

# Harmonisation en algèbre linéaire

Thomas Cluzeau

cluzeau@ensil.unilim.fr

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges

16 rue d'atlantis, Parc ester technopole

87068 Limoges CEDEX

Ce cours d'harmonisation est destiné aux élèves de première année de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL) nécessitant certains rappels en algèbre linéaire afin de pouvoir suivre au mieux les enseignements de mathématiques en tronc commun. L'objectif est de donner (ou rappeler) un certain nombre de notions d'algèbre linéaire, nécessaires pour suivre les cours suivants. Autant que de transmettre des connaissances, ce cours a pour but de donner un certain savoir-faire aux étudiants, de leur apprendre à manipuler les différentes notions. La plupart des résultats sont énoncés sans preuve et une grande partie du cours est réservée aux exemples et exercices.

Le cours est séparé en quatre chapitres :

1. Chapitre 1 : Espaces vectoriels et applications linéaires ;
2. Chapitre 2 : Matrices et Déterminants ;
3. Chapitre 3 : Résolution de systèmes linéaires ;
4. Chapitre 4 : Diagonalisation des endomorphismes.

Ce cours a été préparé essentiellement à partir des deux cours suivants :

- le cours d'harmonisation en algèbre linéaire donné par Driss Boularas (Université de Limoges) à l'ENSIL en 2005 ;
- le cours d'algèbre linéaire donné par Anne Fredet (Université de Paris 13 - IUT de Saint Denis) à l'IUT de Saint Denis.

Je les remercie tous les deux pour leur aide.

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels et applications linéaires

### 1.1 Espaces vectoriels

Les espaces vectoriels sont les objets de base de l'algèbre linéaire.

#### 1.1.1 Définition et sous-espaces vectoriels

**Définition 1.** *Un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $\mathbb{K}$ , ou  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, est un ensemble non-vide d'éléments, appelés vecteurs, muni d'une addition (loi de composition interne) et d'une multiplication par des éléments de  $\mathbb{K}$ , appelés scalaires, (loi de composition externe) satisfaisant certains axiomes.*

- addition  $+$  :  $\forall a, b \in E, a + b \in E$ ,
- multiplication par un scalaire  $\cdot$  :  $\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot a \in E$ .

*La définition précise des axiomes n'a pas d'intérêt pour ce cours.*

Dans ce cours, nous supposons que le corps  $\mathbb{K}$  est soit le corps des réels  $\mathbb{R}$  soit le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

#### Deux exemples fondamentaux :

1. le produit cartésien  $\mathbb{K}^n$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  muni des lois de composition suivantes :
  - addition :  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  ;
  - multiplication par un scalaire :  $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  ;
2. L'ensemble  $\mathcal{F}(I, E)$  des fonctions d'un ensemble non-vide  $I$  dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  muni des lois de composition suivantes :
  - addition :  $f + g : I \rightarrow E ; x \mapsto f(x) + g(x)$  ;
  - multiplication par un scalaire :  $\lambda \cdot f : I \rightarrow E ; x \mapsto \lambda f(x)$ .

### Autres exemples

- L'ensemble  $\mathbb{K}[x]$  des polynômes en une variable et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

**Définition 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $F$  un sous-ensemble non-vide de  $E$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si pour tout  $x, y \in F$  et pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , on a  $\lambda x + \mu y \in F$ .

### Exemples

- L'ensemble  $\mathcal{C}(I, E)$  des fonctions d'un ensemble non-vide  $I$  dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  continues sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$ .
- L'ensemble  $\mathcal{D}^p(I, E)$  des fonctions continûment dérivables sur  $I$  jusqu'à l'ordre  $p$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I, E)$ .
- L'ensemble  $\mathcal{D}^\infty(I, E)$  des fonctions infiniment dérivables est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}^p(I, E)$ .
- On a donc l'inclusion suivantes d'espaces vectoriels :

$$\mathcal{D}^\infty(I, E) \subset \dots \subset \mathcal{D}^p(I, E) \subset \mathcal{D}^{p-1}(I, E) \subset \dots \subset \mathcal{D}^0(I, E) = \mathcal{C}(I, E) \subset \mathcal{F}(I, E).$$

## 1.1.2 Combinaisons linéaires et familles génératrices

**Définition 3.** On appelle ( $\mathbb{K}$ -)combinaison linéaire d'éléments  $x_1, \dots, x_n$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tout vecteur de la forme  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  appartiennent à  $\mathbb{K}$ .

Notons que toute combinaison linéaire de  $E$  reste un élément de  $E$ .

**Définition 4.** On appelle combinaison linéaire d'éléments d'une partie  $G$  de  $E$  toute combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de  $G$ .

L'intérêt de cette définition est que l'ensemble  $G$  n'est pas nécessairement fini.

**Théorème et Définition 1.** Soit  $G$  un sous-ensemble non-vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On note  $CL(G)$  l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $G$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé sous-espace vectoriel engendré par  $G$ .

L'espace vectoriel  $CL(G)$  est aussi le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $G$ .

**Définition 5.** Soit  $G$  un sous-ensemble non-vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que  $G$  est une partie génératrice de  $E$  ou que  $G$  engendre  $E$  si  $E = CL(G)$ .

### Exemples

- $\mathbb{K}^n$  est engendré par  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ .

- Le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[x]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  est engendré par  $\{1, x, \dots, x^n\}$ .

**Définition 6.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $E$  est de dimension finie (sur  $\mathbb{K}$ ) si il est engendré par une partie  $G$  contenant un nombre fini d'éléments.

