

Scénario d’enseignement et de formation s’appuyant sur la notion de cycle de modélisation

Stéphane Vinatier

XLIM UMR 7252 CNRS - Université de Limoges / IREM de Limoges

29 septembre 2025

Cet article est le compte-rendu d’un atelier proposé aux participants au XXX^e colloque de la CORFEM, le 12 juin 2024 à Limoges. J’y présente le travail effectué au sein du groupe *Modélisation au cycle 4* de l’IREM de Limoges comme une formation à la démarche de modélisation et à son utilisation dans l’enseignement des mathématiques au collège, après avoir fait un tour d’horizon des acceptions très diverses de la notion de modélisation mathématique, analysé la (faible) présence de celle-ci dans les programmes français d’enseignement des mathématiques (en vigueur à la rentrée 2020) et motivé son introduction sous la forme d’un cycle de modélisation simplifié en tant qu’objet d’enseignement. La fiche d’activité proposée en fin d’article est le produit du travail collectif du groupe IREM.

1 Modélisation mathématique

Nous commençons par un survol de la notion de modélisation mathématique, en présentant les nombreuses formes qu’elle prend selon les contextes, les sources et les auteurs. Cette expression est en effet utilisée pour décrire des processus très divers dans la communauté de la didactique des mathématiques.

1.1 Intra- ou extra-mathématique

Cela est particulièrement frappant quand on observe que certains auteurs réservent cette notion à la mise en place d’un lien entre les mathématiques et leurs applications au monde « réel » (c’est-à-dire extérieur aux mathématiques), il s’agit alors de modélisation *extra-mathématique*, tandis que d’autres l’appliquent également à l’établissement de liens entre plusieurs domaines mathématiques, en restant à l’intérieur du monde mathématique.

Cette démarche *intra-mathématique* est essentielle à la fois pour la recherche, parce qu’elle permet de créer des ponts entre des théories portant sur des objets mathématiques distincts et d’utiliser les résultats issus d’une théorie sur les objets de l’autre, et pour l’enseignement, parce qu’elle montre l’unité des

mathématiques et ouvre vers de nouvelles façons d’envisager les objets et de raisonner. On peut par exemple, comme indiqué dans [JS23, p. 106], utiliser le théorème de Thalès pour obtenir l’équation cartésienne d’une droite.

Pour autant, les deux démarches intra et extra-mathématiques sont de nature complètement différentes. La première reste à l’intérieur du monde mathématique, elle procède en respectant les règles de la logique mathématique et de la déduction ; tous ses objets sont définis mathématiquement et les liens qu’elle opère entre eux sont des correspondances soumises à ces règles. La seconde, au contraire, s’intéresse au monde réel ; les objets qu’elle considère dans celui-ci ne sont pas définis dans le système d’axiomes qui fonde les mathématiques, si bien que les règles de la logique mathématique n’ont aucune prise sur eux. On est donc amené à leur substituer des objets mathématiques pour pouvoir appliquer ces règles.

Se posent alors des questions auxquelles les mathématiques ne peuvent pas répondre : que retient-on du monde réel dans le problème qui nous occupe, quelles simplifications fait-on ? Quels objets mathématiques choisir comme modèles des objets de la situation réelle simplifiée, de sorte que les relations entre les objets réels trouvent une traduction fidèle dans les relations entre les objets mathématiques qui les représentent ? Tous ces choix portent une part de subjectivité, liée aux personnes qui les font, aux connaissances et aux intérêts scientifiques du moment, aux théories mathématiques accessibles... Et surtout, du fait qu’ils ont lieu en dehors des mathématiques, ils n’ont pas de valeur de vérité logique, vraie ou fausse, il faut donc trouver d’autres manières, non mathématiques, pour les valider ou les justifier.

La capacité à faire ces choix, à les expliciter et à les justifier est totalement hors du champ des mathématiques, et demande de développer des compétences complètement différentes de celles qu’on utilise à l’intérieur du monde mathématique. Nous pensons que ces compétences ne sont pas innées et devraient être enseignées. L’objet du travail présenté ici est justement de proposer un scénario d’initiation à la modélisation extra-mathématique, à transmettre aux enseignants lors d’actions de formation, et pouvant être décliné pour des utilisations avec des élèves.

1.2 Différentes approches

Nous reprenons ci-dessous les termes utilisés par Alain Kuzniak dans une conférence donnée à l’IREM de Paris [Kuz22] pour décrire différentes approches de la modélisation extra-mathématique, selon les lieux, les époques et les finalités.

L’approche standard dominante trouve sa source dans les années 1960 avec des réflexions sur la modélisation à destination des ingénieurs, qui ont migré progressivement vers l’enseignement des mathématiques, notamment à l’occasion de l’étude ICMI *Modelling and applications in mathematics education* du début des années 2000, lancée par [Blu+02]. Elle inscrit la modélisation mathématique dans le cycle que nous décrivons dans la partie 2, avec un intérêt

particulier pour les compétences à développer et à mettre en œuvre dans ce type d'activité, si bien qu'elle est également appelée *approche par compétences* [KV11]. C'est cette approche que nous avons adoptée.

L'approche critique. La séparation nette induite par l'approche standard ci-dessus entre monde réel et monde mathématique ne convient sans doute pas à tous les niveaux d'enseignement, en particulier au primaire. Elle peut aussi paraître artificielle à certaines personnes, selon leur propre manière d'appréhender le rapport entre mathématiques et monde réel, ou selon leur culture. D'après [Kuz22], l'approche critique s'est largement répandue en Amérique Latine ; les mathématiques y sont vues comme partie intégrante du monde réel, ce qui élimine la nécessité de créer un pont entre situation réelle et modèle mathématique : on applique directement les mathématiques à des questions importantes dans la société, comme la mesure de terrains ou le partage d'héritages. C'est le même genre d'approche qui est majoritairement adoptée en France dans l'enseignement des mathématiques au collège, avec la large place accordée à la *théorie des grandeurs* : on considère que les grandeurs (physiques, économiques,...) sont des objets mathématiques, et sont donc parfaitement éligibles à l'utilisation de résultats mathématiques. Si on gagne énormément en simplicité dans l'application des mathématiques au monde réel, on élimine avec cette approche toute réflexion sur le choix du modèle, sa validité, ses limites,... si bien qu'au final on perd en partie le sens de ce que l'on fait. On risque même, à partir d'un certain niveau de compréhension, de décrédibiliser les mathématiques en laissant penser qu'elles donnent des réponses exactes à des problèmes du monde réel, ce qui s'avère toujours faux à un moment ou à un autre (et contredit l'intuition dans certains cas, nous essaierons de le montrer dans la partie 4).

