Le raisonnement mathématique par le jeu

Stéphane Vinatier et Jérôme Dufour

Introduction

Le « groupe de Tulle » de l'IREM de Limoges a mis au point un jeu de raisonnement mathématique basé sur la géométrie du triangle de la fin du collège.

La motivation pour ce travail est un constat récurrent, qu'on peut faire à tous les niveaux de l'enseignement secondaire ou supérieur : la difficulté des élèves ou étudiants à construire (imaginer, présenter, rédiger,...) un raisonnement mathématique.

Notre hypothèse est que cette difficulté provient au moins en partie d'un manque de pratique. Nous proposons donc un jeu de raisonnement mathématique, avec l'idée qu'en le rendant ludique, son apprentissage se fera plus facilement.

Le principe

Nous partons du principe que construire un raisonnement mathématique, c’est simple ! Du moins si l’on sait :

– identifier les données (connues) et les conclusions (à démontrer) ;

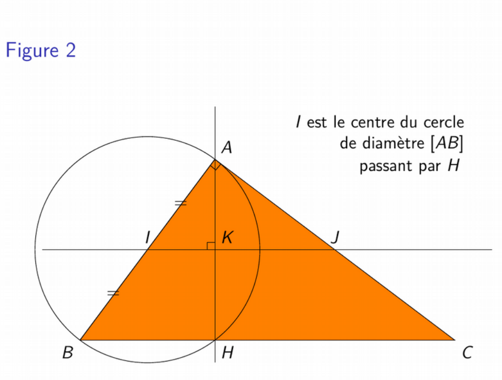
– raccrocher la situation à une théorie mathématique (c'est-à-dire identifier les théorèmes du cours dont elle relève) ;

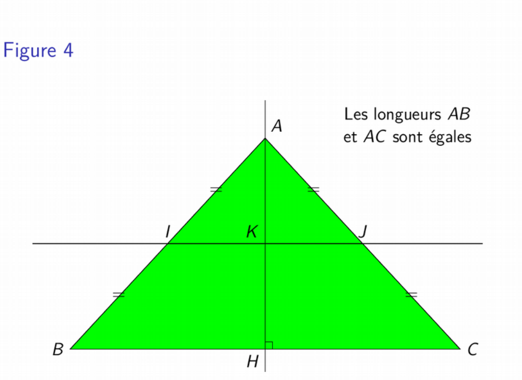
– utiliser ces théorèmes à bon escient (vérifier que les hypothèses sont satisfaites et en tirer les conclusions).

Le raisonnement peut alors se construire de manière quasiment mécanique, en allant des données vers les conclusions au moyen des théorèmes. Notre jeu tente de mettre en œuvre ce principe de façon ludique.

Les cartes

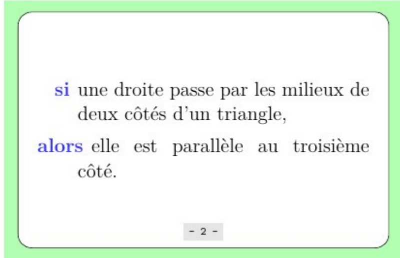
Pour ce faire, il s'appuie sur deux situations géométriques mettant en œuvre un triangle rectangle pour l'une, un triangle isocèle pour l'autre.





Chacune de ces situations est déclinée en trois cartes « figure », sur chacune desquelles quatre données (ou *hypothèses*) sont encodées (angles droits, segments de même longueur, ...) ou écrites en toutes lettres (*I* est le centre du cercle de diamètre *[AB]* passant par *H*, par exemple). Ces données varient d'une carte à l'autre pour que des raisonnements différents puissent être mis en œuvre selon le choix de la carte « figure », commune à tous les joueurs, qui est fait en début de partie. L'objectif est d'établir de manière rigoureuse, à partir des quatre données, la véracité de huit assertions supplémentaires concernant cette figure.

Pour ce faire, les joueurs ont à disposition deux autres types de cartes : les 15 cartes « donnée / conclusion » en 3 exemplaires chacune, plus 2 cartes « Joker » (voir leur usage dans le paragraphe *Déroulement*) permettent d'écrire les propriétés de la situation géométrique considérée, qu'elles soient données sur la carte « figure » ou qu'on les démontre à l'aide des 10 cartes « propriété » (en 2 exemplaires chacune, plus 1 carte « Joker »), auquel cas les cartes « donnée / conclusion » pourront servir à traduire à la fois les hypothèses et les conclusions des propriétés utilisées. D'où leur nom...