**Exemples**

- $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}_n[x]$  sont des espaces vectoriels de dimension finie.
- L'espace vectoriel  $\mathbb{K}[x]$  n'est pas de dimension finie.

### 1.1.3 Dépendance linéaire

**Définition 7.** Soit  $x_1, \dots, x_n$  des vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On dit que les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement dépendants ou liés si l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs sont linéairement indépendants ou libres.

Caractérisation : pour que les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  soient libres, il faut et il suffit que :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

**Exemple**

- Dans  $\mathbb{R}^2$ , les vecteurs  $(1, 2)$  et  $(1, -1)$  sont libres. Par contre les vecteurs  $(1, -2)$ ,  $(2, 3)$  et  $(1, 0)$  sont liés.

### 1.1.4 Bases et dimension d'un espace vectoriel

**Définition 8.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une base de  $E$  est une famille libre et génératrice de  $E$ .

**Exemples**

- La famille  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  est une base de  $\mathbb{K}^n$  appelée *base canonique* de  $\mathbb{K}^n$ .
- La famille  $\{1, x, \dots, x^n\}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[x]$ .
- La famille  $\{(1, 2), (1, -1)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

Caractérisation : La famille  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$  constitue une base de  $E$  si et seulement si tout élément  $x$  de  $E$  se décompose de manière unique sur  $\mathcal{B}$  c'est-à-dire si il existe un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  tel que  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ .

**Théorème 1.** Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

**Théorème et Définition 2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  possèdent le même nombre d'éléments que l'on appelle la dimension de  $E$ .

### Exemples

- $\mathbb{K}^n$  est de dimension  $n$ .
- $\mathbb{K}_n[x]$  est de dimension  $n + 1$ .
- La dimension d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectorielle dépend de  $\mathbb{K}$ . Le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même mais de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$  (base  $(1, i)$ ).

## 1.2 Applications linéaires

Dans cette section,  $E$  et  $F$  désignent deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels.

### 1.2.1 Définition, noyau et image

**Définition 9.** Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite linéaire si pour tout  $x, y$  dans  $E$  et pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbb{K}$ , on a  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ . Les applications linéaires sont aussi appelées morphismes. Lorsque  $F = \mathbb{K}$ , on parle de forme linéaire. Lorsque  $E = F$ , on parle d'endomorphisme.

### Exemples

- Pour  $1 \leq i \leq n$ , on appelle  $i$ -ème projection de  $\mathbb{K}^n$  et on note  $P_i$  l'application de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^n$  qui à  $(x_1, \dots, x_n)$  associe  $(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$ . C'est un endomorphisme.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . L'application de  $E$  dans  $E$  qui à  $x$  associe  $\lambda x$  est une application linéaire appelée *homothétie*.
- L'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y, z)$  associe  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  n'est pas linéaire.
- L'application de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $\phi$  associe  $\int_a^b \phi(t) dt$  est une forme linéaire.
- L'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y, z)$  associe  $x - z$  est linéaire. Par contre, les applications de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y, z)$  associent respectivement  $x^2 - z$  et  $yz$  ne sont pas linéaires.
- La dérivation de l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  dans l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est une application linéaire.

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Lorsque l'on a une application linéaire  $f$ , on définit le noyau  $\ker f := \{x \in E; f(x) = 0\}$  et l'image  $\text{im} f = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\}$ . Ceux sont des sous-espaces vectoriels respectivement de  $E$  et  $F$ . De plus, si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors on a  $\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\text{im} f)$ .

**Définition 10.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  telle que la dimension de  $\text{im} f$  soit finie. Alors cette dimension est appelée rang de l'application linéaire.

On rappelle qu'une application de  $E$  dans  $F$  est dite injective (resp. surjective) si tout élément de  $F$  admet au plus (resp. au moins) un antécédent dans  $E$ . Lorsque l'application est

injective et surjective c'est-à-dire lorsque tout élément de  $F$  admet un et un seul antécédent, on a une bijection.

**Définition 11.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

1.  $f$  est injective si et seulement si  $\ker f = \{0\}$ .
2.  $f$  est surjective si et seulement si  $\operatorname{im} f = F$ .

Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Lorsque  $E = F$ , on parle d'automorphisme. On dit que deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

### Exemples

- Le noyau de la projection  $P_1$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie dans l'exemple précédent est  $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ . Son image est l'ensemble  $\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ .
- L'application  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f((x, y, z)) = (y+z, x+z, x+y)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Elle est injective ( $\ker f = \{0\}$ ) et surjective (car tout triplet  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  admet pour antécédent  $(\frac{-x+y+z}{2}, \frac{x-y+z}{2}, \frac{x+y-z}{2})$ ). C'est donc un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2.** Soit  $f$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  supposés de dimension finie respectivement égale à  $n$  et  $m$ . Alors  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  est une base de  $F$ .

En conséquence, deux espaces vectoriels (de dimension finie) sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

## 1.2.2 Matrice d'une application linéaire

Une matrice  $n \times m$  est un tableau à  $n$  lignes et  $m$  colonnes. Exemple pour  $n = 2$  et  $m = 3$ , on peut considérer la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  qui sont supposés de dimensions finies respectivement égales à  $n$  et  $m$ . Soit  $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_m\}$  une base de  $F$ . Soit  $x$  un élément quelconque de  $E$ ; il s'écrit alors de manière unique

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

avec les  $x_i$  dans  $\mathbb{K}$ . Maintenant comme  $f$  est linéaire, on a

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n).$$

Par conséquent, pour connaître l'image d'un élément  $x$  quelconque de  $E$  il suffit de connaître les  $f(e_i)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $f(e_i) \in F$  donc

$$f(e_i) = \alpha_{i,1} f_1 + \dots + \alpha_{i,m} f_m,$$

avec les  $\alpha_{i,j}$  dans  $\mathbb{K}$ .

