p)$ augmente.
5. Le signal de commande $U_1(p)$ diminue progressivement.
6. Le four arrête de chauffer quand le signal de commande devient nul.

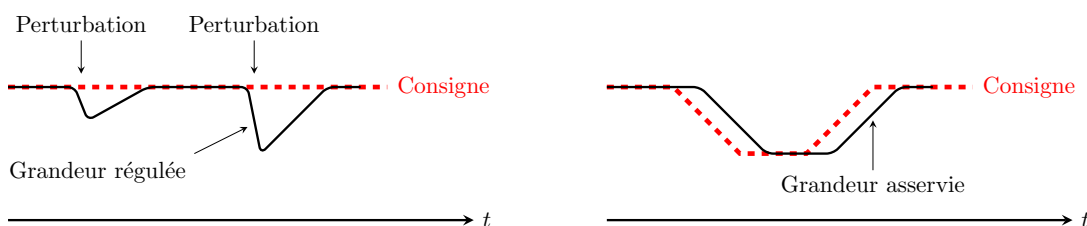
Avertissement : Par manque de temps, je n'aborderai dans ce cours aucune problématique de stabilité. Si vous êtes amenés à approfondir ces compétences, vous serez confrontés à de nombreux comportements oscillatoires ou même de divergences qui peuvent survenir dans les systèmes à boucle fermée.

Notre focus sera mis sur la compréhension des principes de base de l'asservissement et de la régulation, ainsi que sur l'application pratique des contrôleurs PID, qui, malgré leur simplicité relative, offrent une approche puissante et largement utilisée pour le contrôle des processus dans l'industrie.

2.2 Différence entre Asservissement et Régulation

Bien que souvent utilisés de manière interchangeable, les termes asservissement et régulation désignent deux concepts légèrement différents :

- La **régulation** vise à maintenir une grandeur constante en dépit des perturbations extérieures. Elle est typiquement mise en œuvre dans les systèmes à boucle fermée sans entrée de référence variable.
- L'**asservissement** permet de suivre une consigne qui peut varier dans le temps, adaptant ainsi la sortie du système à cette consigne dynamique.



2.3 Caractéristiques des systèmes en boucle fermée

Malgré la présence d'une boucle de rétroaction influençant la consigne du système, il est possible que la donnée asservie n'atteigne pas la valeur attendue. La différence entre la consigne et la valeur en régime établie est appelée l'erreur statique. Le dépassement correspond à la partie dépassant la consigne, qui en fonction des applications peut être particulièrement problématique.

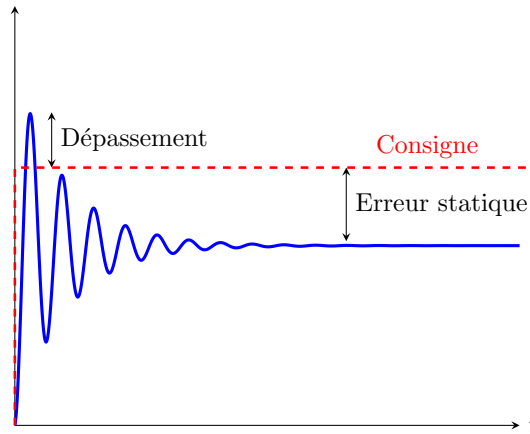
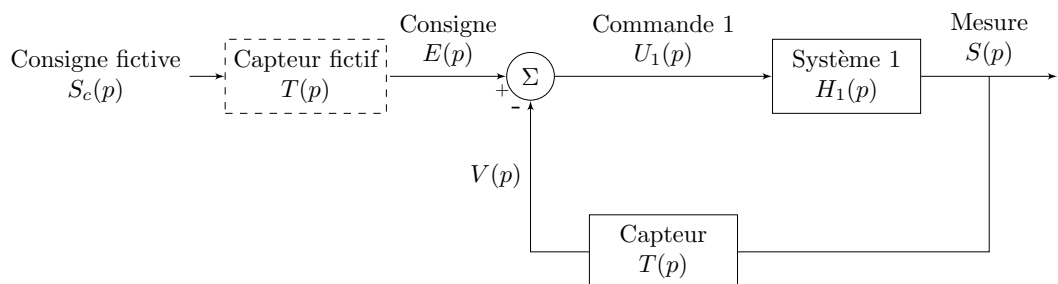


FIGURE 9 – Réponse d'un système asservi présentant une erreur statique importante.