Les approches épistémologiques citées par [Kuz22] sont la RME (*realistic mathematics education*) développée aux Pays-Bas par Freudenthal, l'ETM (*espace de travail mathématique*) développée au LDAR (Paris), en particulier par Kuzniak, et la TAD (*théorie anthropologique du didactique*) de Chevallard. Leur spécificité est de se focaliser sur les compétences mathématiques induites par les activités de modélisation, et non sur les compétences propres à cette dernière. Les tâches de modélisation sont donc conçues pour faire apparaître certains contenus mathématiques, et non pour travailler le lien entre monde réel et modèle mathématique.

Les principales différences que nous relevons dans [Kuz22] entre l'approche standard dominante et les approches épistémologiques portent sur la nature des liens qu'on établit entre une situation réelle et les mathématiques, *traduction* ou *organisation*, et sur la finalité de l'activité de modélisation, *comprendre le monde réel* ou *les mathématiques*.

Dans l'approche standard dominante, on cherche à remplacer les objets du monde réel par des objets mathématiques possédant des propriétés analogues à celles qu'on attribue aux objets réels. On tente donc de traduire aussi fidèle-

ment que possible la situation réelle et la question qu'on s'y pose en un modèle mathématique avec un problème à résoudre. Bien sûr, comme toute traduction, celle-ci est nécessairement imparfaite, elle ne peut rendre compte de toutes les subtilités de la réalité (qu'on aura parfois éliminées aux étapes précédentes de la modélisation pour arriver à un modèle réel simplifié, voir partie 2). Il est nécessaire également, dans cette approche, de garder en mémoire la correspondance qu'on a établie entre objets réels et objets mathématiques, pour pouvoir, après traitement mathématique du problème, retraduire les résultats obtenus dans le monde réel (et les confronter aux observations déjà effectuées ou à ceux de nouvelles expériences).

Dans les approches épistémologiques, en particulier dans la RME, le passage du monde réel aux concepts mathématiques se fait plutôt sous la forme d'une organisation progressive de la réalité en des modèles de plus en plus abstraits. La notion mathématique visée va émerger petit à petit à partir de la situation réelle, au travers d'étapes successives conçues pour être faciles à suivre (voire à découvrir) pour l'apprenant. Le but ici est de donner un sens à un concept mathématique, à partir d'une situation réelle qui permet de le faire apparaître, il n'y a pas nécessairement de retour au réel après le travail mathématique.

Enfin, l'approche standard dominante vise à comprendre une situation réelle, en la traduisant en un modèle mathématique qui rend bien compte des observations effectuées dans la réalité (et permet de prédire ce qui va se passer dans d'autres circonstances, dans le meilleur des cas), tandis que les approches épistémologiques sont centrées sur la compréhension d'un concept mathématique, compréhension permise par le lien qu'on établit entre cette notion et une situation réelle adaptée.

Convergence. D'autres travaux se situent à une position intermédiaire entre approches par compétences et épistémologiques, et permettent d'en donner une vision unifiée. Ainsi la *mathématisation horizontale* décrite dans [Yva21, Fig.26.2] partage avec la RME l'idée d'organisation progressive d'une situation réelle en modèles de plus en plus abstraits en l'incluant dans le cycle de modélisation de l'approche par compétences que nous détaillerons en partie 2.

1.3 Questions de complexité

On voit que la modélisation recouvre des activités, finalités, conceptions,... extrêmement diverses. Cette diversité d'approches est sans doute une conséquence de la complexité de notre réalité (incluant le monde réel et les mathématiques que nous y avons développées), complexité qui induit de multiples façons de l'envisager. Les différentes approches ont évidemment toutes leur intérêt par rapport aux objectifs qu'elles se donnent. Dans notre travail nous nous concentrons sur l'approche standard dominante, qui nous semble être la meilleure manière de réfléchir les applications des mathématiques à des situations réelles, notre objectif principal. Avant de la décrire plus en détail dans la partie 2, il nous reste une question importante à trancher.

Partir de tâches simples ou complexes. Le cycle de modélisation qui est au cœur de l’approche standard dominante demande, pour être mis en œuvre sous sa forme complète sur une situation réelle, de posséder ou de développer des compétences très nombreuses et variées (voir par exemple [Maa06] ou le compte-rendu de cet article par Richard Cabassut dans [KV11]). L’étendue des compétences à acquérir pour maîtriser l’intégralité du processus a amené de nombreux auteurs à considérer que les tâches de modélisation proposées aux élèves devraient être assez complexes pour faire apparaître et mettre en œuvre toutes ces compétences. Par exemple, les deux articles [Art+09] et [BAR+14], qui rapportent des expériences de mises en œuvre de scénarios de formation à la modélisation mathématique, respectivement en formation initiale et continue, partent de situations réelles fort complexes. De même pour les situations proposées dans les articles [Yva21, §26.5] (croissance d’un arbre, également utilisée en formation initiale dans [GY24]) et [YM23] (aire de baignade). Cabassut observe également, dans l’article de Maaß cité ci-dessus, « une conception qui considère que les problèmes de modélisation sont des problèmes complexes et ouverts (...) » [KV11, p.8].

Nous sommes parfaitement convaincus de l’intérêt et de la richesse des situations proposées dans les articles que nous venons de citer, dès lors qu’elles s’adressent à un public suffisamment averti, qu’il s’agisse de formation d’enseignants ou d’activités pour des élèves disposant du temps et de l’encadrement nécessaires. Nous pensons qu’il est également indispensable de proposer aux enseignants des activités beaucoup plus simples d’initiation à la modélisation, réduites à ses principales phases (décrites notamment dans les Figures 2 et 4 ci-dessous), de façon à rendre celles-ci très accessibles aux élèves, en particulier au collège, afin qu’ils les assimilent avant de se pencher sur la modélisation de situations plus complexes.

Notre point de vue est qu’un enseignement des principes de base de la modélisation, énoncés sous une forme adaptée au niveau des élèves (comme cela est suggéré dans le préambule des programmes du cycle 4, que nous présentons dans la partie 3), est possible et souhaitable en partant de situations réelles extrêmement simples. Nous en détaillons un exemple, utilisable en formation et pouvant être décliné en séances d’enseignement dès la classe de 6^e, dans les parties 4 et 5. Cette approche évite les principales difficultés soulignées dans le document d’accompagnement des programmes [16], « le temps nécessaire pour laisser les élèves réfléchir, émettre et confronter des hypothèses *[qui]* peut dépasser le cadre de la séance » et le fait que les modèles mathématiques décrivant des situations réelles complexes sont souvent inaccessibles aux élèves de l’enseignement secondaire. Bien plus, elle fait vivre les compétences de base de la modélisation dans tous (ou la plupart) des chapitres de mathématique, dès lors qu’une situation réelle est prise comme point de départ d’un exercice ; elle permet de donner aux élèves le sens véritable du calcul ou du raisonnement mathématique mené pour résoudre l’exercice, en fournissant un cadre qui sépare nettement ce qui se passe dans le monde réel et dans le modèle mathématique, et qui permet aussi la réflexion sur la manière (ou plutôt les manières) de les relier.

