TD1 - Suites numériques

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$, étudier la convergence des suites définies par

$$u_n = \left(\frac{1+\sin n\alpha}{3+\cos n\alpha}\right)^n \quad , \quad v_n = \left(\frac{1+\alpha n}{3+n}\right)^n \quad .$$

Indication pour (v_n) *: on pourra introduire la fonction* $f(x) = \dfrac{1+\alpha x}{3+x}$*, dont on étudiera les variations en fonction des valeurs de* α *; on traitera à part le cas* $\alpha = 1$*.*

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad .$$

a) Vérifier que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont croissantes, à termes positifs ;

b) montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_{n+1} < v_n + 1 \quad ; \quad v_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad .$$

c) Qu'en déduit-on pour la convergence des deux suites ?

d) Déduire de ce qui précède la convergence de la suite de terme général

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad .$$

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0. Pour tout entier n, on pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \quad .$$

1. a) Montrer que $s_n \geq 0$ pour tout entier n.

   b) On note $(p_n)_n$ la sous-suite des termes pairs, de terme général $p_n = s_{2n}$, et $(i_n)_n$ la sous-suite des termes impairs, de terme général $i_n = s_{2n+1}$. Montrer que $(i_n)_n$ et $(p_n)_n$ sont adjacentes.

c) En déduire que $(s_n)_n$ est convergente. Que peut-on dire de sa limite ?

d) Qu'en déduit-on pour la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad ?$$

2. On pose, pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

   b) En déduire $\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq v_n \leq \ln 2$ pour tout $n \geq 1$.

   c) Montrer que $(v_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

   d) Comparer $v_{n+1} - v_n$ et $u_{2n+2} - u_{2n}$, v_1 et u_2. Quelle relation peut-on en déduire entre v_n et u_{2n} ?

   e) Donner la valeur de la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 4
Approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels

A. Construction d'une suite de réels convergeant vers $\sqrt{2} - 1$

1. Vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2+x}$.
2. Représenter graphiquement (repère orthonormal, unité 10 cm) la fonction f définie sur le segment $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{2+x}$.
3. Vérifier qu'on définit une suite (u_n) de réels appartenant au segment $[0,1]$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \quad .$$

   En utilisant le graphique précédent, marquer, sur l'axe des abscisses, les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \quad .$$

   En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_{n+1} - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq \frac{1}{4} \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \quad ,$$

   puis que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq \frac{1}{4^n} \quad .$$

   Conclure.

B. Propriétés de la suite (u_n)

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est un nombre rationnel.
2. Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n.

3. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante. On pourra s'appuyer, pour démontrer ces propriétés, sur le sens de variation de f.
4. Déduire des résultats précédents un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} de $\sqrt{2}-1$ par des nombres rationnels, puis une valeur décimale approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
5. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux et, pour $n = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$.
   a. Déterminer p_1, q_1, p_2, q_2.
   b. Montrer que, si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de b et $a + 2b$.
   c. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$p_{n+1} = q_n \ , \qquad q_{n+1} = 2q_n + p_n \ .$$

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

a) Montrer que $u_n > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout n *(on pourra voir u_n comme une* moyenne) ;

b) en déduire que la suite $(u_n)_n$ est monotone, puis convergente. Que peut-on dire de sa limite ℓ ?

c) Montrer que $u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour tout n ; qu'en déduit-on pour ℓ ?