**Définition 12.** Avec les notations précédentes, la matrice  $n \times m$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de l'application linéaire  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$ .

On a alors

$$f(x) = x_1(\alpha_{1,1}f_1 + \cdots + \alpha_{1,m}f_m) + \cdots + x_n(\alpha_{n,1}f_1 + \cdots + \alpha_{n,m}f_m)$$

**Exemple :** Considérons l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f((x, y, z)) = (x - y, z)$ . La matrice de cette application linéaire relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Théorème 3.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à  $n$  et  $m$ . On note  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ .

## 1.3 Exercices sur le chapitre 1

### 1.3.1 Espaces vectoriels

**Exercice 1 :** Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ?

1.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = 0\}$  ?
2.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = z\}$  ?
3.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; xz = 0\}$  ?
4.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + z = 1\}$  ?

**Exercice 2 :** Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions continues  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Parmi les ensembles suivant, lesquels sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  ?

1.  $\{f \in \mathcal{F} ; f(0) = 0\}$  ?
2.  $\{f \in \mathcal{F} ; f(0) = f(1) = 0\}$  ?
3.  $\{f \in \mathcal{F} ; f(0) + f(1) = 0\}$  ?
4.  $\{f \in \mathcal{F} ; f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]\}$  ?
5. l'ensemble des fonctions paires de  $\mathcal{F}$  ?



6. l'ensemble des fonctions impaires de  $\mathcal{F}$  ?

**Exercice 3** : Montrer que l'ensemble des polynômes vérifiant  $P(1) = P'(1) = 0$  et  $P(2) = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}_3[x]$ .

**Exercice 4** : Soient  $u = (1, -2)$  et  $v = (3, -4)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $w = (5, 6)$  est combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ . De manière générale, montrer que tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ .

**Exercice 5** : Montrer que les vecteurs  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  et  $(0, 0, 1)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  ? Quelles sont les coordonnées du vecteur  $(3, 1, -4)$  dans cette base ?

**Exercice 6** : Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'ensemble  $\mathcal{E} = \{(x, y, z) ; x - y + z = 0\}$ . Montrer que c'est un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer une base de  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 7** : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  est un espace vectoriel. Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on définit alors leur somme

$$F + G = \{f + g ; f \in F, g \in G\}.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $F + G = E$  et  $F \cap G = \emptyset$ ;
2. tout élément  $x$  de  $E$  s'écrit de manière unique  $x = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$  ;
3.  $F + G = E$  et pour tout  $f \in F$  et  $g \in G$ ,  $f + g = 0$  implique  $f = g = 0$  ;

On dit alors que  $F$  et  $G$  sont *supplémentaires* (dans  $E$ ) et on note  $E = F \oplus G$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les ensembles suivants sont-ils supplémentaires ?

1. l'ensemble des triplets de la forme  $(a, b, 0)$  avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  et l'ensemble des triplets de la forme  $(0, 0, c)$  avec  $c$  dans  $\mathbb{R}$  ?
2. l'ensemble des triplets de la forme  $(a, b, 0)$  avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  et l'ensemble des triplets de la forme  $(a, 0, c)$  avec  $a$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$  ?

### 1.3.2 Applications linéaires

**Exercice 8** : Soit  $e_1, e_2, e_3$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(e_1) = 1$ ,  $f(e_2) = 2$  et  $f(e_3) = 3$ . Calculer  $f((x, y, z))$  pour  $(x, y, z)$  quelconque dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 9** : On considère l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f((a, b)) = 3a - 5b$ . Est-elle linéaire ? Si oui, donner son noyau et son image.

**Exercice 10** : Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 2 et de base  $(i, j)$ . On considère l'application linéaire donnée par  $f(i) = -3i - 2j$  et  $f(j) = 6i + 4j$ . Montrer que l'espace des vecteurs invariants par  $f$  (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs  $u$  tels que  $f(u) = u$ ) est engendré par le vecteur  $(3, 2)$ . Montrer que l'espace des vecteurs qui sont changés en leur opposé par  $f$  est nul.

**Exercice 11** : Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  donné par la matrice suivante dans la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner bases et dimensions du noyau et de l'image de  $f$ .
2. Soit  $v_1 = e_1 - e_2$ ,  $v_2 = e_1 + e_3$  et  $v_3 = e_2 - e_3$ . Montrer que  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Donner la matrice de  $f$  dans cette nouvelle base.

**Exercice 12** : Donner la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  la matrice des endomorphismes suivants :

1. rotation de centre O et d'angle  $\theta$  ;
2. homothétie de centre O et de rapport  $k$  ;
3. similitude de centre O, de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ .

**Exercice 13** : On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{K}_3[x]$  qui à un polynôme  $P$  associe le polynôme  $f(P) = P + (1 - x)P'$ . Soit  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{K}_3[x]$  et  $\mathcal{B}_2$  la base  $(1, 1 - x, 1 + x^2, 1 - x^3)$ . Quelle est la matrice de  $f$  relativement à  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_1$  ? Même question relativement à  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_1$  ?