Une remarque sur le vocabulaire

On verra plus loin que, en géométrie comme dans d'autres domaines, les mathématiciens usent de nombreuses manières de désigner les mêmes objets ou les mêmes relations entre des objets, ce qui peut certainement être source de difficultés de raisonnement. De façon peut-être encore plus pernicieuse, ils utilisent parfois le même mot pour désigner des notions différentes. Ainsi le terme « propriété » a servi dans le paragraphe ci-dessus à la fois pour évoquer les *propriétés de la figure*, c'est-à-dire des assertions qui sont vraies pour cette figure (*ABC* est un triangle rectangle, mettons), et les *propriétés mathématiques* (ou propositions, théorèmes, lemmes,...) qui, partant de certaines des propriétés précédentes, permettent d'en démontrer d'autres, par exemple : si *ABC* est un triangle rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Ce deuxième type de propriété fait intervenir une variable et, de façon implicite, un quantificateur : pour tout triangle *ABC*, si *ABC* est rectangle, alors (...), tandis que le premier type ne concerne qu'une figure particulière. Si ce double usage du mot propriété semble solidement établi, on peut se demander s'il est très pertinent d'un point de vue pédagogique, puisqu'il revient à désigner par le même mot l'hypothèse, la proposition et la conclusion. Il omet aussi de distinguer le particulier (ce qui est vrai pour un certain objet) et le général (ce qui s'applique à tous les objets d'un certain type). Le choix fait dans le jeu est de distinguer ces deux notions de la façon suivante : cartes « donnée / conclusion » pour les propriétés de la figure et cartes « propriété » pour les propositions.

Les règles du jeu

Elles traduisent les principes énoncés ci-dessus :

a) les premières cartes « donnée / conclusion » posées doivent obligatoirement traduire les hypothèses apparaissant sur la carte « figure » (via symboles ou texte) ;

b) on ne peut poser une carte « propriété » que si une ou des carte(s) « donnée / conclusion » correspondant aux hypothèses de la propriété sont déjà posées ;

c) une fois qu'une carte « propriété » est posée, on peut poser la ou les carte(s) « donnée / conclusion » qui traduisent les conclusions de la propriété en fonction de ses hypothèses, et s'en servir comme hypothèse(s) pour d'autres propriétés ;

d) on ne peut poser sur le plateau une carte qui y figure déjà.

Les trois premières règles tendent à assurer que les raisonnements effectués seront corrects d'un point de vue logique et en accord avec la situation géométrique considérée ; la quatrième règle est apparue plus tard, en testant différentes manières de jouer : c'est l'approche collaborative qui s'est peu à peu imposée, dans laquelle les cartes jouées par un joueur sont ensuite mises en commun et peuvent être réutilisées par les autres. Venons-en justement à la description d'une partie.

Déroulement

Comme on l'a dit, on commence par choisir une carte « figure » qui est commune à tous les joueurs. Ceux-ci peuvent bien sûr jouer en équipes (surtout au début où le jeu demande une grande attention), il est conseillé de jouer à 2, 3 ou 4 équipes. Chacune reçoit 4 cartes « donnée / conclusion » et 2 cartes « propriété » en début de partie, elles sont posées devant l'équipe face visible. Les cartes restantes forment des tas pour la pioche, faces cachées.

L'équipe la plus septentrionale commence. Elle peut tout à la fois :
— poser des cartes « donnée / conclusion » ou « propriété » sur le plateau, sans limitation de nombre (mais dans le respect des règles énoncées ci-dessus bien sûr) ;
— échanger ses cartes « Joker » contre les cartes de même type des autres équipes qu'elle utilise alors comme les siennes ;
— se défausser des cartes qu'elle juge inutiles sous les pioches correspondantes.
Elle pioche alors les cartes qui lui manquent pour avoir à nouveau en main 2 cartes « propriété » et 4 cartes « donnée / conclusion ».