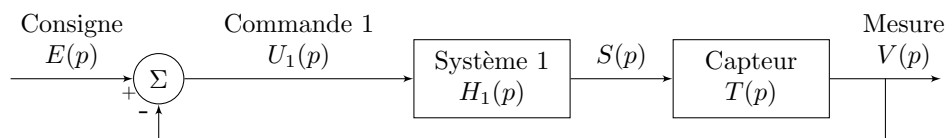
On remarque de plus que la réponse de certains systèmes impose des oscillations importantes qui peuvent affecter le bon fonctionnement de l'application asservie ou régulée.

Avant de présenter des solutions à ces problématiques, il est important d'observer que la consigne et la grandeur asservie ne partagent pas toujours les mêmes unités. Dans l'exemple du four électrique, la donnée d'entrée est une tension, tandis que la valeur de sortie est une température. Il est facile de régler ce problème en considérant que la conversion entre ces deux grandeurs est le rôle du capteur, qui peut être introduit de manière fictive en entrée du système.



La consigne de température $S_c(p)$ peut être confrontée à la température $S(p)$ dans l'enceinte du four à chaque instant. Elle permet alors de déterminer une consigne de tension équivalente $E(p) = T(p) S_c(p)$.

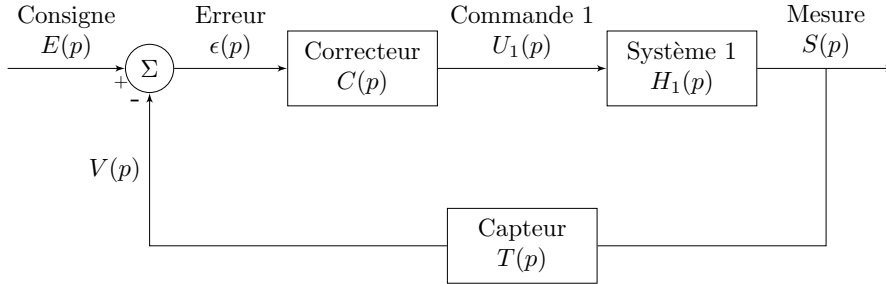
Il est aussi possible de considérer que la grandeur mesurée en bout de chaîne est plutôt la tension du capteur que la température du four. Dans ces conditions, nous obtenons le schéma équivalent suivant où les grandeurs en début et fin de chaîne partagent les mêmes unités :



Ce schéma correspond plus directement à l'effet d'asservissement réalisé par les systèmes électriques mais la grandeur physique asservie ne devient alors qu'une donnée intermédiaire du problème, au risque de perdre un peu de recul sur les données manipulées.

2.4 Le correcteur PID

Afin d'améliorer la convergence du signal de mesure $S(p)$ vers la consigne $E(p)$, un correcteur est inséré en série avec le système de fonction de transfert $H_1(p)$. Ce correcteur, dont la fonction de transfert est notée $C(p)$, exploite l'erreur $\epsilon(p)$ (la différence entre la consigne et la sortie) pour générer une commande $U_1(p)$ adaptée à la dynamique du système. Le schéma fonctionnel correspondant à une correction en série est présenté ci-dessous :



Le correcteur PID se décompose en trois actions, chacune reposant sur une opération élémentaire appliquée à l'erreur. Dans le domaine temporel, ces opérations sont la multiplication par une constante, l'intégration et la dérivation ; dans le domaine de Laplace, elles se traduisent par des manipulations algébriques simples.

- **Action proportionnelle** : Cette action consiste à multiplier directement l'erreur $e(t)$ par un gain constant K_p . En domaine temporel, il s'agit d'une simple multiplication. Dans le domaine de Laplace, la transformation de $K_p e(t)$ est $K_p E(p)$, ce qui se traduit par l'addition du terme K_p dans $C(p)$.
- **Action intégrale** : L'intégration de l'erreur permet de tenir compte de l'accumulation des écarts dans le temps, corrigeant ainsi l'erreur statique en régime permanent. La transformation de Laplace d'une intégrale (en supposant des conditions initiales nulles) est donnée par

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t e(\tau) d\tau \right\} = \frac{E(p)}{p}.$$

En appliquant un gain K_i , l'action intégrale s'exprime dans le domaine de Laplace par le terme $\frac{K_i}{p}$.

- **Action dérivée** : La dérivation de l'erreur permet de réagir à la vitesse de variation de l'erreur, ce qui aide à limiter le dépassement et à améliorer la stabilité du système. En effet, la transformation de Laplace d'une dérivée (avec conditions initiales nulles) est

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{de(t)}{dt} \right\} = p E(p).$$

En multipliant par le gain K_d , on obtient le terme $K_d p$ dans la fonction de transfert.

