

# Harmonisation en algèbre linéaire

**Thomas Cluzeau**

Maître de Conférences

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges  
Parc ester technopole, 16 rue d'atlantis 87068 Limoges Cedex

[cluzeau@ensil.unilim.fr](mailto:cluzeau@ensil.unilim.fr)

<http://www.ensil.unilim.fr/~cluzeau>



# Objectif et plan de ce cours

- **But :**
  - Donner (ou rappeler) un certain nombre de notions d'algèbre linéaire, nécessaires pour suivre les cours suivants
  - Manipulation des notions plus que connaissances théoriques  
↪ Exemples, exercices, applications
- **Plan :**
  - ① Espaces vectoriels et applications linéaires
  - ② Matrices et Déterminants
  - ③ Résolution de systèmes linéaires
  - ④ Diagonalisation des endomorphismes

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels et applications linéaires

I

# Espaces vectoriels

# Espaces vectoriels (ev) : définition

- Espaces vectoriels : objets de base de l'algèbre linéaire

## Définition

Un *espace vectoriel*  $E$  sur un corps  $\mathbb{K}$ , ou  $\mathbb{K}$ -*espace vectoriel* ( $\mathbb{K}$ -*ev*), est un ensemble non-vidé d'éléments, appelés *vecteurs*, muni d'une addition (loi de composition interne) et d'une multiplication par des éléments de  $\mathbb{K}$ , appelés *scalaires*, (loi de composition externe) satisfaisant certains axiomes.

- addition  $+$  :  $\forall a, b \in E, a + b \in E$ ,
  - multiplication par un scalaire  $\cdot$  :  $\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot a \in E$ .
- 
- Pour ce cours  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

- **Deux exemples fondamentaux :**

- ① produit cartésien  $\mathbb{K}^n$  d'éléments de  $\mathbb{K}$
- ② ensemble  $\mathcal{F}(I, E)$  des fonctions d'un ensemble non-vide  $I$  dans un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$

- **Autres exemples :**

- $\mathbb{K}[x]$
- ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène à coefficients dans  $\mathbb{K}$
- ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients dans  $\mathbb{K}$

## Définition

Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  un sous-ensemble non-vide de  $E$ . On dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel (sev)** de  $E$  si pour tout  $x, y \in F$  et pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda x + \mu y \in F$ .

### • Exemples :

- $\mathcal{C}(I, E)$  sev de  $\mathcal{F}(I, E)$
- $\mathcal{D}^p(I, E)$  sev de  $\mathcal{C}(I, E)$
- $\mathcal{D}^\infty(I, E)$  sev de  $\mathcal{D}^p(I, E)$
- On a donc l'inclusion suivante d'ev :  
$$\mathcal{D}^\infty(I, E) \subset \dots \subset \mathcal{D}^p(I, E) \subset \mathcal{D}^{p-1}(I, E) \subset \dots \subset \mathcal{D}^0(I, E) = \mathcal{C}(I, E) \subset \mathcal{F}(I, E)$$

# Combinaisons linéaires et familles génératrices (1)

## Définition

On appelle *( $\mathbb{K}$ -)combinaison linéaire d'éléments  $x_1, \dots, x_n$*  d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  tout vecteur de la forme  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  appartiennent à  $\mathbb{K}$ .

- Toute combinaison linéaire de  $E$  reste un élément de  $E$

## Définition

On appelle *combinaison linéaire d'éléments d'une partie  $G$  de  $E$*  toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de  $G$ .

- $G$  n'est pas nécessairement fini.



# Combinaisons linéaires et familles génératrices (2)

## Théorème et Définition

Soit  $G$  un sous-ensemble non-vide d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On note  $CL(G)$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $G$ . C'est un sev de  $E$  appelé **sous-espace vectoriel engendré par  $G$** .

- $CL(G)$  est aussi le plus petit sev de  $E$  qui contient  $G$ .

## Définition

Soit  $G$  un sous-ensemble non-vide d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On dit que  **$G$  est une partie génératrice de  $E$**  ou que  **$G$  engendre  $E$**  si  $E = CL(G)$ .

## Exemples :

- $\mathbb{K}^n$  est engendré par  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$
- $\mathbb{K}[x]$  est engendré par  $\{1, x, x^2, \dots\}$
- $\mathbb{K}_n[x]$  est engendré par  $\{1, x, \dots, x^n\}$

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. On dit que  $E$  est de dimension finie (sur  $\mathbb{K}$ ) si il est engendré par une partie  $G$  contenant un nombre fini d'éléments.

- **Exemples :**

- $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}_n[x]$  sont des ev de dimension finie
- $\mathbb{K}[x]$  n'est pas de dimension finie

## Définition

Soit  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . On dit que les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont **linéairement dépendants** ou **liés** si l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont **linéairement indépendants** ou **libres**.

**Caractérisation** :  $x_1, \dots, x_n$  libres ssi

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- **Exemple** : dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(1, 2)$  et  $(1, -1)$  sont libres mais  $(1, -2)$ ,  $(2, 3)$  et  $(1, 0)$  sont liés

## Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Une **base de  $E$**  est une famille libre et génératrice de  $E$ .