Les autres équipes (ou l'enseignant) valident les raisonnements proposés, puis l'équipe qui a joué marque :
– 1 point par carte posée ;
– 1 point supplémentaire pour chaque raisonnement complet (hypothèse(s), propriété, conclusion) faisant intervenir une nouvelle carte.
C'est maintenant le tour de la prochaine équipe (en tournant dans le sens trigonométrique).

Lorsque les 12 cartes « donnée / conclusion » correspondant à la figure ont été posées sur le plateau, l'équipe suivante choisit une nouvelle carte « figure » dans la pioche, de couleur différente de la précédente. On range sous les pioches les cartes qui se trouvaient sur le plateau (par contre chaque équipe garde les siennes) et l'équipe qui a changé de figure commence.

La partie se termine lorsque les 12 cartes « donnée / conclusion » correspondant à la nouvelle figure ont été posées sur le plateau. L'équipe qui a le plus de points emporte la partie.

Variantes

Les retours suite à la présentation du jeu au colloque de Toulouse *Les mathématiques, une culture pour tous* nous ont amenés à proposer deux façons d'organiser le jeu :
— débutants : les raisonnements restent en place sur le plateau tels qu'ils ont été construits (hypothèse(s) – propriété - conclusion) ;

— avancés : une fois les raisonnements validés, on rassemble toutes les cartes qui ont servi sur le plateau (par catégorie) afin qu’elles puissent resservir librement aux joueurs suivants.

Dans le premier cas, il est difficile de réutiliser les cartes d'un raisonnement pour en construire d'autres, et même d'enchaîner plusieurs raisonnements sans casser la structure de certains d'entre eux ; il est alors conseillé d'arrêter la partie assez vite. Dans le second cas, on perd la trace des raisonnements effectués ; un codage des cartes à l'aide de lettres et de chiffres permet de les noter pour une éventuelle vérification ultérieure.

Une critique souvent entendue est que les règles du jeu n'empêchent pas les joueurs de construire des raisonnements qui « bouclent », en appliquant une propriété à une donnée, puis la propriété réciproque à la conclusion obtenue précédemment, pour retrouver (reprouver!) la donnée initiale. Il est bien sûr possible d'interdire ce genre de construction, même s'il nous a paru préférable, dans un jeu de logique, de nous en tenir aux règles qui assurent la validité des raisonnements. Il est peut-être d'ailleurs utile, d'un point de vue pédagogique, de permettre ces constructions qui montrent bien le sens de la réciproque.

Proposons une dernière variante encore expérimentale pour les plus avancés : lorsqu'une équipe a fini de jouer (c'est-à-dire après qu'elle ait pioché les cartes pour compléter son jeu), si elle a posé une carte « propriété » dont les hypothèses sont satisfaites par une ou des carte(s) « donnée / conclusion », sans voir qu’une ou des carte(s) « donnée / conclusion » déjà présentes en traduit les conclusions, une autre équipe peut le signaler en criant « CQFD !! » (autant de fois que de cartes concernées). Elle marque alors 1 point si elle l'a fait à bon escient.

Reformulations
Le jeu vient avec une règle qui reprend les points ci-dessus et rappelle de plus les définitions des objets et notions utilisées, ainsi que les conventions pour les figures, de façon à ne pas laisser d'ambiguïté, ou en tout cas le moins possible. Par exemple, les points qui paraissent alignés le sont vraiment, tandis qu'un point qui semble être le centre d'un cercle n'est pas supposé l'être tant que cela n'a pas été prouvé.

La conception du jeu a été l'occasion de se rendre compte que la langue française propose de nombreuses reformulations pour les notions mises en œuvre. Il est indispensable d'être capable de passer de l'une à l'autre (ce qui ne nécessite que d'appliquer les définitions des objets évoqués), même si cela se fait le plus souvent de façon complètement implicite. Ainsi l'une des figures code le fait que les segments *[IA]* et *[IB]* sont de même longueur ; les trois points étant alignés, ceci se traduit immédiatement par l'assertion « *I* milieu de *[AB]* », qui est celle qui apparaît sur la carte « donnée / conclusion » correspondante. Comme celle-ci, de nombreuses notions peuvent être formulées de plusieurs manières et, de fait, l'harmonisation des formulations sur les cartes « donnée / conclusion » ne s'est faite qu'en de nombreuses étapes, tant ces reformulations sont le plus souvent transparentes (au sens d'invisibles !) pour les initiés.

