S. Vinatier

Polynômes de Bernouilli et intégration

1. La relation de récurrence donne $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$.
2. On trouve de même $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$, $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$, $B_3(X) = X(X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2})$.
3. Soit $n \geq 1$, on déduit de la définition de B_n que $B_n(0) = b_n$ et que $B_n(1) = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ pour $n \geq 2$, on a bien $B_n(0) = B_n(1) = b_n$ si $n \geq 2$.
4. Soit $n \geq 1$, par définition on a $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$ donc
$$B_n'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \binom{n}{k} b_k X^{n-1-k} \quad ,$$
car la dérivée du cœfficient constant est nulle. Or $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$, d'où $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$
5. Soit $n \geq 1$, alors en utilisant le résultat précédent au rang $n+1$:
$$\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\Big[B_{n+1}(t)\Big]_0^1 = \frac{1}{n+1}\Big(B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)\Big) = 0 \quad ,$$
car $n \geq 1$ donc $n+1 \geq 2$ et on peut appliquer le résultat de la question 3.
6. Montrons la propriété cherchée par récurrence sur $n \geq 1$:
   - $B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = 1 \cdot X^0$: la propriété est vraie au rang $n = 1$;
   - supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. Le polynôme $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) - (n+1)X^n$ vaut $B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$ en $X = 0$ (car $n \geq 1$ donc $n+1 \geq 2$) et a pour dérivée
   $$\Big(B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) - (n+1)X^n\Big)' = (n+1)\Big(B_n(X+1) - B_n(X)\Big) - n(n+1)X^{n-1} \quad ,$$
   qui est le polynôme nul d'après l'hypothèse de récurrence. Le polynôme considéré est donc lui aussi égal au polynôme nul, ce qui entraîne que la propriété est vraie au rang $n+1$.

   En conclusion on a, pour tout $n \geq 1$: $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
7. Soient $n \geq 2$ et $m \geq 0$ des entiers. D'après la formule de la question précédente, on a
$$B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0) = \sum_{k=0}^{m} \Big(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\Big) = (n+1)\sum_{k=0}^{m} k^n \quad ,$$

d'où le résultat demandé. Remarque : on utilise la formule de la question précédente en $n+1$, il suffit donc d'avoir $n \geq 0$ pour que le résultat soit valide (on vérifie aisément que la formule est vraie pour $n=0$ et $n=1$: $\sum_{k=0}^{m} k^0 = m+1$, $\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$).

Pour $n=2$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \tfrac{1}{3}\Big(B_3(m+1)-B_3(0)\Big) = \tfrac{1}{3}(m+1)\Big((m+1)^2-\tfrac{3}{2}(m+1)+\tfrac{1}{2}\Big) = \tfrac{1}{6}m(m+1)(2m+1) \ .$$

8. a) D'après la propriété admise en préambule de cette question, il suffit de montrer que la suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $A_0(X)=1$ et, pour tout $n \geq 1$, $A_n'(X) = nA_{n-1}(X)$, $\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ceci est immédiat ; par unicité de la suite vérifiant ces propriétés, on a donc $(A_n)_n = (B_n)_n$.

   b) D'après le a), on a $(-1)^n B_n(1-X) = B_n(X)$ pour tout entier n. Soit $n \geq 1$, il vient :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$$

   d'où, en évaluant en $X=1$, $(-1)^n b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k$. Si $n \geq 2$ ceci entraîne $(-1)^n b_n = b_n$; si de plus n est impair alors $-b_n = b_n$, c'est-à-dire $b_n = 0$. On a bien montré que pour tout $p \geq 1$, $b_{2p+1} = 0$.

9. a) Soit $n \in [2\,;2p+1]$ entier, alors $f^{(n-1)}$ et B_n sont continûment dérivables. En intégrant par parties et en utilisant le résultat de la question 4, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^{(n)}(t)B_n(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[f^{(n-1)}(t)B_n(t)\Big]_0^1 - n\int_0^1 f^{(n-1)}(t)B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= b_n\Big(f^{(n-1)}(1)-f^{(n-1)}(0)\Big) - n\int_0^1 f^{(n-1)}(t)B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \ ,\end{aligned}$$

   à l'aide du résultat de la question 3 (ici $n \geq 2$).