### • Exemples :

- $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  base de  $\mathbb{K}^n$  appelée **base canonique de  $\mathbb{K}^n$**
- $\{1, x, \dots, x^n\}$  base de  $\mathbb{K}_n[x]$
- $\{(1, 2), (1, -1)\}$  base de  $\mathbb{R}^2$

**Caractérisation** :  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$  base de  $E$  ssi

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

# Dimension d'un espace vectoriel

## Théorème

*Tout ev de dimension finie admet une base.*

## Théorème et Définition

*Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  possèdent le même nombre d'éléments que l'on appelle la **dimension de  $E$** .*

### • Exemples :

- $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$
- $\mathbb{K}_n[x]$  est de dimension  $n + 1$
- **Attention** : la dimension d'un  $\mathbb{K}$ -ev dépend de  $\mathbb{K}$   
 $\mathbb{C}$  est de dimension 1 sur lui-même mais de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$   
(base  $(1, i)$ )

# II

## Applications linéaires

Dans cette section,  $E$  et  $F$  désignent deux  $\mathbb{K}$ -ev

## Définition

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite **linéaire** si  $\forall x, y$  dans  $E$  et  $\forall \lambda, \mu$  dans  $\mathbb{K}$ , on a  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ . Les applications linéaires (AL) sont aussi appelées **morphismes**. Lorsque  $F = \mathbb{K}$ , on parle de **forme linéaire**. Lorsque  $E = F$ , on parle d'**endomorphisme**.

## • Exemples :

- **$i$ -ème projection de  $\mathbb{K}^n$  :**

$$P_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$$

- $E$  de dimension finie,  $\lambda \in \mathbb{K}$ .  $E \rightarrow E, x \mapsto \lambda x$  est une AL (**homothétie**)
- $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  n'est pas linéaire
- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto \int_a^b \phi(t) dt$  est une forme linéaire
- $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - z$  est linéaire. Par contre,  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 - z$  ou encore  $yz$  ne le sont pas
- La dérivation (usuelle) est une AL

# Noyau, image et rang d'une AL

- $\mathcal{L}(E, F)$   $\mathbb{K}$ -ev des AL de  $E$  dans  $F$
- Soit  $f : E \rightarrow F$  une AL. On définit :
  - son **noyau**  $\ker f := \{x \in E; f(x) = 0\} \subseteq E$
  - son **image**  $\operatorname{im} f = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\} \subseteq F$
- Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors on a

$$\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

## Définition

*Soit  $f$  une AL de  $E$  dans  $F$  telle que la dimension de  $\operatorname{im} f$  soit finie. Alors cette dimension est appelée **rang** de l'AL.*



- **Rappel** : une application de  $E$  dans  $F$  est dite :
  - **injective** si  $\forall x \in F, x$  admet au plus un antécédent dans  $E$
  - **surjective** si  $\forall x \in F, x$  admet au moins un antécédent dans  $E$
  - **bijective** si elle est à la fois injective et surjective

## Théorème et Définition

Soit  $f$  une AL de  $E$  dans  $F$ .

- ①  $f$  est injective ssi  $\ker f = \{0\}$
- ②  $f$  est surjective ssi  $\operatorname{im} f = F$

Un **isomorphisme** est une AL bijective. Lorsque  $E = F$ , on parle d'**automorphisme**. On dit que deux ev  $E$  et  $F$  sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

# Exemples et théorème d'isomorphisme

## • Exemples :

- $\ker P_1 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$  et  $\text{im } P_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ .
- L'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f((x, y, z)) = (y + z, x + z, x + y)$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Elle est injective ( $\ker f = \{0\}$ ) et surjective (car tout triplet  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  admet pour antécédent  $(\frac{-x+y+z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{x+y-z}{2})$ ). C'est donc un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

## Théorème

*Soit  $f$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  supposés de dimension finie respectivement égale à  $n$  et  $m$ . Alors  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  ssi  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  est une base de  $F$ .*

*En conséquence, deux ev (de dimension finie) sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.*

# Matrice d'une AL (1)

- **Matrice**  $n \times m$  = tableau à  $n$  lignes et  $m$  colonnes
- $f$  AL de  $E$  (dim.  $n$ ) dans  $F$  (dim.  $m$ )
- $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$  base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_m\}$  base de  $F$
- $x \in E : x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_i \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

$\Rightarrow f(x)$  donné par les

$$f(e_i) = \alpha_{i,1} f_1 + \dots + \alpha_{i,m} f_m, \alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$$

## Matrice d'une AL (2)

### Définition

Avec les notations précédentes, la matrice  $n \times m$

$$\mathcal{M}_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \dots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice de l'AL  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$* .

On a alors

$$f(x) = x_1 (\alpha_{1,1} f_1 + \dots + \alpha_{1,m} f_m) + \dots + x_n (\alpha_{n,1} f_1 + \dots + \alpha_{n,m} f_m)$$

## Exemple et théorème

- **Exemple** : Considérons l'AL  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f((x, y, z)) = (x - y, z)$ . La matrice  $f$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Théorème

*Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies respectivement égales à  $n$  et  $m$ . On note  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'ev  $\mathcal{L}(E, F)$  des AL de  $E$  dans  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ .*

# Produit scalaire et produit vectoriel

- **Produit scalaire** entre deux vecteurs  $x$  et  $y$  : c'est un **scalaire**

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- **Produit vectoriel** entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  : c'est un **vecteur**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

# Chapitre 2

## Matrices et Déterminants.

I

# Matrices



# Définition

## Définition

Soit  $\mathbb{K}$  un corps ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Une **matrice  $A$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  à  $n$  lignes et  $m$  colonnes** ou **matrice  $n \times m$**  est un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On note  $a_{i,j}$  l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ . La matrice  $A$  est aussi notée  $(a_{ij})_{i,j}$ . On note  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

- **Exemples :**

- matrice d'une AL relativement à des bases
- matrice associée à un système linéaire
- matrice colonne associée aux coordonnées d'un vecteur dans une base d'un ev de dimension finie
- ...