# Chapitre 2

## Matrices et Déterminants

### 2.1 Matrices

#### 2.1.1 Définition

**Définition 13.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Une matrice  $A$  d'éléments de  $\mathbb{K}$  à  $n$  lignes et  $m$  colonnes ou matrice  $n \times m$  est un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

On note  $a_{i,j}$  l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$ . La matrice  $A$  est aussi notée  $(a_{ij})_{i,j}$ . On note  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices  $n \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

#### Exemples :

- matrice nulle ;
- matrice d'une application linéaire relativement à des bases ;
- matrice associée à un système linéaire ;
- matrice colonne associée aux coordonnées d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel de dimension finie.

#### Forme particulière de matrices :

- matrice carrée ;
- matrice diagonale ;
- matrice triangulaire supérieure ou inférieure ;
- matrice colonne ou matrice ligne.

## 2.1.2 Opérations sur les matrices

**Théorème 4.** L'ensemble  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  muni de :

1.  $(a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$
2.  $\lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$

est un espace vectoriel de dimension  $nm$ .

Une base de  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est donnée par  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \right)$

L'espace  $\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^{nm}$ .

**Corollaire 1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions  $n$  et  $m$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension  $nm$ .

### Autres opérations

- Transposition : on échange les lignes et les colonnes. Notation :  ${}^t A$  ou  $A^T$  ;
- Produit scalaire entre un vecteur ligne et un vecteur colonne :

$$\left( x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

## 2.1.3 Produit de matrice

**Définition 14.** Soient  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_{m,l}(\mathbb{K})$  deux matrices telles que le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ . Le produit  $C = AB = (c_{ij})_{i,j}$  des matrices  $A$  et  $B$  est alors défini par  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ . Autrement dit, l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  dans  $AB$  est le produit scalaire de la ligne  $i$  de  $A$  par la colonne  $j$  de  $B$ .

Ce produit est non-commutatif  $AB \neq BA$  d'autant plus que  $AB$  peut être défini sans que  $BA$  le soit (donner exemples).

**Application :** soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimensions respectives  $n, m$  et  $l$  et munis respectivement des bases  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$ . Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications linéaires. Soit  $M_f$  (resp.  $M_g$ ) la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$ ). Alors la matrice de l'application linéaire  $h = g \circ f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_G$  est  $M_h = M_g M_f$ .

(Exemple : retour sur l'exercice sur rotation, homothétie et similitude)

## 2.1.4 Matrice identité (unité) et matrices inversibles

On note  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$ .

**Définition 15.** La matrice identité  $I_n$  (de dimension  $n$ ) est la matrice satisfaisant

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), I_n A = A I_n = A.$$

Cette matrice est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Définition 16.** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est inversible si il existe  $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $X A = A X = I_n$ . Si elle existe, la matrice  $X$  est unique; elle est appelée l'inverse de  $A$  et notée  $A^{-1}$ .

**Exemple :** si  $a d - b c \neq 0$ , alors  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a d - b c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

## 2.1.5 Application : changement de base (matrice de passage)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On a alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, e'_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} e_j,$$

avec les  $a_{j,i}$  uniques dans  $\mathbb{K}$ .

Un élément quelconque  $x$  de  $E$  s'écrit alors de manière unique  $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$  mais aussi  $x = \sum_{i=1}^n \xi'_i e'_i$ . Il vient alors

$$\sum_{j=1}^n \xi_j e_j = \sum_{i=1}^n \xi'_i \left( \sum_{j=1}^n a_{j,i} e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{j,i} \xi'_i \right) e_j.$$

D'où  $\xi_j = \sum_{i=1}^n a_{j,i} \xi'_i$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Notons  $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ ,  $X' = \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ .

On a alors  $X = P X'$ .

De même avec  $e_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} e'_j$  et  $Q = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ , on obtient  $X' = Q X$ .

Finalement  $X = (P Q) X$  et  $X' = (Q P) X'$ ; d'où  $P Q = Q P = I_n$ , i.e.,  $Q = P^{-1}$ .

**Définition 17.** Avec les notations précédentes, la matrice  $P$  est appelée matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ ; ses colonnes sont les coefficients de la décomposition des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

On a aussi  $X' = P^{-1} X$  donc  $P^{-1}$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

**Matrices de passage et matrices d'applications linéaires :** soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  deux bases de  $E$ . Soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_E$  à  $\mathcal{B}'_E$ . Soient  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  deux bases de  $F$ . Soit  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_F$  à  $\mathcal{B}'_F$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Soit  $M$  (resp.  $M'$ ) la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}'_E$  et  $\mathcal{B}'_F$ ).

Soit  $x$  un vecteur de  $E$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  (resp.  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ ) le vecteur de ses coordonnées

dans  $\mathcal{B}_E$  (resp.  $\mathcal{B}'_E$ ). Soit  $y$  un vecteur de  $F$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  (resp.  $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ ) le vecteur de ses coordonnées dans  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}'_F$ ). On a alors les relations suivantes :

$$X = P X', Y = Q Y', Y = M X, Y' = M' X'.$$

Il vient alors  $Q Y' = M P X'$  c'est-à-dire  $Q M' X' = M P X'$  et finalement

$$M' = Q^{-1} M P.$$

La relation précédente donne le lien entre deux matrices qui représentent une même application linéaire. On remarque que dans le cas où  $Q = P$ , on obtient  $M' = P^{-1} M P$ .

## 2.2 Déterminants

### 2.2.1 Déterminants d'ordre 2 et 3

**Définition 18.** Soient  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  deux vecteurs de  $\mathbb{K}^2$ . On appelle déterminant de  $x$  et  $y$  le scalaire

$$\det(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Géométriquement le déterminant de  $x$  et  $y$  représente l'aire algébrique du parallélogramme de cotés  $x$  et  $y$  (faire un dessin).