La fonction de transfert globale du correcteur PID s'exprime ainsi par :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p. \quad (39)$$

Chaque terme intervient à un niveau différent dans la régulation : le terme proportionnel assure une réaction immédiate à l'erreur, le terme intégral corrige l'erreur accumulée afin d'éliminer tout décalage en régime permanent, et le terme dérivé anticipe l'évolution de l'erreur pour limiter les dépassements et stabiliser la réponse. Cette combinaison permet d'obtenir une régulation efficace, caractérisée par un temps de montée réduit, un dépassement maîtrisé et une erreur statique nulle.

Procédure de réglage du PID Une méthode couramment utilisée pour le réglage initial est celle de Ziegler–Nichols. La démarche empirique consiste à :

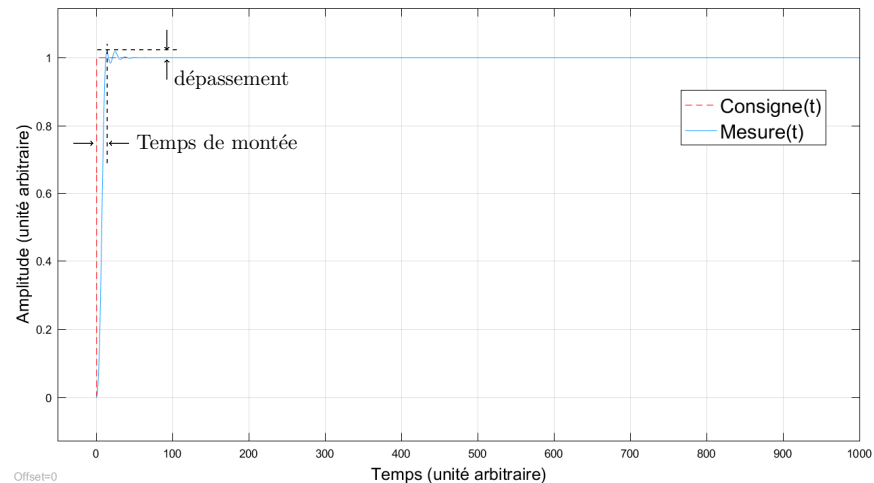
1. **Réglage du gain proportionnel** : augmenter progressivement K_p en observant la réponse du système à une variation de la consigne (par exemple, un échelon) jusqu'à obtenir des oscillations soutenues. Cette valeur critique permet de déterminer le gain ultime et la période d'oscillation.
2. **Introduction de l'action dérivée** : ajuster le gain K_d afin de réduire le dépassement et d'améliorer la stabilité en modérant la rapidité de la réponse.
3. **Ajout de l'action intégrale** : enfin, augmenter progressivement K_i pour éliminer l'erreur en régime permanent, en veillant à ne pas induire de retards excessifs ou de nouvelles oscillations.

L'utilisation d'outils de simulation, tels que *Simulink*, permet d'observer directement l'impact de chaque réglage sur la réponse temporelle et d'optimiser ainsi les valeurs de K_p , K_i et K_d . Cette approche itérative facilite l'obtention d'une réponse présentant un temps de montée réduit, un dépassement maîtrisé et une erreur statique nulle.

Exemple de correction réalisée avec *Simulink* Soit la fonction de transfert suivante :

$$H_1(p) = \frac{1}{7p^3 + 5p^2 + 3p + 1}. \quad (40)$$

L'ajout d'un correcteur PID en série permet de modifier la dynamique du système. L'ajustement des valeurs de (K_p, K_i, K_d) se fait de manière empirique, en fonction de la réponse observée. La simulation montre qu'un réglage approprié conduit à un temps de montée réduit, à un dépassement limité et à l'élimination de l'erreur en régime permanent.



Références

- Une source intéressante pour approfondir les notions mathématiques : https://public.iutenligne.net/automatique-et-automatismes-industriels/verbeken/cours_mv/general/index.html

Ingénierie des systèmes cyber-physiques

R6.10 - Asservissement des systèmes mécatroniques

TD1 - Modélisation des systèmes mécatroniques

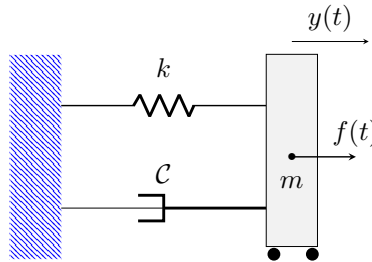
Thomas Fromentèze

1 Modélisation

On souhaite représenter des systèmes physiques dans le domaine de Laplace au moyen de schémas fonctionnels.