- **Forme particulière de matrices :**

- matrice carrée
- matrice diagonale
- matrice triangulaire supérieure ou inférieure
- matrice colonne ou matrice ligne

# Opérations sur les matrices (1)

## Théorème

L'ensemble  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  muni de :

- 1  $(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$
- 2  $\lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$

est un ev de dimension  $n m$ .

• Base :  $\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right), \dots$

•  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{nm}$ .

## Corollaire

*Soient  $E$  et  $F$  deux ev de dimensions  $n$  et  $m$ . L'ev  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension  $nm$ .*

- **Autres opérations :**

- **Transposition** : on échange les lignes et les colonnes.

Notation :  $A^T$  ou  ${}^tA$

- **Sous-matrices** : on supprime des lignes et des colonnes

## Définition

Soient  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m,l}(\mathbb{K})$  deux matrices telles que le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ . Le **produit**  $C = AB = (c_{ij})_{i,j}$  des matrices  $A$  et  $B$  est alors défini par  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ . Autrement dit, l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  dans  $AB$  est le produit scalaire de la ligne  $i$  de  $A$  par la colonne  $j$  de  $B$ .

- **Attention** : ce produit est non-commutatif  $AB \neq BA$  d'autant plus que  $AB$  peut être défini sans que  $BA$  le soit

# Application : matrice de la composée de deux AL

Soient :

- $E, F$  et  $G$  trois ev de dimensions respectives  $n, m$  et  $\ell$
- $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$  des bases de  $E, F$  et  $G$
- $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux AL
- $M_f$  (resp.  $M_g$ ) la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$ )

Alors la matrice de l'AL  $h = g \circ f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_G$  est le produit  $M_h = M_g M_f$

# Matrice identité (unité)

On note  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$ .

## Définition

La *matrice identité*  $I_n$  (de dimension  $n$ ) est la matrice satisfaisant

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), I_n A = A I_n = A.$$

Cette matrice est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Définition

Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *inversible* si il existe  $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $XA = AX = I_n$ . Si elle existe, la matrice  $X$  est unique ; elle est appelée *l'inverse de  $A$*  et notée  $A^{-1}$ .

**Exemple** : si  $ad - bc \neq 0$ , alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



# Application : changement de base (1)

- $E$  un ev (dim.  $n$ )

- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  bases de  $E$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e'_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} e_j$ ,  $a_{j,i} \in \mathbb{K}$  (uniques)

- $x \in E$  :  $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$  et  $x = \sum_{i=1}^n \xi'_i e'_i$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \xi_j e_j = \sum_{i=1}^n \xi'_i \left( \sum_{j=1}^n a_{j,i} e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{j,i} \xi'_i \right) e_j.$$

$\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\xi_j = \sum_{i=1}^n a_{j,i} \xi'_i$

## Application : changement de base (2)

Notons

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X = P X'.$$

## Application : changement de base (3)

De même avec  $e_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} e'_j$  et

$$Q = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ on obtient } X' = Q X.$$

Finalement  $X = (P Q) X$  et  $X' = (Q P) X'$  ; d'où  
 $P Q = Q P = I_n$ , i.e.,  $Q = P^{-1}$ .

### Définition

Avec les notations précédentes, la matrice  $P$  est appelée **matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$**  ; ses colonnes sont les coefficients de la décomposition des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

On a aussi  $X' = P^{-1} X$  donc  $P^{-1}$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

# Matrices de passage et matrices d'AL (1)

- $E, F$  ev de dim.  $n$
- $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$  bases de  $E$ .  $P$  matrice de passage de  $\mathcal{B}_E$  à  $\mathcal{B}'_E$
- $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$  bases de  $F$ .  $Q$  matrice de passage de  $\mathcal{B}_F$  à  $\mathcal{B}'_F$
- $f : E \rightarrow F$  AL.  $M = \mathcal{M}_f(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ ,  $M' = \mathcal{M}_f(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)$
- $x \in E$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  (resp.  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ) le vecteur de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}_E$  (resp.  $\mathcal{B}'_E$ )
- $y \in F$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  (resp.  $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ ) le vecteur de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}'_F$ )

## Matrices de passage et matrices d'AL (2)

$$\Rightarrow X = P X', Y = Q Y', Y = M X, Y' = M' X'$$

$$\Rightarrow Q Y' = M P X', \text{ i.e., } Q M' X' = M P X' \text{ et donc}$$

$$M' = Q^{-1} M P$$

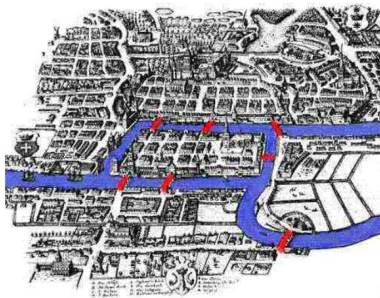
La relation précédente donne le lien entre deux matrices qui représentent une même AL. On remarque que dans le cas où  $Q = P$ , on obtient

$$M' = P^{-1} M P.$$

Les matrices  $M$  et  $M'$  sont dites **semblable**.