   b) Soit $k \in [1\,;p]$ entier alors $2k+1 \in [3\,;2p+1]$, d'où par a) et 8.b) :

$$\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)B_{2k+1}(t)\,\mathrm{d}t = -(2k+1)\int_0^1 f^{(2k)}(t)B_{2k}(t)\,\mathrm{d}t \ ;$$

   comme $2k \in [2\,;2p+1]$, on peut appliquer a) une deuxième fois, ce qui donne le résultat cherché.

   c) **Attention : il y avait deux erreurs dans la formule de l'énoncé** (sans compter celle sur le nom d'un des deux auteurs, présente dans le sujet original). La première formule d'Euler-Maclaurin est l'égalité :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

   où p entier non nul et f de classe $\mathcal{C}^{2p+1}$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

   Montrons la formule par récurrence sur $p \geq 1$:

- pour $p=1$, on part du membre de droite de l'égalité :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{6}\frac{f'(1)-f'(0)}{2}-\frac{1}{6}\int_0^1 f^{(3)}(t)B_3(t)\,\mathrm{d}t \ \ ;$$

en utilisant 9.a) et la valeur de b_2 calculée question 1, ceci est égal à :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\int_0^1 f'(t)B_1(t)\,\mathrm{d}t \ \ ;$$

en utilisant le début de l'intégration par parties de 9.a) (1ère ligne, valable pour $n\geq 1$), on obtient :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\Big[f(t)B_1(t)\Big]_0^1+\int_0^1 f(t)B_0(t)\,\mathrm{d}t \ \ ,$$

ce qui donne $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ comme souhaité en utilisant les expressions de B_0 et B_1.
- On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^{2(p+1)+1}$ et la propriété vraie pour $p\geq 1$. On part à nouveau du membre de droite de l'égalité :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\sum_{k=1}^{p+1} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!}-\frac{1}{(2p+3)!}\int_0^1 f^{(2p+3)}(t)B_{2p+3}(t)\,\mathrm{d}t \ \ ;$$

en utilisant 9.b), il est égal à :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}-\sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!}-\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)\,\mathrm{d}t \ \ ,$$

ce qui donne $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ comme souhaité en utilisant l'hypothèse de récurrence.

La première formule d'Euler-Maclaurin est donc démontrée.

Questions subsidiaires

On a admis deux propriétés au cours de l'exercice, démontrez-les ! (sans regarder la page suivante...)

1. Établir l'existence et l'unicité d'une suite de nombres rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad \forall\, n\geq 2\,, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}u_k=0 \ \ .$$

2. Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes à cœfficients rationnels $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les conditions :

$$U_0(X)=1 \quad \text{et} \quad \forall\, n\geq 1\,, \quad U_n'(X)=nU_{n-1}(X)\ , \quad \int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t=0 \ \ .$$

Réponses aux questions subsidiaires

1. Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, par changement d'indice, l'équivalence :

$$\forall\, n \geq 2\,, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} u_k = 0 \Longleftrightarrow \forall\, m \geq 0\,, \quad \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+2}{k} u_k = 0 \ \ .$$

   Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait donc aux conditions voulues si et seulement si :

$$u_0 = 1 \quad \text{ et } \quad \forall\, m \geq 0\,, \quad u_{m+1} = -\frac{1}{m+2} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+2}{k} u_m \ \ ,$$

   ce qui définit clairement une unique suite de rationnels.

2. Les conditions :

$$U_0(X) = 1 \quad \text{ et } \quad \forall\, n \geq 1\,, \quad U_n'(X) = nU_{n-1}(X)\ , \quad \int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   définissent par récurrence une unique suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à cœfficients rationnels. En effet, $U_0(X) = 1$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$; supposons U_{n-1} donné dans $\mathbb{Q}[X]$ pour un entier $n \geq 1$, alors $U_n(X)$ est une primitive de $nU_{n-1}(X)$, donc existe et appartient lui aussi à $\mathbb{Q}[X]$; de plus la primitive est unique à une constante près. Mais il n'y a qu'une valeur de la constante pour laquelle la propriété $\int_0^1 U_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ est vraie, donc U_n est uniquement définie à partir de U_{n-1}. On obtient donc par récurrence l'existence et l'unicité de la suite $(U_n)_n$ vérifiant les conditions demandées.