**Définition 19.** Soient  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  et  $z = (z_1, z_2, z_3)$  trois vecteurs de  $\mathbb{K}^3$ . On appelle déterminants de  $x$ ,  $y$  et  $z$  le scalaire

$$\det(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1).$$

Géométriquement le déterminant de  $x$ ,  $y$  et  $z$  représente le volume algébrique du tétraèdre d'arêtes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

**Propriétés :**

1. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On a  $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$  ;

2.  $\det(y, x) = -\det(x, y)$  ;

3. Si l'on échange lignes et colonnes, on ne change pas le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4. Un déterminant d'ordre 3 peut se décomposer, selon une ligne quelconque, en déterminants d'ordre 2 : par exemple, selon la première ligne

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

### 2.2.2 Déterminants d'ordre $n$

Dans la suite nous parlerons indifféremment du déterminant des  $n$  vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ ,

$\dots, u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$  ou du déterminant de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ .

La définition récursive du déterminant que nous donnons généralise la dernière propriété donnée ci-dessus pour les déterminants d'ordre 3.

**Définition 20.** On appelle *déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),$$

et on note  $\det(A)$  le scalaire défini par récurrence comme suit :

1. Si  $n = 1$ , alors  $A = (a)$  est une matrice  $1 \times 1$  et  $\det(A) = a$  ;
2. Si  $n > 1$ , on pose

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \Delta_{1,1} + \dots + (-1)^{i+1} a_{1,i} \Delta_{1,i} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \Delta_{1,n},$$

où  $\Delta_{1,i}$  est le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  notée  $A_{1,i}$  qui est obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne  $i$  de  $A$ .

**Exemple :** Calculer  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ .

**Propriétés :**

1.  $\det(I_n) = 1$  ;
2. le déterminant de  $A$  peut être développé par rapport à une ligne quelconque :

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{j,1} \Delta_{j,1} + \dots + (-1)^{i+j} a_{j,i} \Delta_{j,i} + \dots + (-1)^{n+j} a_{j,n} \Delta_{j,n}$$

où  $\Delta_{j,i}$  est le déterminant de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  notée  $A_{j,i}$  qui est obtenue en supprimant la ligne  $j$  et la colonne  $i$  de  $A$ . Le nombre  $C_{j,i} = (-1)^{i+j} \Delta_{j,i}$  s'appelle le cofacteur de  $a_{j,i}$ . La matrice  $A_{j,i}$  est la comatrice de  $a_{j,i}$  ;

3. L'application  $\det$  est une forme linéaire par rapport à chaque ligne ;
4. Si deux lignes de  $A$  sont égales, alors  $\det(A) = 0$  ;
5. Le déterminant change de signe si l'on permute deux lignes ;
6. Le déterminant reste inchangé si l'on ajoute à une ligne de  $A$  une combinaison linéaire des autres lignes ;



7.  $\det(A) = \det({}^t A)$ . Par conséquent, on peut remplacer "ligne" par "colonne" dans les propriétés précédentes ;
8.  $\det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\right) = \det(A) \det(C)$  ;
9.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

### 2.2.3 Application : Calcul de l'inverse d'une matrice

**Théorème 5.** *Une matrice carrée  $A$  de taille  $n$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  une matrice carrée de taille  $n$ . Supposons que  $A$  est inversible c'est-à-dire  $\det(A) \neq 0$ . Son inverse est alors donnée par la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \cdots & C_{n,n} \end{pmatrix}^T,$$

où  $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{j,i}$  est le cofacteur de  $a_{i,j}$ .

**Exemple :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . On a  $\det(A) = -2 \neq 0$  donc  $A$  est inversible. On calcule  $C_{1,1} = (-1)^{1+1}5 = 5$ ,  $C_{1,2} = (-1)^{1+2}4 = -4$ ,  $C_{2,1} = (-1)^{2+1}3 = -3$  et  $C_{2,2} = (-1)^{2+2}2 = 2$ . On a alors  $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

## 2.3 Exercices sur le chapitre 2

### 2.3.1 Matrices

**Exercice 1 :** Dans les cas suivants, calculer, si possible, les produits de matrices  $AB$  et  $BA$  :

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  ;
2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ;
3.  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $B = (3 \ 2 \ 1 \ 0)$  ;

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2** : on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ ;
2. Montrer que  $A^2 = A + 2I_3$ ;
3. En déduire une matrice  $B$  telle que  $AB = I_3$ .

**Exercice 3** : soit  $P(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!})$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Développer  $P$ ;
2. Calculer  $A^2, A^3, A^4, A^n$ ;
3. Soit  $M = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$ . Montrer que  $M$  est inversible et donner son inverse.

**Exercice 4** : on considère la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  l'application linéaire dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de  $\ker f$  et de  $\text{im} f$ ;
2.  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?
3. Soit  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (-1, 1, 0)$  et  $u_3 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Quelle est la matrice  $A'$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ ?
5. Quelle est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}'$ ?

### 2.3.2 Déterminants

**Exercice 5** : Calculer les déterminants suivants

1.  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ;
2.  $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ .

**Exercice 6** : Soient  $A$  et  $B$  deux matrices  $3 \times 3$  qui ne diffèrent que par la première ligne. Montrer que  $\det(A + B) = 4(\det(A) + \det(B))$ .