2 Cycle de modélisation de Blum et Leiß

Le cycle de modélisation de Blum et Leiß [BL06] est le cadre de référence, que Kuzniak appelle « approche standard dominante », pour gérer les relations entre le monde réel (décrit dans [Blu+02] comme tout ce qui n'est pas mathématique, qu'on peut comprendre comme le complémentaire dans notre réalité de la construction moderne, c'est-à-dire axiomatique-déductive, des mathématiques) et les mathématiques. Partant d'une certaine situation dans le monde réel :

- (1) on l'analyse pour obtenir un *modèle de la situation* ;
- (2) on simplifie, structure, précise celui-ci, en fonction de ce qu'on en sait et de ce qu'on souhaiterait savoir ; on met ainsi à jour un *problème* (la ou les question-s qui se pose-nt), ainsi qu'un *modèle réel* de la situation ;
- (3) lorsque cela est possible et semble adapté, on mathématise le modèle réel, c'est-à-dire qu'on traduit ses objets, relations, données et conditions en termes mathématiques ; en particulier les objets réels sont remplacés par des objets mathématiques et le problème posé à l'étape précédente devient une question mathématique ; on obtient ainsi un *modèle mathématique* de la situation ;
- (4) on peut alors appliquer les méthodes mathématiques (propriétés, théorèmes, déductions,...) pour établir des *résultats mathématiques* portant sur les objets, relations, données, conditions du modèle mathématique, de façon à répondre à la question issue de l'étape précédente ;
- (5) ces résultats mathématiques doivent ensuite être traduits dans le modèle réel, c'est-à-dire interprétés dans les termes de la situation modèle ; si une réponse à la question mathématique a été trouvée, sa traduction fournit une solution au problème de l'étape (2) ;
- (6) il faut alors vérifier si la solution dans le modèle réel obtenue en interprétant les résultats mathématiques est raisonnable et appropriée par rapport aux attentes ; ceci peut conduire à *valider* le modèle mathématique ou, au contraire, à recommencer tout le processus avec un modèle modifié ou complètement différent ;
- (7) enfin, une fois qu'un modèle a été validé, on le décrit précisément de manière à pouvoir le communiquer.

Ce processus est représenté dans la Figure 1. La description des procédés permettant de passer d'un bloc de la Figure 1 à un autre est souvent résumée sous la forme :

Comprendre – Simplifier / organiser – Mathématiser – Travail mathématique – Interpréter – Valider – Présenter / expliquer

Avant d'arriver à la forme stabilisée que nous présentons, ce cycle a fait l'objet d'évolutions successives, au cours des années, pour pouvoir être appliqué dans la plus grande diversité de situations de modélisation (voir [Kuz22] pour un bref survol historique). Il n'est pas raisonnable, de notre point de vue, de l'enseigner à des élèves de collège sous cette forme, ni même de l'utiliser avec

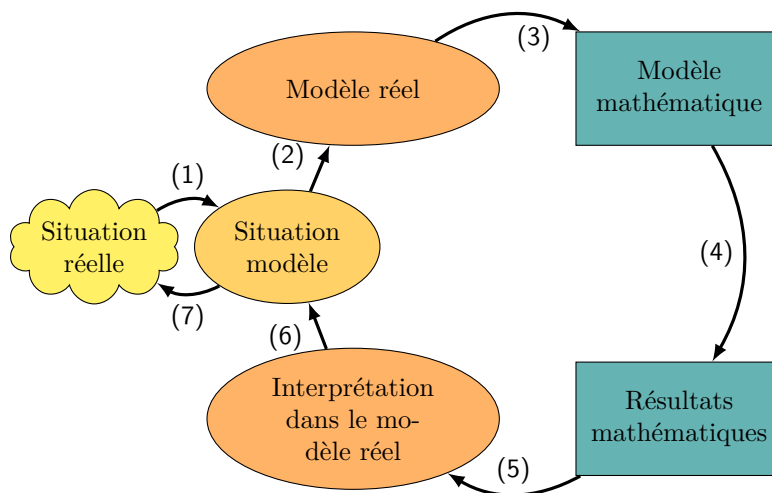


FIGURE 1 – Le cycle de modélisation de Blum et Leiß.

eux dans toute sa complexité, tout au moins au début de leur apprentissage de la modélisation. Heureusement, nous allons voir qu'on peut trouver dans le programme du cycle 4 une version (très) simplifiée du cycle de modélisation, qui en retient pourtant l'essentiel.

3 Dans les programmes

L'approche par compétences a infusé dans les programmes français, notamment avec l'accent mis sur l'acquisition de six compétences majeures aux niveaux du primaire et du secondaire. Pour mémoire, ces compétences sont chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. L'importance de la compétence « modéliser » dans les programmes varie selon les niveaux d'enseignement. Nos références sont les programmes en vigueur à la rentrée 2020.

3.1 Au cycle 3

À ce niveau d'apprentissage, l'approche privilégiée est clairement ce que nous avons dénommé ci-dessus l'approche critique : les mathématiques sont considérées comme faisant partie du monde réel, on les applique directement sur ses objets. L'essentiel des tâches de modélisation consiste donc à reconnaître quelles théories mathématiques s'appliquent, en fonction des situations rencontrées, ce que le programme détaille ainsi [20a, p.91] :

- *Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.*
- *Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.*

- *Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).*
- *Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.*

Le but ici n'est pas de faire la distinction entre le monde réel et le monde mathématique mais plutôt, comme indiqué dès le premier paragraphe du programme de mathématiques [20a, p.90], de « montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations. »

3.2 Au cycle 4

La démarche de modélisation en tant que telle, c'est-à-dire l'approche standard dominante, apparaît sous une forme simplifiée dans le préambule du programme, qui liste les compétences suivantes [20b, pp.129-130].

- *Reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème.*
- *Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).*
- *Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.*
- *Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).*

Un cycle de modélisation minimal. On peut reconnaître dans cette liste les trois principales phases de l'approche standard dominante : le passage du monde réel au modèle mathématique, le traitement mathématique du problème, l'interprétation du résultat mathématique dans le monde réel pour valider ou non le modèle. Cette correspondance est montrée dans la Table 1. On peut

Partant d'une question en dehors du monde mathématique, la traduire en un problème mathématique	« reconnaître un modèle mathématique » ; « traduire en langage mathématique une situation réelle »
Résoudre ce problème avec les outils mathématiques appropriés	« raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème »
Retraduire la solution mathématique en termes de la situation dont le problème est issu et estimer la pertinence de la réponse	« valider ou invalider un modèle »

TABLE 1 – Apparitions des principales phases de la démarche de modélisation dans le préambule du programme de cycle 4.

illustrer cette interprétation du préambule par le cycle de modélisation très

simplifié de la Figure 2.