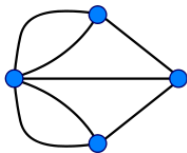
# Application à la théorie des graphes

- **Origine** : problème des ponts de la ville de Königsberg (Russie) traversée par le fleuve Pregel



- **Problème** : est-il possible de partir d'un endroit quelconque de la ville, de traverser tous les ponts une et une seule fois et de revenir au point de départ ?
- **Réponse d'Euler** : **Non** grâce à la **la théorie des graphes**

- **Graphe** : collection de **sommets** et d'**arêtes** (graphe orienté si arêtes orientées)
- Graphe associé au ponts de Königsberg :



- **Chemin** (dans un graphe orienté) entre deux sommets  $X$  et  $Y$  : suite de sommets et d'arêtes orientées (boucle si début = fin)
- **Longueur d'un chemin** : nombre d'arêtes

# Relation entre théorie des graphes et matrices

- Moyen pratique de représenter un graphe : **matrice d'adjacence**
- Matrice d'adjacence  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j} = 1$  s'il y a une arête entre le sommet  $i$  et le sommet  $j$  et 0 sinon
- **Exemple** : pour le graphe des ponts de Königsberg :

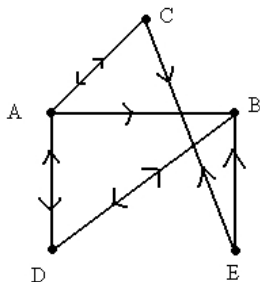
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Théorème** : Si  $M$  est la matrice d'adjacence d'un graphe  $G$  alors l'entrée  $(i,j)$  de  $M^r$  représente de nombre de chemins distincts de longueur  $r$  entre les sommets  $i$  et  $j$  de  $G$ .



## Exemple 1 : compagnie de livraison

Le graphe suivant représente la carte routière d'une compagnie de livraison où A, B, C, D et E sont les villes servies par la compagnie.



- 1 Quelle est la matrice d'adjacence de ce graphe orienté ?
- 2 Quelle est le nombre de connections indirectes avec trois arêtes entre les villes A et B ?
- 3 Donner explicitement ces connections.

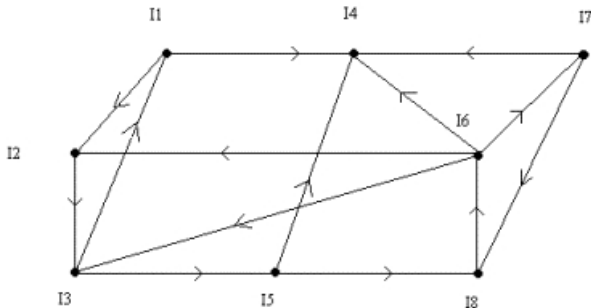
## Exemple 2 : sociologie (1)

- Les **sociologues** utilisent la théorie des graphes pour représenter et analyser des relations à l'intérieur d'un groupe d'individu.
- **Idée** : associé 1 sommet à 1 individu et une arête orienté de A vers B si A influence B.
- On dit que **A influence B en  $r$  étapes** s'il existe un chemin de longueur  $r$  entre A et B

## Exemple 2 : sociologie (2)

**Exercice** : on considère 8 individus  $I_1, \dots, I_8$  dont les influences sont données par le graphe ci-dessous.

- 1 Quelle est la matrice d'adjacence de ce graphe orienté ?
- 2 Quelle est le nombre d'éléments du groupe influencés indirectement en 2 étapes par  $I_8$  ?



II

# Déterminants

## Déterminants d'ordre 2 : définition

### Définition

Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{K}^2$ . On appelle **déterminant de  $x$  et  $y$**  le scalaire

$$\det(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Géométriquement le déterminant de  $x$  et  $y$  représente l'aire algébrique du parallélogramme de cotés  $x$  et  $y$ .

# Déterminants d'ordre 3 : définition

## Définition

Soient  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  et  $z = (z_1, z_2, z_3)$  trois vecteurs de  $\mathbb{K}^3$ . On appelle **déterminant de  $x$ ,  $y$  et  $z$**  le scalaire

$$\det(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1).$$

Géométriquement le déterminant de  $x$ ,  $y$  et  $z$  représente le volume algébrique du tétraèdre d'arêtes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

- $(e_1, e_2, e_3)$  base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$
- $\det(y, x) = -\det(x, y)$
- Si l'on échange lignes et colonnes, on ne change pas le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

- Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer, selon une ligne quelconque, en déterminants d'ordre 2 : par exemple, selon la première ligne

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

# Déterminants d'ordre $n$ quelconque (1)

Dans la suite nous parlerons indifféremment du déterminant des  $n$

vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$  ou du déterminant de

la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ .

La définition récursive du déterminant généralise la dernière propriété donnée ci-dessus pour les déterminants d'ordre 3.



## Déterminants d'ordre $n$ quelconque (2)

### Définition

On appelle **déterminant de la matrice**  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  et on note  $\det(A)$  le scalaire défini par récurrence comme suit :

- ① Si  $n = 1$ , alors  $A = (a)$  est une matrice  $1 \times 1$  et  $\det(A) = a$  ;

② Si  $n > 1$ , on pose  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$

$$a_{1,1} \Delta_{1,1} + \cdots + (-1)^{i+1} a_{1,i} \Delta_{1,i} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \Delta_{1,n},$$

où  $\Delta_{1,i}$  est le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  notée  $A_{1,i}$  qui est obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne  $i$  de  $A$ .

# Exemple

Calculer  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ .

# Propriétés (1)

- $\det(I_n) = 1$  ;
- le déterminant de  $A$  peut être développé par rapport à une ligne quelconque :  $\det(A) = (-1)^{j+1} a_{j,1} \Delta_{j,1} + \cdots + (-1)^{i+j} a_{j,i} \Delta_{j,i} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{j,n} \Delta_{j,n}$   
où  $\Delta_{j,i}$  est le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  notée  $A_{j,i}$  qui est obtenue en supprimant la ligne  $j$  et la colonne  $i$  de  $A$ . Le nombre  $C_{j,i} = (-1)^{i+j} \Delta_{j,i}$  s'appelle le cofacteur de  $a_{j,i}$ . La matrice  $A_{j,i}$  est la comatrice de  $a_{j,i}$  ;
- L'application  $\det$  est une forme linéaire par rapport à chaque ligne ;
- Si deux lignes de  $A$  sont égales, alors  $\det(A) = 0$  ;

## Propriétés (2)

- Le déterminant change de signe si l'on permute deux lignes ;
- Le déterminant reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de  $A$  une combinaison linéaire des autres lignes ;
- $\det(A) = \det(A^T)$ . Par conséquent, on peut remplacer "ligne" par "colonne" dans les propriétés précédentes ;
- $\det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\right) = \det(A) \det(C)$  ;
- $\det(A B) = \det(A) \det(B)$ .

## Théorème

*Une matrice carrée  $A$  de taille  $n$  est inversible ssi son déterminant est non nul.*

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  une matrice carrée de taille  $n$ . Supposons que  $A$  est inversible c'est-à-dire  $\det(A) \neq 0$ . Son inverse est alors donnée par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \dots & C_{n,n} \end{pmatrix}^T,$$

où  $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$  est le cofacteur de  $a_{i,j}$ .

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a  $\det(A) = -2 \neq 0$  donc  $A$  est inversible. On calcule

$$C_{1,1} = (-1)^{1+1}5 = 5, \quad C_{1,2} = (-1)^{1+2}4 = -4,$$

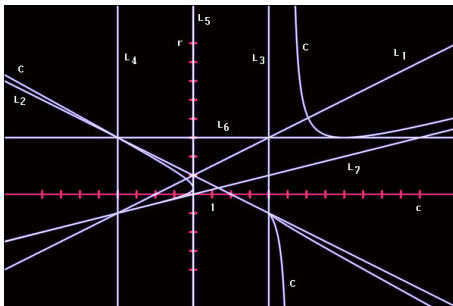
et

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1}3 = -3, \quad C_{2,2} = (-1)^{2+2}2 = 2.$$

On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

# Application à la géométrie



Étant donné quelques points dans le plan ou l'espace, plusieurs problèmes exigent de trouver quelques figures géométriques qui passent par ces points. Ceci peut se résoudre à l'aide de déterminants !

## Exemple 1 : équation de la droite passant par deux points

- $A_1(x_1, y_1)$  et  $A_2(x_2, y_2)$  deux points du plan.

Trouver l'équation de la droite  $\mathcal{D}$  qui passe par  $A_1$  et  $A_2$

- Si  $M(x, y) \in \mathcal{D}$ , alors il existe  $a, b, c$  tel que  $ax + by + c = 0$
- De plus,  $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$  donc  $ax_i + by_i + c = 0$  ( $i = 1, 2$ )

$\rightsquigarrow$  Système  $3 \times 3$  pour  $a, b, c$  ayant une infinité de solutions

$\rightsquigarrow$  Équation de  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Exemple :  $A_1(-1, 2), A_2(0, 1)$
- **Généralisation** : équation du plan passant par 3 points



## Exemple 2 : équation du cercle passant par trois points

- $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  trois points du plan (non-alignés).

Trouver l'équation du cercle  $\mathcal{C}$  qui passe par  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$

- Même raisonnement  $\rightsquigarrow$  Équation de  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Exemple :  $A_1(1, 0)$ ,  $A_2(-1, 2)$  et  $A_3(3, 1)$

## Exemple 3 : équation de l'orbite d'une planète

- **Première loi de Kepler** : une planète décrit autour du soleil une ellipse dont le soleil occupe l'un des foyers.
- **Équation d'une conique plane** :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- **Méthode** :
  - 1 Tracer un système cartésien dans le plan de l'orbite avec le soleil à l'origine
  - 2 Faire 5 observations de la position de la planète
  - 3 Calculer le **déterminant  $6 \times 6$**  obtenu

# Chapitre 3

## Résolution de systèmes linéaires.

# Systemes de $n$ equations à $p$ inconnues

## Définition

Un *systeme linéaire de  $n$  equations à  $p$  inconnues* est un systeme de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

Les  $a_{i,j}$  sont *les coefficients du systeme* qui appartiennent à un corps  $\mathbb{K}$ ,  $x_1, \dots, x_p$  sont *les inconnues* et  $b_1, \dots, b_n$  *les coefficients du second membre*.

Un systeme est dit *homogene* si son second membre est nul c'est-à-dire si tous les  $b_i$  sont nuls.

- 1 Solutions d'un système homogène forment un sev de  $\mathbb{K}^p$
- 2  $x$  et  $y$  solutions  $\Rightarrow x - y$  solution du système homogène associé
- 3  $x$  solution ; toutes les solutions du système =  $x +$  solutions du système homogène associé.

L'ensemble des solution d'un système linéaire est donc un sev affine de  $\mathbb{K}^p$  passant par  $x$  et de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Un tel système peut se réécrire de manière matricielle

$$Ax = b,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

A matrice d'une AL,  $x$  (resp.  $b$ ) vecteur coordonné de  $u$  (resp.  $v$ )

$$Ax = b \Leftrightarrow f(u) = v$$

Deux cas se présentent :

- 1  $v \notin \text{im}f$  : pas de solutions
- 2  $v \in \text{im}f$  : au moins une solution
  - $\ker f \neq \{0\} \Rightarrow$  infinité de solutions
  - $\ker f = \{0\} \Rightarrow$  unique solution.