**Exercice 7** : On considère la matrice  $M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & b & a \\ 1 + a + b & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le déterminant de  $A(a, b)$  en fonction de  $a$  et  $b$ ;
2. On définit le rang d'une matrice  $A$  de taille  $n$  comme le plus grand entier  $r$  inférieur ou égal à  $n$  tel qu'il existe une matrice carrée de taille  $r$  extraite de  $A$  ayant un déterminant non-nul. Donner en fonction des valeurs de  $a$  et  $b$ , le rang de la matrice  $A(a, b)$ .

**Exercice 8** : Calculer l'inverse de  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ .



# Chapitre 3

## Résolution de systèmes linéaires

### 3.1 Systèmes de $n$ équations à $p$ inconnues

**Définition 21.** *Un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues est un système de la forme*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Les  $a_{i,j}$  sont les coefficients du système qui appartiennent à un corps  $\mathbb{K}$ ,  $x_1, \dots, x_p$  sont les inconnues et  $b_1, \dots, b_n$  les coefficients du second membre.

Un système est dit homogène si son second membre est nul c'est-à-dire si tous les  $b_i$  sont nuls.

**Propriétés :**

- Les solutions d'un système homogène de  $n$  équations à  $p$  inconnues forment un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$  ;
- Si  $x$  et  $y$  sont deux solutions du système, alors  $x - y$  est une solution du système homogène associé ;
- Si  $x$  est une solution du système, alors on obtient toutes les solutions du système en ajoutant à  $x$  les solutions du système homogène associé. L'ensemble des solution d'un système linéaire est donc un sous espace affine de  $\mathbb{K}^p$  passant par  $x$  et de direction l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Un tel système peut se réécrire de manière matricielle

$$Ax = b,$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K}), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $A$  soit la matrice d'une application linéaire, que  $x$  (resp.  $b$ ) soit le vecteur des coordonnées d'un vecteur  $u$  (resp.  $v$ ). Dans ce cas on a

$$Ax = b \Leftrightarrow f(u) = v.$$

Deux cas se présentent alors :

1.  $v \notin \text{im} f : f(u) = v$  n'a alors pas de solutions et par conséquent le système n'a pas de solutions ;
2.  $v \in \text{im} f : f(u) = v$  admet au moins une solution et par conséquent le système admet, lui aussi, au moins une solution.
  - Si  $\ker f \neq \{0\}$ , alors le système admet une infinité de solutions. En effet, dans ce cas, si  $w \in \ker f$  et  $u$  vérifie  $f(u) = v$ , alors on a  $f(u + \lambda w) = v$  quelque soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  ;
  - Si  $\ker f = \{0\}$ , alors le système admet une unique solution.

## 3.2 Méthodes de résolution d'un système carré $Ax = b$

On suppose dans cette section que le nombre d'inconnues  $p$  est égal au nombre  $n$  d'équations.

### 3.2.1 Cas où $\det(A) \neq 0$

La matrice  $A$  est inversible : le système admet une solution unique

$$x = A^{-1}b.$$

**Exemple** : Résoudre en inversant sa matrice le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

Parfois le calcul de l'inverse peut s'avérer inutile car il existe des méthodes plus directes.

**Définition 22.** Un système  $Ax = b$  est dit de Cramer s'il admet une solution unique (ce qui est équivalent à  $\det(A) \neq 0$ ). Dans ce cas la solution  $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  est donnée par les formules de Cramer suivantes :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

où  $A_i$  est la matrice obtenue en remplaçant la  $i$ -ème colonne de  $A$  par  $b$ .

**Exemple** : Résoudre en utilisant la méthode de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 3 \\ x + y - 3z = -2 \\ 2x - y + 7z = 7 \end{cases}$$

Pour de "grandes" ou "difficiles" matrices, le calcul de tous ces déterminants s'avère pénible et d'autres méthodes sont plus pertinentes (substitution, Gauss, décomposition LU, Cholesky, décomposition QR, ... : Cf TC1-07 au second semestre)

### 3.2.2 Cas où $\det(A) = 0$

**Définition 23.** On appelle rang d'une matrice  $A$  de taille  $n$  le plus grand entier  $r$  inférieur ou égal à  $n$  tel qu'il existe une matrice carrée de taille  $r$  extraite de  $A$  ayant un déterminant non-nul.

En particulier si  $\det(A) \neq 0$ , alors le rang de  $A$  est égal à  $n$ .

Soit  $r < n$  le rang de la matrice  $A$ . En re-numérotant si nécessaire les inconnues et coefficients, on peut supposer que

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

En notant  $c_i$  la  $i$ -ème colonne de  $A$ , on a alors que  $c_{r+1}, \dots, c_n$  appartiennent à l'espace vectoriel  $\langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$  engendré par  $(c_1, \dots, c_r)$ . Le système admet donc une solution si et seulement si  $b$  appartient à  $\langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$ . Notons

$$N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & b_r \\ a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & b_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,r} & b_n \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \{r+1, \dots, n\}, \quad N_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,r} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} & b_r \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,r} & b_i \end{pmatrix}.$$

Les deux cas suivants se présentent alors :

1. Il existe  $i \in \{r+1, \dots, n\}$  tel que  $\det(N_i) \neq 0$ . Dans ce cas la famille  $(c_1, \dots, c_r, b)$  est libre et le système n'admet pas de solutions ;
2. Pour tout  $i \in \{r+1, \dots, n\}$ ,  $\det(N_i) = 0$ . Dans ce cas  $b \in \langle (c_1, \dots, c_r) \rangle$  et le système admet une infinité de solutions. En effet, cela signifie que quelque soit le choix des  $x_i$  pour  $i \in \{r+1, \dots, n\}$ , le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,r}x_r = b_1 - x_{r+1}a_{1,r+1} - \dots - a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{r,1}x_1 + \dots + a_{r,r}x_r = b_r - x_{r+1}a_{r,r+1} - \dots - a_{r,n}x_n \end{cases}$$

admet une unique solution (donnée par les formules de Cramer). Les inconnues  $x_1, \dots, x_r$  sont alors appelées les inconnues principales du système.