Citons en tout de même une qui est un peu moins immédiate. Elle donne d'ailleurs parfois lieu aux deux énoncés distincts suivants du même théorème :
– si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit ;
– si un triangle est rectangle, alors la médiane issue de l’angle droit est égale à la moitié de l’hypoténuse.

En effet, si l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit, alors son milieu est à égale distance des trois sommets donc la médiane considérée est bien de longueur moitié de celle de l'hypoténuse. Dans l'autre sens, si la longueur de la médiane est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse, le milieu de celle-ci se retrouve à équidistance des trois sommets du triangle, donc est le centre du cercle circonscrit, dont l'hypoténuse est bien un diamètre.

On voit qu'aucun véritable théorème n'est impliqué dans la démonstration de l'équivalence des conclusions des deux énoncés. Celle-ci découle de l'application successive des définitions des termes : le milieu du diamètre est le centre du cercle, le cercle est l'ensemble des points à égale distance du centre, la médiane joint un sommet au milieu du côté opposé ; il faut tout de même utiliser que la longueur du diamètre est le double de celle du rayon, mais cette propriété découle immédiatement des définitions du diamètre et du cercle (on pourrait d'ailleurs définir le diamètre comme étant une corde deux fois plus longue que le rayon). Ceci ne justifie pas, de notre point de vue, de donner deux énoncés distincts.

Cet exemple éclaire cependant les limites d'un travail sur le raisonnement logique qui ne se baserait que sur les raisonnements de la forme « hypothèse(s) – propriété – conclusion », puisque la difficulté essentielle qu'on y rencontre est l'enchaînement de plusieurs définitions en quelque sorte imbriquées les unes avec les autres. Notre jeu a été conçu dans l'idée de travailler sur la mécanique des enchaînements « hypothèse(s) – propriété – conclusion » et il limite autant que possible le recours aux reformulations (la propriété de la médiane en a été évincée au profit de l'hypoténuse diamètre du cercle circonscrit). Il est pourtant loin d'en être exempt : les données qui apparaissent sur les figures y sont formulées d'une manière différente de ce qu'on trouve sur les cartes « donnée / conclusion » (lorsque ce n'était pas le cas, il semblait très artificiel de devoir poser ces cartes pour débuter les raisonnements) ; certaines reformulations sont tout bonnement inévitables si l'on s'en tient aux énoncés traditionnels des propriétés : on sera ainsi amené à montrer qu'un triangle est rectangle en établissant que les droites portant deux de ses côtés sont perpendiculaires. Dans la mesure du possible on a inscrit certaines de ces reformulations sur les cartes « donnée / conclusion » concernées, par exemple « (AH) perpendiculaire à (BC), c'est-à-dire les triangles ABH et ACH sont rectangles en H », de façon à faciliter cette partie du travail des joueurs, afin qu'ils se concentrent sur les constructions du type visé.

L'équipe

Le « groupe de Tulle » est un groupe IREM soutenu par le rectorat de l'académie de Limoges. Il est constitué de Jérôme Dufour (collège Cabanis à Brive), Patrick Guillou (collège Pierre de Ronsard à Limoges), Michel Lafont (retraité), Bernard Madelmont (lycée Edmond Perrier à Tulle), Michaël Maisonneuve (collège de Beaulieu-sur-Dordogne), Marie-France Perin (collège de Neuvic), Marie-Josée Solignac (collège d'Argentat), Stéphane Vinatier (université de Limoges).

L'atelier

Notons que, lors du colloque, les participants à l'atelier ont longuement expérimenté le jeu, des discussions riches s'en sont ensuivies, que nous avons essayé de prendre en compte pour améliorer le jeu. Nous les remercions de leur investissement et de leurs retours.

Pour jouer...
La version actuelle du jeu (planches de cartes et règle) peut être téléchargée (puis imprimée et découpée) sur la page web du groupe :
http://www.irem.unilim.fr/recherche/archives/le-raisonnement-mathematique-par-le-jeu/
Une vidéo d'explication de la règle montrant le déroulement d'une partie est en préparation.
Enfin nous prévoyons de faire éditer une version améliorée du jeu (cartes, plateau), qui sera ensuite disponible à la vente auprès de l'IREM de Limoges.