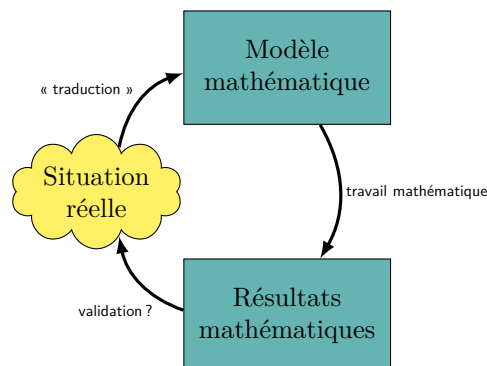


FIGURE 2 – Cycle de modélisation minimal.

Ces trois étapes principales ne sont cependant pas présentées aussi clairement dans le programme, qui ne demande d'ailleurs aucunement de les mettre en œuvre simultanément sur une même situation. Si elles apparaissent les unes à la suite des autres, c'est peut-être autant dû au mode de présentation par liste de compétences qu'à une volonté de montrer une démarche de modélisation simplifiée dans son ensemble. Le premier élément de la liste mélange d'ailleurs les deux premières phases du cycle minimal de la Figure 2. Quant au dernier, il n'explicite pas la phase d'interprétation des résultats de l'étude mathématique dans les termes de la situation réelle et passe directement à la phase de validation ou d'invalidation du modèle (dont on considère ici qu'elle sous-entend d'avoir effectué cette traduction).

Même s'il nous semble qu'on peut considérer que ce cycle de modélisation minimal est présent dans ce programme, ce qui autorise à le mettre en œuvre dans le cours de mathématiques, il reste à une place assez discrète et sous une forme peu reconnaissable pour les personnes non prévenues. Il n'y a aucune apparition des compétences de modélisation dans les attendus de fin de cycle des différents thèmes du programme, et très peu dans le détail des notions à étudier¹, donc très peu d'incitations à mettre en œuvre cette démarche. En particulier, le programme de probabilités, dont l'enseignement est pourtant fondamentalement situé entre théorie et applications, à ce niveau, ne fait aucune référence à la modélisation pour gérer les liens entre ces deux mondes. L'article [Vin25] montre le paradoxe - parmi d'autres - consistant à généraliser l'enseignement des probabilités dans le secondaire sans fournir aux élèves les outils permettant de comprendre la manière de les appliquer à des situations issues de

1. On trouve « Modéliser et résoudre des problèmes mettant en jeu la divisibilité (engrenages, conjonction de phénomènes, etc.) » dans les compétences associées au thème A - *Nombres et calculs*, « Modéliser un phénomène continu par une fonction. - Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire. - Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions » dans celles associées au thème B - *Organisation et gestion de données, fonctions*.

la réalité.

En pratique, le cycle de modélisation minimal que nous venons de décrire est sans doute très peu utilisé, et encore moins enseigné en tant que tel, pour les raisons que nous venons d'évoquer et pour celles que nous donnons maintenant.

Un manque d'indications de mise en œuvre. Le cycle de modélisation de Blum et Leiß, bien que cadre de référence de la démarche de modélisation, ne nous paraît pas être entré dans la culture commune des mathématiciens ou des enseignants. Pour que le très faible nombre d'apparitions des compétences de modélisation dans les contenus du programme puisse être utilement reprises par ces derniers, encore faudrait-il qu'elles soient accompagnées par un minimum d'indications de mises en œuvre. Il n'y en a aucune dans ce programme dont on a vu qu'il ne présente pas la démarche de modélisation de façon très claire. Quant au document [16] qui accompagnait la version 2015 du programme du cycle 4 (très proche de celle que nous considérons), il insiste plutôt sur les difficultés de mise en œuvre d'une démarche de modélisation complète (construire un modèle à partir d'observations du réel, y trouver des résultats, les confronter à la réalité), en termes de temps nécessaire et d'accès aux théories mathématiques adéquates, voire même de gestion du travail en groupe. Il présente tout de même succinctement les trois phases du cycle minimal de la Figure 2 et insiste sur la distinction nécessaire entre monde réel et modèle mathématique, en particulier dans le domaine des probabilités². Cependant, il ne propose pas de cadre simple pour présenter cette démarche aux élèves et n'en fait pas un objectif d'enseignement. Notons de plus que les premières références bibliographiques qu'il cite mélangent modélisation intra et extra-mathématique.

La concurrence de la théorie des grandeurs. Enfin, comme on l'a indiqué plus haut, le programme de cycle 4 accorde une grande place à la théorie des grandeurs, puisqu'un thème sur les cinq détaillant les contenus, intitulé *Grandeurs et mesures*, lui est consacré. Comme dans l'approche critique, on applique les mathématiques directement aux objets du monde réel, ce qui annihile la nécessité et même la possibilité de réfléchir aux liens entre les deux mondes.

On ne peut que s'étonner de la coexistence, dans le même programme du cycle 4, de deux approches contradictoires de la relation entre mathématiques et monde réel. Le niveau scolaire auquel on devrait confronter les élèves à la complexité des liens entre les mathématiques et le monde réel peut faire débat. Il faut cependant prendre garde qu'occulter cette complexité amène à un appauvrissement radical du sens de l'activité mathématique, qui risque d'en détourner bon nombre d'élèves, à l'âge où ceux-ci développent leur esprit critique et tendent à remettre en question ce qu'on leur enseigne. On présente plus loin une activité d'initiation à la modélisation basée sur l'utilisation du modèle

2. La différence de nature qu'il énonce entre les affirmations « une pièce équilibrée a autant de chances de tomber sur pile ou sur face » et « l'eau bout à 100°C » nous paraît mal fondée : elles sont toutes les deux issues d'une modélisation de la réalité, ce qui fait qu'elles ne l'expliquent que dans certaines limites, les conditions de validité de chaque modèle.

proportionnel pour calculer le prix des pommes, qui ne prend sens que si l'on indique les limites du modèle, c'est-à-dire si l'on inscrit le calcul dans une démarche réfléchie de modélisation. Le programme du cycle 4, dans son premier volet *Les spécificités du cycle des approfondissements*, semble pousser à confronter les élèves à cette complexité, à les inciter à faire des choix, en particulier en utilisant la démarche de modélisation [20b, p.3] :

L'élève développe ses compétences par la confrontation à des tâches plus complexes où il s'agit de réfléchir davantage que ce soit en termes de connaissances, de savoir-faire ou d'attitudes. Il est amené à faire des choix, à adopter des procédures adaptées pour résoudre un problème ou mener à bien un projet. (...) L'abstraction et la modélisation sont bien plus présentes désormais, ce qui n'empêche pas de rechercher les chemins concrets qui permettent de les atteindre.

La faible place accordée à la modélisation dans la mise en pratique du programme du cycle 4 est d'autant plus regrettable que, comme on va le voir maintenant, les principes de la modélisation ne sont quasiment plus évoqués dans les programmes de mathématiques de la classe de seconde et de la spécialité *mathématiques* de celle de première du lycée général, comme s'ils étaient censés être acquis à la fin du collège.