### 3.3 Exercices sur le chapitre 3

**Exercice 1 :** Résoudre en calculant l'inverse de sa matrice le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

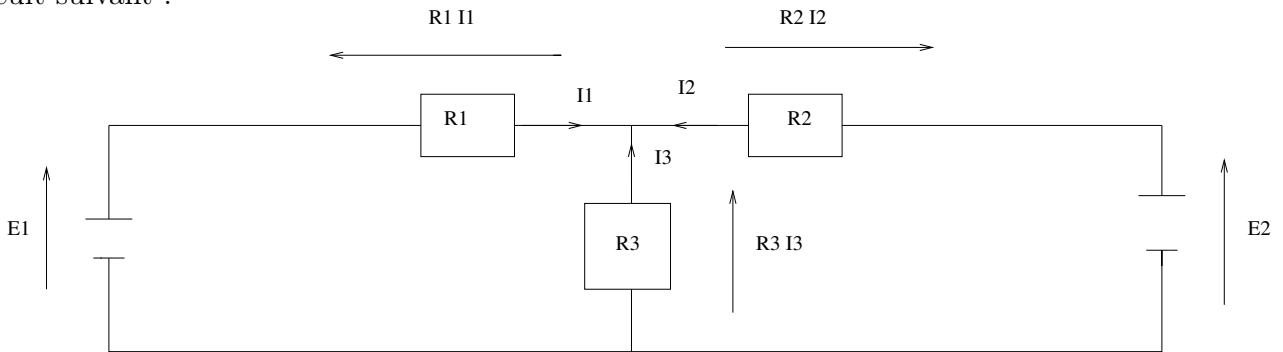
**Exercice 2 :** Résoudre en utilisant les formules de Cramer le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

**Exercice 3 :** Résoudre en utilisant les formules de Cramer puis en utilisant la substitution le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 8 \\ 3x + 3y + z = 12 \end{cases}$$

**Exercice 4 :** En utilisant la loi des noeuds et la loi des mailles trouver  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  dans le circuit suivant :



**Exercice 5 :** Résoudre

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

**Exercice 6 :** Résoudre

$$\begin{cases} x + y + 3z + 5t = 1 \\ x + 2y + 5z + 9t = 2 \\ 2x + 3y + 8z + 14t = 1 \end{cases}$$



# Chapitre 4

## Diagonalisation des endomorphismes

On a vu au chapitre 2 que la forme de la matrice d'un endomorphisme dépend de la base choisie. La question qui se pose alors est la suivante : comment choisir la base de sorte que la forme de la matrice soit la plus simple possible, *e. g.*, diagonale. Dans ce chapitre nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme puisse être représenté par une matrice diagonale. Nous appliquerons ensuite ceci à la résolution de systèmes différentiels et aux différences linéaires.

### 4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

**Définition 24.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur  $v$  non-nul de  $E$  tel que  $f(v) = \lambda v$ . On appelle vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  un vecteur  $v$  non-nul de  $E$  tel que  $f(v) = \lambda v$ .

**Théorème et Définition 3.** L'ensemble constitué des vecteurs propres associés à une même valeur propre  $\lambda$  et du vecteur nul est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé sous-espace propre associé à  $\lambda$ ; on le note  $E_\lambda$ .

**Exemples :**

1. La première projection  $P_1$  de  $\mathbb{K}^3$  admet comme valeurs propres 1 et 0;  $E_1 = ((1, 0, 0))$  et  $E_0 = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$ ;
2. L'homothétie de  $E$  de centre  $O$  et de rapport  $k \neq 0$  admet pour unique valeur propre  $k$  et on a  $E_k = E$ ;
3. Attention au corps de base  $\mathbb{K}$ . La rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta \neq k\pi$  n'a pas de valeur propre dans  $\mathbb{R}$ . En revanche, sur  $\mathbb{C}$ , cette dernière coïncide avec l'homothétie de rapport  $\exp(i\theta)$  et admet donc une valeur propre à savoir  $\exp(i\theta)$ .

**Propriétés :**

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  des valeurs propres de  $f$  et soient  $v_1, \dots, v_m$  des vecteurs propres associés. Alors, la famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est libre ;
2. Si  $E$  est de dimension finie égale à  $n$ , alors  $f \in \mathcal{L}(E)$  admet au plus  $n$  valeurs propres.

**Théorème 6.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie égale à  $n$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres. La matrice de  $f$  dans cette base est diagonale.*

## 4.2 Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un endomorphisme s'obtiennent comme racines d'un polynôme appelé polynôme caractéristique.

**Définition 25.** *Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  un endomorphisme ayant pour matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Alors on appelle valeur (resp. vecteur) propre de  $A$  une valeur (resp. un vecteur) propre de  $f$ .*

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . Ceci signifie qu'il existe  $v \in \mathbb{K}^n$  non-nul tel que  $Av = \lambda v$ , i. e.,  $(A - \lambda I_n)v = 0$  ce qui est équivalent à  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . En effet, d'après ce que l'on a vu au chapitre 3, si  $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ , alors le système  $(A - \lambda I_n)v = 0$  est de Cramer et admet une unique solution qui est le vecteur nul.