**Restriction pour la suite** :  $A$  carrée cad autant d'inconnues que d'équations ( $n = p$ )

## Résolution : cas $\det(A) \neq 0$

$A$  est inversible : solution unique

$$x = A^{-1} b$$

- **Exemple** : Résoudre en inversant sa matrice le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

Parfois le calcul de l'inverse peut s'avérer inutile car il existe des méthodes plus directes (moins coûteuses)



## Définition

Un système  $Ax = b$  est dit **de Cramer** s'il admet une solution unique (ce qui est équivalent à  $\det(A) \neq 0$ ). Dans ce cas la solution  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  est donnée par les formules de Cramer suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

où  $A_i$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $i$ -ème colonne de  $A$  par  $b$ .

• **Exemple** : Résoudre en utilisant la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 3 \\ x + y - 3z = -2 \\ 2x - y + 7z = 7 \end{cases}$$

Pour de "grandes" ou "difficiles" matrices, le calcul de tous ces déterminants s'avère pénible et d'autres méthodes sont plus pertinentes (substitution, Gauss, décomposition LU, Cholesky, décomposition QR, ... : Cf Analyse Num. au second semestre)

## Définition

On appelle *rang* d'une matrice  $A$  de taille  $n$  le plus grand entier  $r$  inférieur ou égal à  $n$  tel qu'il existe une matrice carrée de taille  $r$  extraite de  $A$  ayant un déterminant non-nul.

En particulier si  $\det(A) \neq 0$ , alors le rang de  $A$  est égal à  $n$ .

- $r < n$  rang. On peut supposer

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

# Résolution : cas $\det(A) = 0$

- $c_j$   $i$ -ème colonne de  $A$  :  $c_{r+1}, \dots, c_n \in \langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$

solution ssi  $b \in \langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$

Notons

$$N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & b_r \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & b_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,r} & b_n \end{pmatrix}$$

$$N_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & b_r \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,r} & b_i \end{pmatrix}$$

# Résolution : cas $\det(A) = 0$

Deux cas :

- 1 Il existe  $i \in \{r + 1, \dots, n\}$  tel que  $\det(N_i) \neq 0$ . Dans ce cas la famille  $(c_1, \dots, c_r, b)$  est libre et le système n'admet pas de solutions
- 2 Pour tout  $i \in \{r + 1, \dots, n\}$ ,  $\det(N_i) = 0$ . Dans ce cas  $b \in \langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$  et le système admet une infinité de solutions. En effet, cela signifie que quelque soit le choix des  $x_i$  pour  $i \in \{r + 1, \dots, n\}$ , le système

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,r} x_r = b_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{1,n} x_n \\ \vdots \\ a_{r,1} x_1 + \cdots + a_{r,r} x_r = b_r - a_{r,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{r,n} x_n \end{cases}$$

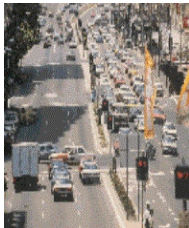
admet une unique solution (donnée par les formules de Cramer). Les inconnues  $x_1, \dots, x_r$  sont alors appelées **les inconnues principales** du système.

# Application aux réseaux

- Réseau : ensemble formé de branches et de noeuds
- Exemple 1 : réseau électrique

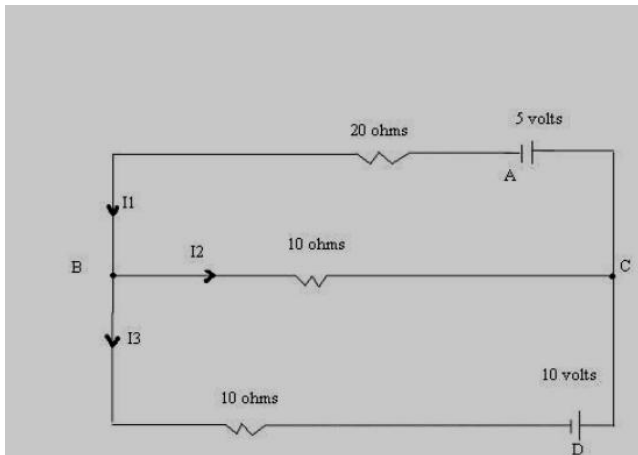


- Exemple 2 : réseau routier  
(branches = rues, noeuds = intersections)



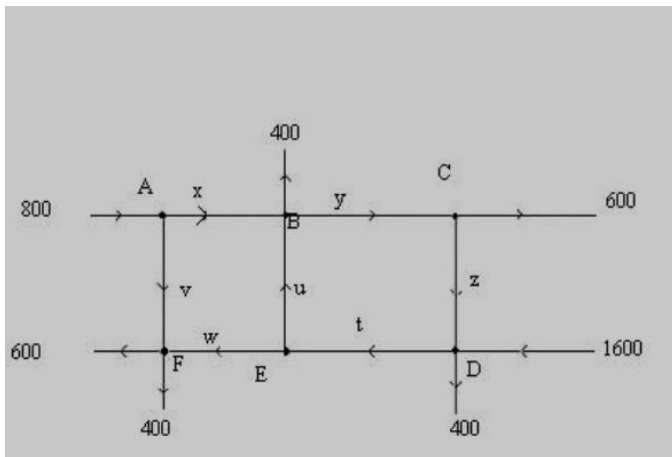
## Exemple 1 : réseau électrique

- Courant régi par la **loi d'Ohm** et les deux **lois de Kirchhoff**
- Exercice : déterminer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  dans le circuit suivant



## Exemple 2 : réseau routier (1)

- Le diagramme ci-dessous représente le trafic traversant un certain bloc de rues. Les nombres représentent les courants moyens dans le réseau aux heures du trafic maximal.