3.3 En seconde

La modélisation apparaît assez peu, en tant que telle, dans le détail du programme [19b], qui est très centré sur les contenus disciplinaires. Par exemple il n'en est pas fait mention dans les « quelques lignes directrices pour l'enseignement » où un équilibre est pourtant préconisé entre plusieurs types d'activités d'apprentissage. Dans la partie *Nombres et calcul*, il est proposé d'exercer les capacités de calcul littéral directement sur des relations entre grandeurs physiques ($U = RI$, $d = vt$) ou mathématiques (des aires ou des volumes), sans autre précaution ni passage par l'étape de mathématisation de la modélisation. Peut-être considère-t-on, à juste titre, que ces relations sont déjà mathématisées, mais cela est-il clair dans l'esprit des élèves, voire de leurs enseignants ? On peut en douter lorsque l'on constate à l'arrivée en filière scientifique dans le supérieur que certains étudiants ne savent pas déduire la relation $I = U/R$ de la précédente. Il est conseillé d'introduire les vecteurs comme « outil permettant d'étudier des problèmes issus des mathématiques et des autres disciplines, en particulier de la physique », toujours sans indication de la démarche de modélisation, puis, dans la partie *Fonctions* :

« La modélisation d'une dépendance par une fonction apparaît dans des domaines très variés : géométrie dans le plan ou dans l'espace, biologie, économie, physique, sciences sociales. La modélisation de phénomènes dépendant du temps, la variable étant alors notée t , est mise en évidence. »

Tout cela sans aucun développement supplémentaire, ni indication sur la façon de pratiquer cette modélisation (sinon la précision sur la lettre à utiliser pour la variable représentant le temps, fort utile !). La modélisation n'apparaît finalement un peu substantiellement que dans la partie *Statistiques et probabilités*, dans l'introduction de laquelle les lois de probabilités sont décrites comme suit.

« On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'explicitier ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle. »

Ce long commentaire montre, en creux, l'intérêt qu'il y aurait à développer chez les élèves les compétences de modélisation au cycle 4, au moins avec les trois temps mentionnés plus haut, afin de les habituer à bien distinguer le modèle de la situation réelle et de leur permettre ici de bien comprendre le statut des lois de probabilités choisies pour modéliser une situation. On notera que si le programme insiste sur la distinction entre modèle et réalité, il ne dit rien de la manière de choisir le modèle ou de celle de le valider ou de l'invalider.

Bizarrement, la sous-partie sur les statistiques, une des branches les plus appliquées des mathématiques, ne fait aucune référence à la modélisation, tandis que celle sur les probabilités reçoit le joli titre « Modéliser le hasard » et insiste à nouveau sur la différenciation entre modèle et réalité : « Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité ».

Au final, peu de mentions de la notion de modélisation et encore moins d'explications ou de détails sur la façon de la mettre en œuvre, alors même qu'avec les progrès des élèves en mathématiques et l'acquisition de nouvelles connaissances, le champ d'applications potentielles s'élargit nettement par rapport à ce qu'il était au collège.

3.4 En première (enseignement de spécialité)

La modélisation apparaît là encore discrètement dans le programme [19a] et toujours sans aucun détail sur la mise en œuvre. Voici une liste (plus ou moins exhaustive) des mentions de ce processus :

- « Les suites interviennent comme modélisations d'évolutions à temps discret rencontrées dans les autres disciplines : évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une population, décroissance radioactive. »
- « Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. »

- « Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique. »
- « Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution. »
- « Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières). »
- « Comme en seconde, on distingue nettement modèle et réalité. Ainsi, une hypothèse d'indépendance fait partie d'un modèle : elle peut être un point de départ théorique ou être la conséquence d'autres hypothèses théoriques. Lorsque le modèle est appliqué à une situation réelle (par exemple, lancer de deux dés physiques), l'indépendance fait partie de la modélisation et résulte de l'analyse de la situation physique. »

Comme celui de seconde, ce programme ne propose pas de description de la démarche de modélisation ni d'indication pour sa mise en œuvre, comme si cette démarche était un acquis du collège. Hypothèse qui semble peu crédible d'après notre analyse de sa place dans l'enseignement des mathématiques au cycle 4 dans la partie 3.2 ci-dessus. D'où viennent donc les compétences des élèves dans ce domaine ?

3.5 La démarche scientifique

La modélisation mathématique s'inscrit dans le cadre plus large de la démarche scientifique. Les programmes de mathématiques y font assez peu référence, bien que l'un des enjeux essentiels de la formation citoyenne des élèves soit de leur faire prendre conscience de la différence fondamentale entre la construction scientifique de la connaissance et les croyances véhiculées par les religions, traditions ou encore par des rumeurs (différence qui n'induit pas nécessairement un jugement de valeur), en particulier pour les prémunir des torrents de désinformations parfois véhiculés par les réseaux sociaux et autres media d'aujourd'hui.

Cette construction se fait par des allers-retours entre observations, expérimentations et théorisation (à travers la modélisation). Les heures d'enseignement des sciences permettent une première approche de l'expérimentation et de son usage pour faire évoluer la connaissance scientifique : si une nouvelle expérience aboutit, dans des conditions reproductibles et contrôlées, à des résultats remarquables, on tentera d'expliquer ceux-ci à l'aide d'une théorie existante,

dont la validité se trouvera alors renforcée par cette nouvelle capacité d'explication, ou sinon en imaginant les nouvelles lois nécessaires à cette explication, qui deviendront alors des hypothèses à tester en imaginant des expériences *ad-hoc*. Il est à noter que ces « expériences » peuvent être, au stade ultime, l'application des lois ainsi construites à la réalisation d'objets technologiques, dont le fonctionnement lui-même atteste de leur validité.

Un point important et délicat à faire comprendre est que, bien que la validité des théories scientifiques qui expliquent le monde soit toujours relative (chaque développement de la connaissance remet partiellement en cause certaines connaissances antérieures), ces théories n'en restent pas moins beaucoup plus solides que toutes les autres manières de construire des explications du monde. De fait les remises en cause produites par les nouvelles découvertes consistent généralement à mieux circonscrire le domaine de validité des anciennes connaissances, sans rien leur ôter de leur pertinence à l'intérieur de ce domaine. L'exemple immédiat qui vient à l'esprit est celui de la théorie de la relativité d'Einstein : elle consiste en une modification des lois établies auparavant par Newton pour les rendre plus universelles (afin d'expliquer les résultats d'expériences jusque là « paradoxales »), modification qui n'en est vraiment une que pour des objets dont la vitesse se rapproche de celle de la lumière, autant dire que les lois de Newton restent complètement valables dans de très nombreuses situations, en particulier les plus courantes à notre échelle³. Il y a aussi de véritables révolutions scientifiques, qui font table rase ou quasiment des connaissances antérieures : en biologie, la classification des espèces issue des analyses ADN n'est pas du tout un raffinement de l'ancienne basée d'une part sur les ressemblances entre espèces et d'autre part sur les possibilités de reproduction croisée.