1.1 Système masse-ressort

On considère un système oscillant composé d'un chariot mobile de masse m relié à un mur par un système masse-ressort-amortisseur de coefficient de raideur k et de coefficient d'amortissement \mathcal{C} . On souhaite déterminer le mouvement horizontal du chariot $y(t)$ en négligeant les frottements des roues dans le cas où une excitation $f(t)$ est appliquée. Le système est considéré immobile au début de l'expérience.



Ce système est modélisable par une équation différentielle du second ordre avec second membre :

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{\mathcal{C}}{k} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{f(t)}{k} \quad (1)$$

1. Rappeler les expressions des transformées de Laplace de $\frac{dy(t)}{dt}$ et $\int_0^t y(t) dt$.
2. Déterminer l'expression de la transformée de Laplace de l'équation (1).

Note : On rappelle qu'une dérivée seconde correspond à l'application de l'opérateur dérivé deux fois :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (2)$$

3. Exprimer la relation entre l'excitation dans le domaine de Laplace $F(p)$ et la position du chariot $Y(p)$ sous la forme $Y(p) = H(p) F(p)$.

On souhaite finalement déterminer l'expression de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}$ dans le cas idéal où l'excitation appliquée au chariot est $F(p) = 1$. On dispose pour cela d'une table de transformée de Laplace indiquant l'équivalence suivante dans le cas où $0 < \zeta < 1$:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \right\} = \frac{1}{\omega} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega t) u(t), \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3)$$

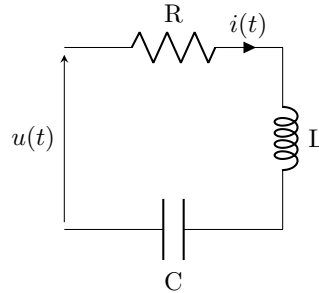
où :

- $u(t)$ est une fonction échelon définie telle que $u(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $u(t) = 1$ si $t > 0$.
- ζ est le taux d'amortissement.
- ω_0 est la pulsation propre du système.

4. Identifier la valeur des paramètres ζ et ω_0 en fonction de k , \mathcal{C} et m .
5. Déterminer la relation entre k , \mathcal{C} et m pour que la condition d'amortissement $0 < \zeta < 1$ soit vraie.
6. Donner l'expression de $y(t)$.
7. Représenter graphiquement l'allure de cette fonction temporelle.

1.2 Circuit RLC

On considère maintenant le circuit RLC série suivant, complètement déchargé à l'instant où démarre l'expérience :



L'équation caractéristique liant le courant $i(t)$ à la tension $u(t)$ dans ce circuit est la suivante :

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (4)$$

On souhaite travailler avec la charge électrique, liée au courant par l'expression $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$.

1. Exprimer la tension $U(p)$ dans le domaine de Laplace en fonction de la charge $Q(p)$.
2. Déterminer l'expression de $H(p)$ lorsque $Q(p) = H(p) U(p)$
3. Donner l'expression de $H(p)$ sous la forme $H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$. Exprimer alors ζ et ω_0 en fonction de R , L et C .
4. Déterminer dans le cas $0 < \zeta < 1$ l'expression temporelle de $i(t)$ dans le cas d'une excitation idéale $U(p) = 1$.

1.3 Mise en évidence des analogies

1. Dans un tableau, rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 et du taux d'amortissement ζ dans le cas du système masse-ressort amorti et dans le cas du circuit RLC série.
2. Identifier alors les analogies entre R , L , C et k , \mathcal{C} , m .

Ingénierie des systèmes cyber-physiques

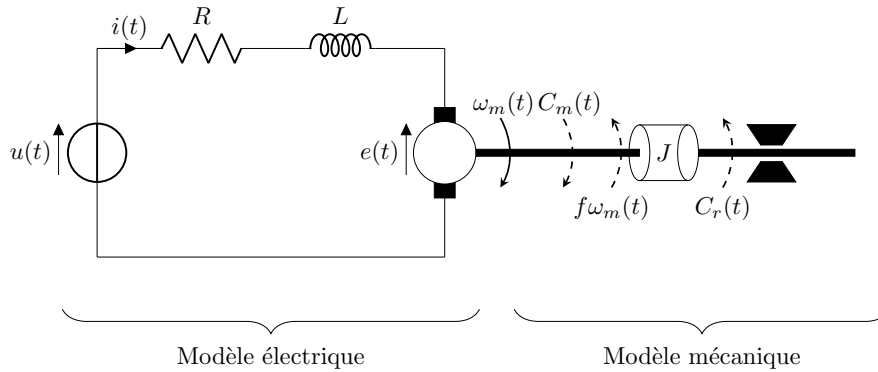
R6.10 - Asservissement des systèmes mécatroniques

TD2 - Modélisation et asservissement d'un moteur à courant continu

Thomas Fromentèze

On souhaite étudier le fonctionnement d'un moteur à courant continu afin de comprendre la relation entre la tension d'alimentation appliquée à l'induit et la vitesse de rotation obtenue de l'arbre moteur.