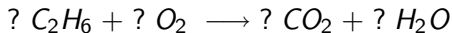


## Exemple 2 : réseau routier (2)

- Exercice :
  - 1 Écrire le système linéaire associé
  - 2 Résoudre ce système
  - 3 Que se passe-t-il lorsque les rues de A à B et de B à C doivent être fermées ? Comment le trafic pourrait-il être modifié ?

- Exemple 1 : dosage d'ingrédients
- 3 ingrédients (A, B et C) doivent être dissous dans l'eau séparément avant qu'ils agissent l'un sur l'autre pour former la substance chimique
- On suppose que :
  - $1.5 (g/cm^3)$  de A + 3.6 de B + 5.3 de C = 25,07 g du produit
  - $2.5 (g/cm^3)$  de A + 4.3 de B + 2.4 de C = 22,36 g du produit
  - $2.7 (g/cm^3)$  de A + 5.5 de B + 3.2 de C = 28,14 g du produit
- Question : volumes des solutions contenant A, B et C ?

- Exemple 2 : équilibrage d'équations chimiques
- Loi de conservation de la masse : dans n'importe quelle réaction chimique, la masse n'est ni créée ni détruite.
- Exercice : équilibrer l'équation suivante



# Chapitre 4

## Diagonalisation des endomorphismes.

I

# Valeurs propres et vecteurs propres

# Définition

- $E$   $\mathbb{K}$ -ev,  $\mathcal{L}(E)$  ensemble des endo. de  $E$ .

## Définition

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **une valeur propre de  $f$**  s'il existe un vecteur  $v$  **non-nul** de  $E$  tel que  $f(v) = \lambda v$ . On appelle **vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$**  un vecteur  $v$  non-nul de  $E$  tel que  $f(v) = \lambda v$ .

## Théorème et Définition

L'ensemble constitué des vecteurs propres associés à une même valeur propre  $\lambda$  et du vecteur nul est un sev de  $E$  appelé **sous-espace propre associé à  $\lambda$**  ; on le note  $E_\lambda$ .

- 1  $P_1$  admet comme valeurs propres 1 et 0 ;  $E_1 = ((1, 0, 0))$  et  $E_0 = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$
- 2 L'homothétie de  $E$  de centre  $O$  et de rapport  $k \neq 0$  admet pour unique valeur propre  $k$  et on a  $E_k = E$  ;

**Attention au corps de base  $\mathbb{K}$**  : la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta \neq k\pi$  n'a pas de valeur propre dans  $\mathbb{R}$ . En revanche, sur  $\mathbb{C}$ , cette dernière coïncide avec l'homothétie de rapport  $\exp(i\theta)$  et admet donc une valeur propre à savoir  $\exp(i\theta)$

- 1  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valeurs propres de  $f$  et  $v_1, \dots, v_m$  vecteurs propres associés. La famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est libre
- 2 Si  $E$  est de dimension finie égale à  $n$ , alors  $f \in \mathcal{L}(E)$  admet au plus  $n$  valeurs propres.

## Théorème

*Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres. La matrice de  $f$  dans cette base est diagonale.*



||

# Polynôme caractéristique

# Définition (1)

## Définition

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  un endomorphisme ayant pour matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Alors on appelle **valeur (resp. vecteur) propre de  $A$**  une valeur (resp. un vecteur) propre de  $f$ .

- $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$

$\Rightarrow$  il existe  $v \in \mathbb{K}^n$  non-nul tel que  $Av = \lambda v$

$\Rightarrow (A - \lambda I_n)v = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

Les valeurs propres d'un endomorphisme s'obtiennent comme racines d'un polynôme appelé **polynôme caractéristique**.

## Définition (2)

### Définition

On appelle *polynôme caractéristique d'une matrice*  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  le polynôme

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

- **Exemple** : le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est  $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ .

### Définition

On dit que *deux matrices*  $A$  et  $B$  sont *semblables* si il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1} A P$ .

# Propriétés (1)

- Ch. 2  $\Rightarrow$  les matrices d'une même AL dans deux bases distinctes sont semblables

$\Rightarrow$  La matrice  $P$  apparaissant dans la déf. est alors la **matrice de passage d'une base à l'autre**.

- $A$  et  $B$  deux matrices semblables ( $B = P^{-1} A P$ ). On a alors

$$B - \lambda I_n = P^{-1} A P - \lambda I_n = P^{-1} (A - \lambda I_n) P$$

$\Rightarrow \det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$

$\Rightarrow$  le polynôme caractéristique de la matrice d'une AL ne dépend pas de la base choisie et on parle donc de **polynôme caractéristique d'une application linéaire**.

### Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Les **valeurs propres de  $f$**  sont les racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque.

Si ce polynôme caractéristique admet  $n$  racines distinctes, alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres et la matrice de  $f$  dans cette base est diagonale.

- **Exemple** :  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



# Endomorphismes diagonalisables

# Définition

- Lorsque  $f \in \mathcal{L}(E)$  n'admet pas  $n$  valeurs propres distinctes, il n'existe pas nécessairement une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## Définition

*Un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres (i. e., dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale).*

## Théorème

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Alors  $f$  est diagonalisable ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées

- 1 Le polynôme caractéristique de  $f$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{K}$  ;
- 2 Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de  $f$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_s$ . Soient  $d_1, \dots, d_s$  les dimensions respectives de  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $m_i = d_i$ .