Cette très brève présentation de la démarche scientifique permet de voir que la modélisation mathématique, telle qu'elle est décrite dans le programme du cycle 4, en est un cas particulier en ce sens qu'elle pourra consister à valider ou invalider un modèle : je fais l'hypothèse que la situation réelle que j'étudie se traduit d'une certaine façon en langage mathématique ; les outils mathématiques dont je dispose permettent alors d'en déduire certaines conséquences que je peux comparer, une fois retraduites dans le langage de la situation d'origine, aux observations faites dans celle-ci ; selon que les conséquences et les observations coïncident ou non, on est amené à valider le modèle mathématique utilisé (au moins pour cette situation précise) ou à l'invalider et à en chercher un autre.

L'initiation des élèves à la démarche scientifique et à travers elle la formation de leur esprit critique plaident donc également pour l'enseignement et la pratique de la modélisation mathématique.

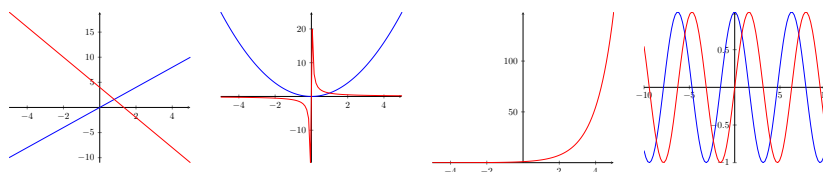
3. Notons cependant qu'il faut tenir compte des modifications d'Einstein pour permettre à la localisation GPS de fonctionner, du fait qu'elle associe des données provenant de plusieurs satellites.

4 Travail dans le groupe IREM

Nous décrivons ici le cheminement du travail de l'ERR⁴ “Modéliser au cycle 4” de l'IREM de Limoges, qui a mené à l'activité d'initiation à la modélisation présentée dans la partie 5. Ce groupe, qui se réunit à Brive-la-Gaillarde, est composé de deux enseignants de mathématiques en collège à Brive-la-Gaillarde : Jessica Barrière (collège Cabanis) et Guillaume Vergne (collège Jean Moulin), et trois enseignants-chercheurs de l'université de Limoges : Christophe Clavier (informatique), Stéphanie Lhez (chimie) et Stéphane Vinatier (mathématiques). Le même groupe a travaillé auparavant (2019-23) sur l'initiation au raisonnement mathématique [Vin23].

4.1 Approche par des modèles fonctionnels

Le groupe s'est d'abord focalisé sur la recension de modèles mathématiques pouvant être utiles à la modélisation, sous forme d'un répertoire de graphes de fonctions, linéaires ou affines, carrée, inverse, exponentielle, trigonométriques :



Ce répertoire est non exclusif d'autres fonctions pouvant apparaître au cours de travaux pratiques, comme dans celui de biologie décrit sur la page [Dro24], dont on tire l'image représentée en Figure 3. La courbe qui y apparaît pourrait, aux yeux d'un mathématicien, correspondre au recollement des graphes de deux fonctions, exponentielle et exponentielle inverse. Il est cependant plus intéressant, pour rendre compte de l'évolution étudiée, de la découper en trois parties (délimitées par les traits verticaux en pointillés), pour faire apparaître la *phase exponentielle de croissance* dans la partie centrale, laquelle sera modélisée par une fonction affine après passage au logarithme.

On observe sur cet exemple une distorsion analogue à celle distinguant les approches par compétences et épistémologiques de la modélisation, entre l'utilisation d'une image tirée d'une observation réelle comme prétexte à faire des mathématiques (chercher une fonction dont le graphe s'approchera au mieux de la courbe, sans se préoccuper du lien entre cette fonction et la situation) ou l'utilisation des mathématiques pour expliquer les observations réelles, en se basant sur la compréhension (non mathématique) de la situation, cet autre point de vue menant ici à un tout autre modèle, plus efficace pour rendre compte de la réalité. L'idée d'utiliser un répertoire de graphes de fonctions en calquant ceux-ci directement sur des résultats graphiques paraît donc un peu trop simpliste.

4. Équipe de recherche et de réflexion inscrite au plan de formation académique.

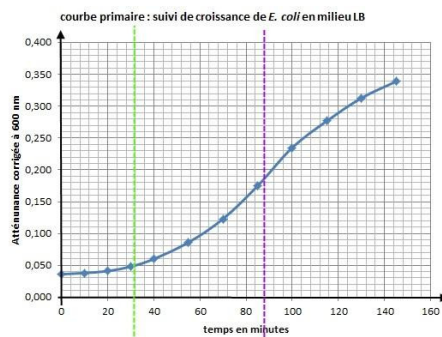


FIGURE 3 – Courbe de croissance d’une population de bactéries en milieu non renouvelé.

4.2 Chercher la frontière

La réflexion du groupe a continué sur la recherche des limites séparant le monde mathématique et le monde réel. Sur le principe, ces limites sont définies par [Blu+02, p.152] comme suit :

Par « monde réel », nous entendons tout ce qui a trait à la nature, à la société ou à la culture, y compris la vie quotidienne ainsi que les matières scolaires et universitaires ou les disciplines scientifiques et savantes autres que les mathématiques.⁵

Comme indiqué plus haut, nous en retenons que le monde réel est le *complémentaire* dans notre réalité de la construction axiomativo-déductive des mathématiques.

En pratique, il n’est pas toujours aisé de délimiter si précisément cette frontière, tant les mathématiques, ou au moins une partie d’entre elles, sont entrées dans la culture commune. On peut s’en convaincre en considérant les quelques phrases suivantes :

- Le terrain de football est rectangulaire.
- Les arbres sont alignés le long de l’allée.
- La croissance peut-elle être exponentielle ?
- Les deux pommes sont appétissantes.
- Un objet plat de forme triangulaire, dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm a-t-il un angle droit ?

A-t-on conscience d’utiliser un modèle mathématique lorsqu’on parle de *deux* pommes ? Les entiers naturels, comme leur nom l’indique, nous paraissent si familiers qu’on pourrait croire qu’ils font partie du monde réel. Tout comme, de façon plus étonnante, l’idée de croissance exponentielle (cependant moins bien comprise en général). Peut-être est-il plus facile, en y réfléchissant, de percevoir

⁵. By real world we mean everything that has to do with nature, society or culture, including everyday life as well as school and university subjects or scientific and scholarly disciplines different from mathematics.

l'utilisation d'un modèle mathématique lorsqu'on parle de terrain *rectangulaire* : on tombe forcément d'accord sur le fait qu'un terrain de football n'est « rectangulaire » qu'à quelque chose près, de l'ordre sans doute du centimètre, voire du décimètre, pour ce qui est des longueurs des côtés opposés ; de même pour l'*angle droit*, ou pour le triangle *rectangle*, qui n'existent pas dans le monde réel : les mesures des côtés physiques sont toujours prises à une certaine précision, ce qui empêche d'obtenir l'égalité parfaite sur les carrés des longueurs requise par le théorème de Pythagore. Il n'existe d'ailleurs même pas de *triangle* dans le monde réel, car il n'existe pas de *point* au sens mathématique (sans dimension, sans épaisseur), ni à fortiori de points *alignés*.