Le modèle étudié est le suivant :



On identifie à gauche du schéma un circuit électrique permettant de modéliser les effets résistif et inductifs de l'induit du moteur à courant continu, ainsi que la force contre-électromotrice issue de la rotation du moteur qui vient s'opposer à la tension d'alimentation.

La partie droite du schéma représente la rotation d'un arbre en fonction de l'entraînement du moteur et de l'action d'une mâchoire de frein. La vitesse angulaire résultante est calculée grâce au principe fondamental de la dynamique en faisant le bilan des couples appliqués à l'inertie ramenée sur l'arbre moteur J .

Le schéma est complété par l'ensemble d'équations suivant :

Modèle électrique :

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

$$e(t) = K_e \omega_m(t) \quad (2)$$

Modèle mécanique :

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\omega_m(t) \quad (3)$$

$$C_m(t) = K_m i(t) \quad (4)$$

- $u(t)$: tension de commande du moteur (V)
- $e(t)$: force contre-électromotrice du moteur (V)
- $i(t)$: intensité dans le moteur (A)
- $C_m(t)$: couple exercé par le moteur (N.m)
- $C_r(t)$: couple résistant ramené sur l'arbre moteur (N.m)
- $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (rad/s)
- R : résistance du rotor (Ω)
- L : inductance du rotor (H)
- J : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur (kg.m^2)
- f : paramètre de frottement visqueux (N.m.s)
- K_m : constante de couple (N.m/A)
- K_e : coefficient de force contre-électromotrice (V.s/rad)

1 Représentation du problème dans le domaine de Laplace

Fonctions de transfert de la partie électrique

1. Exprimer les équations du modèle électrique dans le domaine de Laplace.
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert reliant la tension d'alimentation $U(p)$ et le courant $I(p)$.
3. Faire de même pour l'expression reliant la force contre-électromotrice $E(p)$ et la vitesse angulaire $\Omega_m(p)$.

Fonctions de transfert de la partie mécanique

4. Exprimer les équations du modèle mécanique dans le domaine de Laplace.
5. Déterminer l'expression de la fonction de transfert reliant le couple moteur $C_m(p)$ et le couple résistant $C_r(p)$ à la vitesse angulaire $\Omega_m(p)$.
6. Faire de même pour l'expression entre le courant du moteur $I(p)$ et le couple moteur $C_m(p)$.

2 Représentation sous la forme d'un schéma fonctionnel

Fonctions de transfert de la partie électrique

1. Représenter sous la forme d'un schéma fonctionnel la relation entre la tension d'alimentation $U(p)$ et le courant $I(p)$.
2. Faire de même pour la relation entre la force contre-électromotrice $E(p)$ et la vitesse angulaire $\Omega(p)$.

Fonctions de transfert de la partie mécanique

3. Représenter sous la forme d'un schéma fonctionnel la relation entre le couple moteur $C_m(p)$, le couple résistant $C_r(p)$ et la vitesse angulaire $\Omega_m(p)$.
4. Faire de même pour la relation entre le courant du moteur $I(p)$ et le couple moteur $C_m(p)$.

Synthèse

5. Représenter le schéma fonctionnel modélisant l'ensemble des interactions électriques et mécaniques de ce moteur à courant continu.
6. Identifier la boucle de contre-réaction. Quel est l'effet attendu sur la relation entre tension de commande et vitesse angulaire de l'arbre moteur ?
7. Donner l'expression de la fonction de transfert reliant la vitesse angulaire $\Omega_m(p)$ à la tension d'alimentation $U(p)$.

Application numérique

On considère un moteur à courant continu présentant les caractéristiques suivantes :

- $K_e = 0.1 \text{ V/rad/s}$
- $J = 0.01 \text{ kg.m}^2$
- $K_m = 0.1 \text{ N.m/A}$
- $R = 0.1 \text{ } \Omega$
- $L = 0.5 \text{ mH}$

On néglige le coefficient de frottement visqueux f et on travaille en l'absence de couple résistant $C_r(t)$.

Le moteur est alimenté par un échelon $u(t)$ de tension 25 V dont la transformée de Laplace vaut :

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p) = \frac{25}{p} \quad (5)$$

À l'aide du théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_m(p) \quad (6)$$

déterminer la valeur de la vitesse du moteur en régime permanent.