• **Exemple** :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .



## Définition

Une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **semi-définie positive** (resp. **définie positive**) si pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  (resp.  $> 0$ ) où  $\langle x, y \rangle = x^T y$ .

## Théorème

Si  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est symétrique et semi-définie positive, alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et a toutes ses valeurs propres positives.

# Forme de Jordan

Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  inversible elle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_m \end{pmatrix},$$

où les  $J_i$  sont appelés **blocs de Jordan** : ceux sont des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valeurs propres de  $A$ .

# IV

Application à la résolution de systèmes différentiels (ou aux différences) linéaires

## Définition

Un *système différentiel linéaire à coefficients constants* est un système de la forme

$$\begin{cases} y_1(t)' &= \sum_{i=1}^n a_{1,i} y_i(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_n(t)' &= \sum_{i=1}^n a_{n,i} y_i(t) + b_n(t) \end{cases}$$

où les  $y_i(t)$  sont des fonctions inconnues de la variable  $t$ , les  $a_{i,j}$  sont des constantes et les  $b_i(t)$  sont des fonctions données de la variable  $t$ .

- **Forme matricielle**  $Y(t)' = A Y(t) + b(t)$
- Restriction :  $b(t) = 0$

# Solution

- $B = P^{-1} A P$  et  $Z(t)$  solution de  $Z(t)' = B Z(t)$   
 $\Rightarrow Y = P Z$  solution de  $Y(t)' = A Y(t)$ .
- **Intérêt** : si  $B$  est diagonale, alors le système  $Z(t)' = B Z(t)$  est simple à résoudre

## Théorème

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale de taille  $n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. La solution générale du système  $Z(t)' = D Z(t)$  est donnée par

$$Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 \exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ C_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix},$$

où les  $C_i$  sont des constantes.

- **Exemple** : Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases}$$

# Cas aux différences (1)

## Définition

Un  **système aux différences linéaire à coefficients constants**  est un système de la forme

$$\begin{cases} u_1(m+1) = \sum_{i=1}^n a_{1,i} u_i(m) + b_1(m) \\ \vdots \\ u_n(m+1) = \sum_{i=1}^n a_{n,i} u_i(m) + b_n(m) \end{cases}$$

où les  $u_i$  sont des suites inconnues (fonctions de la variable discrète  $m$ ), les  $a_{i,j}$  sont des constantes et les  $b_i$  sont des suites données.

**Écriture matricielle** :  $U(m+1) = A U(m) + b(m)$

## Cas aux différences (2)

- Lorsque la matrice  $A$  associée est diagonalisable alors ce système se résout facilement

### Théorème

Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale de taille  $n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. La solution générale du système  $Z(m+1) = D Z(t)$  est donnée par

$$Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 \lambda_1^m \\ \vdots \\ C_n \lambda_n^m \end{pmatrix},$$

où les  $C_i$  sont des constantes.



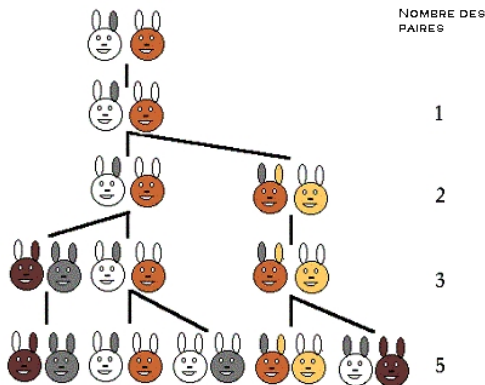
- Exemple :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -4x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + y_n \end{cases}$$

# Application au problème de Fibonacci : introduction (1)

- **Problème posé par Fibonacci (1202)** : supposons qu'un couple de lapin soit né au début de l'année. On suppose que :
  - La maturité sexuelle du lapin est atteinte après un mois qui est aussi la durée de gestation
  - Chaque portée comporte toujours un mâle et une femelle
  - Les lapins ne meurent jamais
- **Question** : Combien y aura-t-il de couples de lapins au bout d'un an ?

# Application au problème de Fibonacci : introduction (2)



- Soit  $f_n$  le nombre de couples de lapins au début du  $n$ ème mois.

$$f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, \dots, f_{12} = 144, \dots$$

- **Suite de Fibonacci** :  $f_0 = 1, f_1 = 1, \forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- **Question naturelle** : peut-on trouver une formule générale qui donne  $f_n$  en fonction de  $n$  ?
- **Réponse** : Oui si on sait diagonaliser une matrice

# Écriture matricielle de la suite de Fibonacci

- On a  $f_0 = 1, f_1 = 1, \forall n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$
- En posant  $V_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$  on a :

$$V_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A V_{n-1}$$

- En itérant, on obtient

$$V_n = A V_{n-1} = A^2 V_{n-2} = \dots = A^n V_0$$

## Théorème

Si  $A = P D P^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  diagonale, alors  $A^n = P D^n P^{-1}$  et  $D^n = \text{diag}(d_1^n, \dots, d_n^n)$ .

- La diagonalisation de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  donne

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

- D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

# Conclusion

- En multipliant  $A^n$  par  $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et en se rappelant que l'on a posé  $V_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^n V_0$ , on obtient finalement

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

- **Remarque** : le nombre  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  est l'un des nombres les plus mystérieux connu sous le nom de **nombre d'or** (le rectangle de dimension  $s$  et  $\phi s$  a une forme agréable)