IUFM du Limousin — 2007-08

PLC1 Mathématiques

S. Vinatier — Exercices

TD4 - Suites numériques

Exercice 1 (article forum web)

1. Montrer à l'aide du théorème de Cesaro (TD 2 exercice 3) que si (w_n) est une suite telle que $w_{n+1} - w_n$ admet une limite $\ell \neq 0$, alors $w_n \sim \ell n$.
2. On souhaite étudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. On pose $f(x) = \ln(1 + x)$ pour $x > -1$.
   a) Dresser le tableau de variations de f ; vérifier que sa fonction dérivée f' est monotone, que $f'(x) > 1$ pour $x \in]-1, 0[$ et que $f([0, +\infty[) \subseteq [0, +\infty[$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
   b) On pose $g(x) = f(x) - x$ pour $x > -1$. Montrer que $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et que $g(x) < 0$ pour $x \neq 0$.
   c) Déterminer les points fixes de f ; en déduire que la suite (u_n) n'est définie que lorsque $u_0 > 0$.
   d) Tracer l'esquisse du graphe de f sur l'intervalle $]-1, 4]$ et porter sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = 3$.
   e) On suppose $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) converge vers 0. Vérifier que la formule $v_n = \frac{1}{u_n}$ permet de définir une suite $(v_n)_{n\geq 0}$, et que $v_{n+1} - v_n$ tend vers $\frac{1}{2}$. Qu'en déduit-on pour (u_n) ?
3. On étudie maintenant les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant la relation de récurrence $a_{n+1} = \sin a_n$.
   a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie pour toute valeur $a_0 \in \mathbb{R}$, et que $a_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $n \geq 1$; en déduire que (a_n) est monotone à partir du rang $n = 1$, puis qu'elle converge vers 0. La suite (a_n) est-elle monotone à partir du rang $n = 0$?
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les a_n soient tous non nuls. On suppose cette condition réalisée et on pose, pour $n \geq 0$, $b_n = \frac{1}{a_n^2}$. Montrer que $b_{n+1} - b_n$ a une limite finie, en déduire un équivalent de (a_n).

Exercice 2 (MathSup/Capès agricole 1996)

1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin(\pi\sqrt{n})$.
   a) Exhiber une sous-suite de (u_n) qui tend vers 0 ;

b) donner un équivalent de la sous-suite de terme général u_{n^2+n} ;

c) qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

2. Soient $r > 0$ un nombre réel et $(e_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $e_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$e_{n+1} = re_n \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right) \quad .$$

a) Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, $e_n = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right)$.

b) Montrer que la série $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right)$ est bien définie, puis qu'elle converge absolument (on pourra scinder la somme en fonction de la parité de l'indice) et enfin que

$$\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) \leq 1 + \frac{\pi^2}{6} \quad .$$

c) En déduire un équivalent de (e_n) en fonction de ℓ et de r.

Exercice 3

Soient a, b des réels avec $a \neq 1$. On s'intéresse aux suites $(u_n)_n$ telles que, pour tout entier n,

$$(*) \qquad u_{n+1} = au_n + b \quad .$$

a) Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_n$ satisfait la récurrence $(*)$ si et seulement si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et de u_0, lorsque $(u_n)_n$ satisfait la récurrence $(*)$.

c) Montrer que l'ensemble des suites satisfaisant la récurrence $(*)$ est un sous-espace affine de l'espace des suites réelles. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4 (Capès interne 98)

On se donne un nombre réel $d > 1$ et on définit des suites (p_n) et (q_n) par la donnée de p_0 et de q_0 et la formule de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_{n+1} & = & p_n^2 + dq_n^2 \\ q_{n+1} & = & 2p_n q_n \end{array} \right.$$

Partie A. Approche arithmétique de l'algorithme de Babylone

Dans cette partie, on prend $p_0 = q_0 = 1$. L'objectif est de prouver la convergence de la suite $(\frac{p_n}{q_n})$ vers $\sqrt{d}$ en utilisant des propriétés de nature arithmétique.

1. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) sont strictement croissantes et que la suite $(\frac{p_n}{q_n})$ est minorée par 1.
2. Prouver les inégalités suivantes, valables pour tout $n \geq 1$:
   (i) $p_n \geq d^{(2^{n-1})}$;
   (ii) $q_n \geq 2^n d^{(2^{n-1}-1)}$.
3. Montrer que les suites (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$.
4. Calculer $p_{n+1}^2 - dq_{n+1}^2$ en fonction de $p_n^2 - dq_n^2$.
5. On pose $A = d - 1$. Montrer que $|p_n^2 - dq_n^2| = A^{(2^n)}$. En déduire l'égalité :

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{d}\right| = \frac{A^{(2^n)}}{q_n^2} \frac{1}{\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{d}\right)} \quad .$$

6. Montrer soigneusement l'équivalence des propriétés (i) et (ii) suivantes :
   (i) la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ tend vers $\sqrt{d}$;
   (ii) la suite $\left(\frac{A^{(2^n)}}{q_n^2}\right)$ tend vers 0.
7. En utilisant les propriétés de la question A.2 et de la question A.6, montrer la convergence de la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ vers $\sqrt{d}$.
8. On pose $\frac{p_n}{q_n} = u_n$, déterminer la relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n.

Partie B. Accélération de la convergence par un meilleur choix de (p_0, q_0)

Dans cette partie, nous nous limitons au cas où d est un nombre entier au moins égal à 2 et nous étudions comment choisir des entiers naturels p_0 et q_0 de manière à rendre la convergence vers $\sqrt{d}$ de la suite $(\frac{p_n}{q_n})$ étudiée ci-dessus la plus rapide possible. Au vu de l'égalité démontrée à la question B.5, il faudrait pour cela rendre le nombre $B = |p_0^2 - dq_0^2|$ le plus petit possible. Nous ferons l'hypothèse que *d n'est pas le carré d'un nombre entier*.

1. Montrer que si $(p_0, q_0) \neq (0, 0)$, le nombre B est non nul. En déduire que $\sqrt{d}$ est un nombre irrationnel.

   Nous allons montrer l'existence d'entiers non nuls p_0 et q_0 tels que $p_0^2 - dq_0^2 = 1$. Pour cela, nous étudions la périodicité d'une suite (x_n) associée au nombre d. On pose $x_0 = \sqrt{d}$ et on définit, pour tout $n \geq 0$, le nombre x_{n+1} par :

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - E(x_n)} \quad ,$$

   où $E(x_n)$ désigne la *partie entière* de x_n, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x_n.

2. Vérifier que la suite (x_n) est bien définie (on commencera par prouver que tous les nombres x_n sont irrationnels).

3. Prouver que, pour tout n, il existe des entiers $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ tels que :

$$x_n = \frac{\alpha_n x_0 + \beta_n}{\gamma_n x_0 + \delta_n}$$

et vérifier que $\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = (-1)^n$.

On pourra commencer par établir que la composée des fonctions homographiques $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ *et* $x \mapsto \frac{Ax+B}{Cx+D}$ *est la fonction* $x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ *dont les coefficients vérifient*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$

4. En partant de la relation $x_0^2 - d = 0$, montrer par récurrence que, pour tout n, le nombre x_n est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers :

$$A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0$$

telle que $|B_n^2 - 4A_nC_n| = 4d$.

On admettra dans la suite que, pour tout n, les nombres A_n et C_n sont non nuls et de signes contraires.

5. Montrer que la suite (B_n) est bornée, puis que les suites (A_n) et (C_n) le sont (on notera que $|A_n|$ et $|C_n|$ sont au moins égaux à 1).

6. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de trinômes $A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n$, puis qu'il existe des entiers distincts n_0 et n_1 tels que $x_{n_0} = x_{n_1}$.

7. En utilisant la question B.3, montrer qu'il existe des nombres entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha\sqrt{d} + \beta}{\gamma\sqrt{d} + \delta}$$

et tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. On admettra que le quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est différent de $\pm(1, 0, 0, 1)$. (Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat relevant de la théorie des nombres.)

8. Prouver que $\delta = \alpha$ et $\beta = \gamma\delta$ et en déduire $\alpha^2 - d\gamma^2 = \pm 1$.