Ingénierie des systèmes cyber-physiques

R6.10 - Asservissement des systèmes mécatroniques

Travaux pratiques

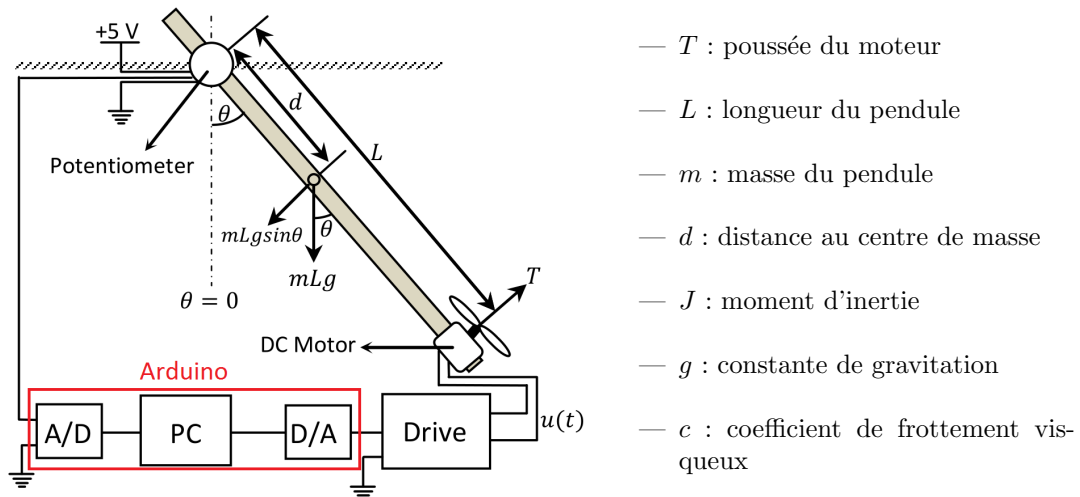
Thomas Fromentèze

Ce TP est long et nécessite de la préparation. Une mise en application sur un montage réel est prévue en fin de séance, avec IA autorisée pour la génération de code Arduino.

Pour ce TP, vous allez utiliser la partie *Simulink* du logiciel *MATLAB* pour la simulation de schémas fonctionnels. Une utilisation en ligne de 10h est offerte (il suffit de créer un nouveau compte avec une nouvelle adresse e-mail si votre temps est expiré). Si vous voulez gagner du temps en TP, créez un compte en ligne avant d'arriver en recherchant "Matlab online", qui vous amènera sur le site de *MathWorks*.

1 Introduction

Ce TP a pour objectif la modélisation d'un pendule asservi par la force de poussée générée par un moteur à courant continu dont l'alimentation est commandée par un Arduino. L'angle du pendule est déterminé par un potentiomètre dont la valeur est transmise à un port d'entrée analogique de l'Arduino.



Source : Kizmaz, Hakan, Saadettin Aksoy, and Aydin Mühürçü. "Sliding mode control of suspended pendulum." Modern Electric Power Systems (MEPS), 2010 Proceedings of the International Symposium. IEEE, 2010.

L'équation du système dynamique est la suivante :

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} + mgd \sin(\theta(t)) = T(t) \quad (1)$$

Le problème est simplifié en linéarisant l'équation par l'approximation $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$.

1. Dans quel cas cette approximation peut-elle être rigoureuse ?
2. Déterminer l'équation dans le domaine de Laplace liant l'excitation $T(p)$ à la position angulaire $\theta(p)$.
3. Extraire l'expression de la fonction de transfert $H(p)$ telle que $\theta(p) = H(p) T(p)$.

La poussée du moteur $T(p)$ exprimée dans le domaine de Laplace peut être déterminée en fonction de la tension de commande $V(p) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ appliquée à l'induit du moteur et du coefficient de poussée K_m :

$$T(p) = K_m V(p) \quad (2)$$

4. Déterminer l'expression de l'angle du système dans le domaine de Laplace $\theta(p)$ en fonction de la tension de commande $V(p)$

Dans le cadre de l'asservissement en angle du pendule, on souhaite déterminer l'expression du coefficient K_m . On étudie ainsi l'équation (1) lorsque le pendule atteint en régime établi la position $\theta = \theta_s$.

5. Lorsque le régime établi est atteint, que valent $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et $\frac{d\theta}{dt}$?
6. En déduire la relation entre θ_s et V_s , la tension de commande en régime établi.

On s'intéresse pour la prochaine partie à la modélisation de ce système à l'aide du module *Simulink* du logiciel *MATLAB*.