**Définition 26.** *On appelle polynôme caractéristique d'une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  le polynôme*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

**Exemple :** le polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  est  $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ .

**Définition 27.** *On dit que deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .*

D'après ce que l'on a vu au chapitre 2, les matrices d'une même application linéaire dans deux bases distinctes sont semblables. La matrice  $P$  apparaissant dans la définition ci-dessus est alors la matrice de passage d'une base à l'autre. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables :  $B = P^{-1}AP$ . On a alors

$$B - \lambda I_n = P^{-1}AP - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P,$$

et on conclut donc que  $\det(B - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$  car  $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$ . Par conséquent, le polynôme caractéristique de la matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie et on parle donc de polynôme caractéristique d'une application linéaire.

**Théorème 7.** *Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Les valeurs propres de  $f$  sont les racines dans  $\mathbb{K}$  du polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque.*

*Si ce polynôme caractéristique admet  $n$  racines distinctes, alors il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres et la matrice de  $f$  dans cette base est diagonale.*

**Exemple** :  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 4.3 Endomorphismes diagonalisables

Lorsque  $f \in \mathcal{L}(E)$  n'admet pas  $n$  valeurs propres distinctes c'est-à-dire lorsque que son polynôme caractéristique admet au moins une racine multiple, alors il n'existe pas nécessairement une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

**Définition 28.** *Un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres (i. e., dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale).*

**Théorème 8.** *Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

1. *Le polynôme caractéristique de  $f$  a toutes ses racines dans  $\mathbb{K}$  ;*
2. *Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  les valeurs propres de  $f$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_s$ . Soient  $d_1, \dots, d_s$  les dimensions respectives de  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $m_i = d_i$ .*

**Exemple** :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque** : Forme de Jordan (lorsque 1 est vérifié mais pas 2).  
Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe  $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  inversible telle que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_m \end{pmatrix},$$

où les  $J_i$  sont appelés blocs de Jordan : ceux sont des matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valeurs propres de  $A$ .

## 4.4 Application : résolution de systèmes différentiels (et aux différences) linéaires

**Définition 29.** *Un système différentiel linéaire à coefficients constants est un système de la forme*

$$\begin{cases} y_1(t)' = a_{1,1} y_1(t) + a_{1,2} y_2(t) + \cdots + a_{1,n} y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t)' = a_{n,1} y_1(t) + a_{n,2} y_2(t) + \cdots + a_{n,n} y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

où les  $y_i(t)$  sont des fonctions inconnues de la variable  $t$ , les  $a_{i,j}$  sont des constantes et les  $b_i(t)$  sont des fonctions données de la variable  $t$ .

Un système différentiel linéaire s'écrit sous forme matricielle

$$Y(t)' = AY(t) + b(t),$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Nous nous restreindrons ici au cas où le système est homogène c'est-à-dire  $b(t) = 0$ . Dans le cas contraire on obtient la solution générale du système en additionnant une solution particulière à la solution générale du système homogène associé.

Soit  $B$  une matrice semblable à  $A$  (notons  $B = P^{-1}AP$ ) et soit  $Z(t)$  une solution de  $Z(t)' = BZ(t)$ . On a alors  $Y = PZ$  solution de  $Y(t)' = AY(t)$ . L'intérêt est que si  $B$  est diagonale, alors le système  $Z(t)' = BZ(t)$  est simple à résoudre.

**Théorème 9.** *Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale de taille  $n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. La solution générale du système  $Z(t)' = DZ(t)$  est donnée par*

$$Z(t) = \begin{pmatrix} C_1 \exp(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ C_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix},$$

où les  $C_i$  sont des constantes.

**Exemple :** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases}$$

**Définition 30.** Un système aux différences linéaire à coefficients constants est un système de la forme

$$\begin{cases} u_1(m+1) = a_{1,1}u_1(m) + a_{1,2}u_2(m) + \cdots + a_{1,n}u_n(m) + b_1(m) \\ \vdots \\ u_n(m+1) = a_{n,1}u_1(m) + a_{n,2}u_2(m) + \cdots + a_{n,n}u_n(m) + b_n(m) \end{cases}$$

où les  $u_i$  sont des suites inconnues (fonctions de la variable discrète  $m$ ), les  $a_{i,j}$  sont des constantes et les  $b_i$  sont des suites données.

**Écriture matricielle :**  $U(m+1) = AU(m) + b(m)$ .

Lorsque la matrice  $A$  associée est diagonalisable alors ce système se résout facilement en utilisant le résultat suivant :

**Théorème 10.** Soit  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la matrice diagonale de taille  $n$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sur la diagonale. La solution générale du système  $Z(m+1) = DZ(m)$  est donnée par

$$Z(m) = \begin{pmatrix} C_1 \lambda_1^m \\ \vdots \\ C_n \lambda_n^m \end{pmatrix},$$

où les  $C_i$  sont des constantes.

**Exemple :** Résoudre le système aux différences suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -4x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + y_n \end{cases}$$

**Remarque :** Lorsque la matrice du système différentiel ou aux différences n'est pas diagonalisable alors le calcul de la forme de Jordan permet de s'en sortir car les analogues des théorèmes 9 et 10 existent.

## 4.5 Exercices sur le chapitre 4

**Exercice 1 :** Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2 :** Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3 :** Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4** : Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$$

**Exercice 5** : Résoudre le système aux différences suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = y_n \end{cases}$$