Le terrain de football du monde réel n'est donc rectangulaire que dans le sens où il est tout à fait valide, pour la plupart des questions qu'on pourrait se poser à son sujet, de le modéliser par un rectangle mathématique. En gardant en tête qu'il s'agit là d'un modèle, et non de la réalité, qu'on a nécessairement simplifiée pour pouvoir l'étudier. Ceci est évidemment encore vrai lorsqu'on parle de croissance exponentielle, puisqu'il est bien certain que le modèle exponentiel ne peut s'appliquer à des situations réelles que dans des limites à déterminer.

Revenons à nos pommes : quand nous prétendons en avoir *deux*, c'est là aussi au prix d'une simplification de la réalité, qui nous fait considérer comme identiques des fruits pourtant distincts. Chaque pomme, chaque être vivant, chaque objet du monde physique est « un », est unique, est distinct de tous les autres. La modélisation consiste ici à abandonner les différences incontestables entre les pommes, en les idéalisant à partir de ce qui les fait se ressembler plutôt qu'en s'attachant à ce qui les distingue. Ce qu'on compte, ce ne sont donc pas les vraies pommes, ce sont plutôt les pommes idéalisées, mathématisées, que notre modèle implicite leur fait correspondre. Et ce n'est finalement pas une mince affaire que de pouvoir ainsi catégoriser les objets qui nous entourent, pour organiser notre perception de la réalité et mieux l'appréhender.

Nous constatons que les liens entre mathématiques et monde réel sont partout, y compris dans les situations les plus simples. On peut donc envisager l'initiation à la modélisation à partir de situations très simples, en particulier pour rendre explicite l'utilisation (très fréquente) de modèles.

4.3 Expliciter l'existence d'un modèle

Partons d'une situation réelle très simple :

J'achète des pommes à 2 euros le kg.

et travaillons sur les *limites* du modèle, pour rendre celui-ci apparent. Dans cette situation, on peut par exemple demander combien coûtent 1 kg, 10 kg, 100 kg ou 10 g de pommes.

Il pourrait s'agir d'un simple habillage réel d'une situation mathématique de proportionnalité, auquel cas on trouverait la réponse en appliquant le coefficient de proportionnalité $\times 2$ pour passer de la masse en kg au prix en euro. Si au contraire on s'attache au sens dans la situation réelle des calculs que l'on mène dans le modèle mathématique, c'est-à-dire si l'on effectue les étapes (5) et (6) du

cycle de modélisation présenté dans la partie 2, on découvre que ces calculs ne sont pas toujours pertinents, voire même que leurs résultats n'ont pas vraiment de sens, dans le monde réel : le prix indiqué est un prix de vente au détail, qui ne s'applique certainement pas à une quantité de pommes aussi importante que 100 kg, laquelle va donc faire intervenir un autre modèle mathématique (il n'est d'ailleurs pas certain que l'épicier du coin ait une réserve de pommes aussi importante) ; même pour 10 kg de pommes, quel marchand ayant un minimum de sens commercial n'accordera pas une ristourne sur le prix total ou n'offrira pas une ou plusieurs pommes en cadeau, réduisant ainsi le prix payé par kg ? Enfin tout le monde sait qu'il est impossible d'acheter 10 g de pommes : le marchand ne va pas, contrairement au boucher, découper l'une de ses pommes pour donner la masse exacte demandée par le client. Le calcul mathématique, tout à fait possible et même intéressant avec les changements d'unité qu'il nécessite, qui montre que 10 g de pommes coûtent 2 centimes d'euro, n'a de sens que dans le modèle mathématique, pas dans la situation réelle.

On s'aperçoit que le modèle proportionnel avec coefficient multiplicatif $\times 2$, pourtant si évident d'après l'énoncé, ne s'applique que dans certaines limites, entre la masse minimale d'une pomme et celle de la première ristourne, avec aussi la simplification due aux arrondis des masses (la précision de la balance) et des prix (précision limitée aux centimes, voire même à la dizaine de centimes avec certains marchands).

Dans cet exemple, expliciter le modèle et ses limites permet de donner plus de sens à l'exercice, en montrant le rôle exact des mathématiques (l'étape (4) du cycle de modélisation), sans laisser croire aux élèves que l'on considère que les résultats du calcul s'imposent dans la réalité, alors même qu'ils contreviennent à l'intuition (bien sûr que 100 kg de pommes coûtent moins cher au kg que 10). Éviter cette discussion pour se concentrer uniquement sur l'étape (4) de la modélisation peut provoquer l'effet inverse de celui visé en appliquant la proportionnalité à une situation réelle : les élèves sont en effet fondés à se demander à quoi servent les mathématiques, si on essaye de leur faire croire que les résultats qu'elles produisent correspondent à la réalité alors qu'ils savent très bien qu'il n'en est rien.

Un cycle de modélisation simplifié. Nous proposons de fournir aux élèves un cadre leur permettant d'explicitier la démarche de modélisation et de réfléchir aux liens entre la situation réelle et les calculs mathématiques, sous la forme d'une version simplifiée du cycle de modélisation de Blum et Leiß, présentée dans la Figure 4. Par rapport au cycle minimal de la Figure 2, nous conservons une case et une étape supplémentaire, pour insister sur l'interprétation des résultats mathématiques dans le monde réel et l'estimation de leur pertinence par rapport à celle-ci. Comme on le voit dans la Figure 4, le monde réel et le monde mathématique sont bien séparés dans le diagramme, à la fois spatialement et par les choix de couleurs.

Dans une version précédente (celle présentée lors de l'atelier de la CORFEM XXX), nous gardions une case du cycle de Blum et Leiß supplémentaire, pour

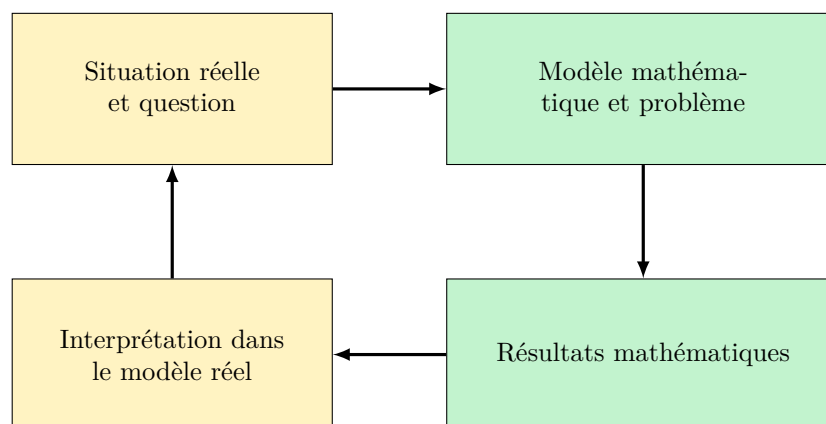


FIGURE 4 – Cycle de modélisation simplifié.

séparer la situation réelle et le modèle réel. Il nous a semblé ensuite préférable de simplifier au maximum la partie « horizontale » de la modélisation pour nous concentrer sur un cycle complet qui, bien que simplifié, porte l’essentiel du sens de la démarche de modélisation. Il n’est sans doute pas anodin que le résultat auquel nous sommes arrivés ressemble fort au cycle de modélisation mis en avant par PISA (reproduit de [Kuz22] en Figure 6).