2 Modélisation physique

On considère un système avec les caractéristiques suivantes :

- $d = 30$ mm
- $m = 360$ g
- $g = 9.81$ m.s⁻²
- $J = 0.0106$ kg.m²
- $c = 0.0076$
- $K_m = 0.0296$ Nm.V⁻¹

1. Déterminer l'unité du coefficient c par une analyse dimensionnelle du couple de frottement visqueux :


$$C_v = c \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3)$$

La valeur de c est déjà donnée dans le système international.

2. Représenter sur feuille sous forme de schéma fonctionnel la transition de $V(p)$ vers $T(p)$ puis $\theta(p)$ en identifiant les deux fonctions de transfert.

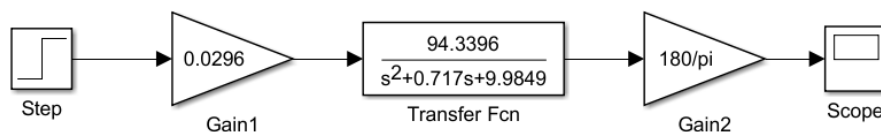
Le logiciel *Simulink* est une plate-forme de modélisation intégrée au logiciel *MATLAB*. Il permet de réaliser des simulations au moyen de schémas-blocs.

- Ouvrir premièrement le logiciel *MATLAB* puis taper "simulink" dans la fenêtre de commande.
- Aller dans la section "New" puis choisir "Blank Model" dans l'onglet "Simulink".

On souhaite reproduire le montage du moteur à courant continu. Les éléments nécessaires à sa réalisation sont disponibles depuis le "Library Browser" indiqué par le logo  dans la barre d'outils.

- Chercher les éléments *Step*, *Sum*, *Transfer Fcn*, *Gain* et *Scope* disponibles dans les bibliothèques :
 - "Simulink/Commonly Used Blocks"
 - "Simulink/Continuous".

3. Réaliser le montage suivant en repérant les signaux de chaque transition :

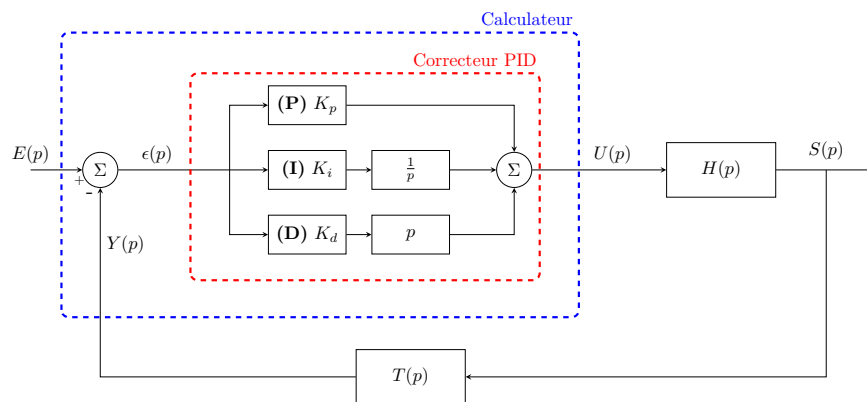


4. Justifier par le calcul les valeurs données dans ces fonctions de transfert.

5. Est-ce que ce système est déjà asservi en position ?
6. Quel est l'angle obtenu en degrés en régime établi pour un signal de tension échelon de 1V ?
7. Déterminer alors par une règle de trois la valeur de l'échelon à appliquer pour obtenir une position en régime établi telle que $\theta_s = 40^\circ$. Comparer à la valeur obtenue par le calcul à partir de la question 1.6. D'où vient cette différence ?
8. Quelle est l'allure temporelle de la position angulaire en fonction du temps ? Déterminer la période des oscillations obtenues. Comment peut-on améliorer l'asservissement angulaire du système ?
9. Ajouter un bloc de conversion permettant de spécifier au système la consigne en degrés et non plus en volts.

3 Régulation PID

On souhaite implémenter dans ce montage un régulateur PID monté en série du système et associé à un comparateur. On rappelle pour cela les éléments qui composent ce régulateur :

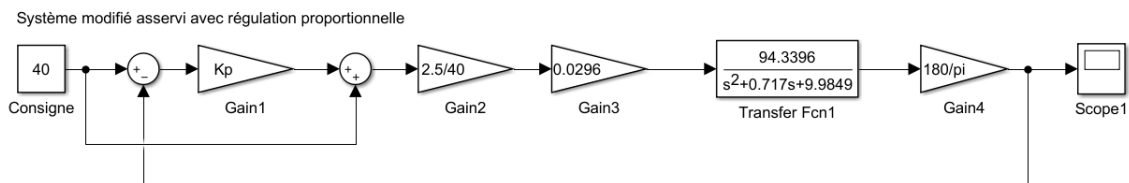


3.1 Correcteur Proportionnel :

Cette étude est initiée par l'implémentation d'un simple correcteur proportionnel dans le montage afin d'étudier l'action d'une boucle de contre-réaction sous sa forme la plus simple.

1. Modifier dans un nouveau fichier le montage du pendule afin d'inclure un comparateur et un régulateur proportionnel de constante k_p .
2. Quel est l'impact d'un tel correcteur ? Comment peut-on justifier l'inefficacité du montage proposé ?

On ajoute alors un sommateur en série du régulateur afin de conserver une force de poussée constante.



3. Modifier le montage initial afin d'inclure le sommateur et commenter l'impact de ce nouvel élément. Est-ce que le montage présente une meilleure convergence que le montage initial sans régulateur ?

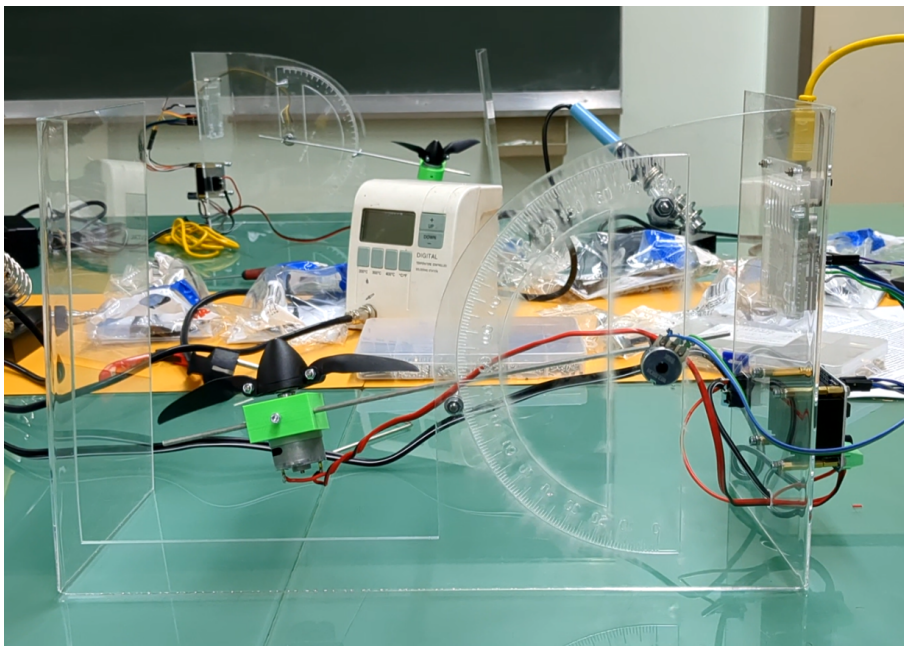
On tente alors de réaliser le montage d'un régulateur PID complet afin d'étudier l'impact de chaque composante.

3.2 Correcteur PID :

1. À l'aide des blocs "*Derivative*" et "*Integrator*" disponibles dans la librairie "*Continuous*" de *Simulink*, réaliser un régulateur PID permettant d'asservir la tension de commande du pendule.
2. Observer à tour de rôle l'impact de chaque paramètre K_p , K_i et K_d en assignant une des valeurs égale à 1 et en maintenant les deux autres à 0.
3. Optimiser finalement les trois paramètres afin d'obtenir une convergence rapide et sans dépassement. Représenter sur le même graphe la réponse initiale sans correcteur et celle optimisée pour un angle $\theta_s = 40^\circ$.

4 Expérimentation

Un montage initié en 2024 est encore en cours d'amélioration mais permet déjà l'asservissement de la position angulaire d'un axe.



Le montage comporte un moteur DC connecté à une alimentation électrique par l'intermédiaire d'un pont en H. Ce dernier est piloté par un Arduino. Un potentiomètre constitue une liaison pivot avec le bras sur lequel est monté le moteur, relié à des hélices.

Votre objectif est de vérifier le câblage complet de votre platine, puis d'écrire un code Arduino permettant d'assurer l'asservissement angulaire du bras.

Mise en garde : Pour obtenir des vitesses de rotation et un couple suffisant, le montage fonctionne en 12V. Les puissances mécaniques et électriques impliquées imposent de réaliser ces expériences avec plus de précautions que pour vos précédents montages du S5.