Il s’ensuit que la « situation réelle » considérée sera souvent plutôt une situation modèle ou un modèle réel, au sens du cycle de modélisation de Blum et Leiß, ou alors elle sera suffisamment simple pour que son analyse, sa simplification / structuration et sa traduction en modèle mathématique puissent se faire en une seule étape, comme dans le cas de l’exemple de la partie 4.3, dont la mise en diagramme est présentée en Figure 5.

On y note l’importance de la flèche verticale de gauche, pour évaluer la pertinence de l’interprétation dans la situation réelle de chacun des résultats de calcul, et délimiter ainsi les conditions de validité du modèle utilisé. Par ailleurs, dans le modèle présenté, la traduction de la situation réelle en modèle mathématique fixe les unités physiques et monétaires, de manière à pouvoir travailler sur des nombres “mathématiques”, c’est-à-dire sans unités physiques ou autres. On peut évidemment faire d’autres choix à cet endroit, en fonction du niveau d’abstraction des élèves.

Nous donnons dans la partie suivante une version compactée de la fiche d’activité conçue par le groupe IREM pour des élèves de collège (dès la classe de 6^e), complétée par un exercice d’application pour le lycée. La fiche est téléchargeable en fichier pdf à l’adresse :

https://www.unilim.fr/pages_perso/stephane.vinatier/ArticlesIREM/activite1-mod.pdf

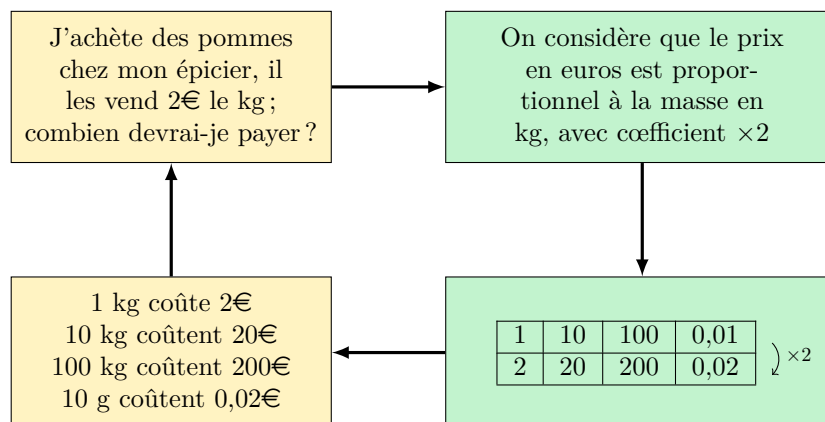


FIGURE 5 – Cycle de modélisation simplifié appliqué au prix des pommes.

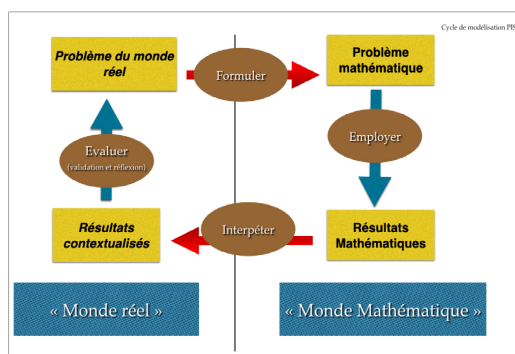


FIGURE 6 – Cycle de modélisation mis en avant par PISA (cité dans [Kuz22]).

5 Une activité d'initiation à la modélisation

5.1 Un exercice de découverte

Un marchand vend des pommes dans son épicerie de quartier. Elles ont l'air bonnes, je veux en acheter. Une étiquette indique : « 2€ le kg ».

D'après vous, combien coûtent :

- 1 kg de pommes ?
- 10 kg de pommes ?
- 100 kg de pommes ?
- 10 g de pommes ?

N'y aurait-il pas des limites à notre raisonnement :

- Est-il possible d'acheter 100 kg de pommes chez ce marchand ?
- Si vous achetez 10 kg de pommes, pensez-vous que le marchand vous en offrira une ou deux en plus ?
- Est-il possible d'acheter 10 g de pommes ?
- Est-il vraiment possible d'acheter exactement 1 kg de pommes ?

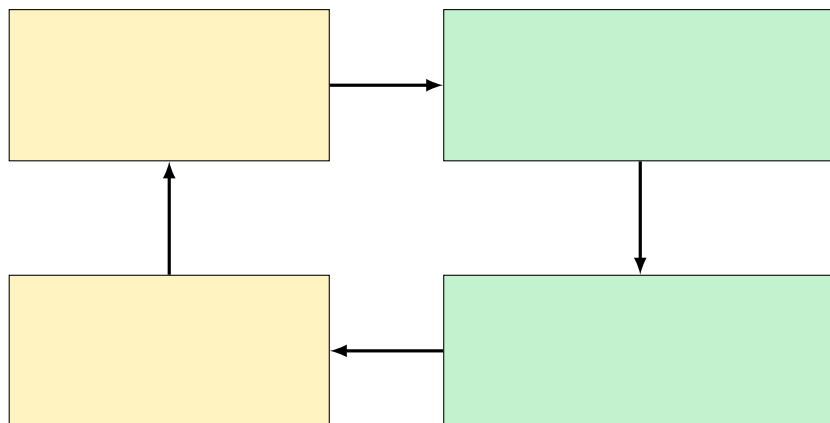


FIGURE 7 – Schéma de la modélisation mathématique (à recopier et compléter).

5.2 Exercices d'application

Exercice 1. Le même épicier, qui vend ses pommes à 2€ le kg, me consent une réduction de 10% à partir de 5 kg achetés.

1. Quel est alors le prix d'1 kg de pommes, de 10 kg de pommes, de 100 kg de pommes ?
2. Compléter le schéma de la modélisation mathématique de la Figure 7.
3. Vaut-il mieux acheter 2 kg de pommes par semaine pendant 5 semaines ou 10 kg en une seule fois ?

Exercice 2. Un cageot à pommes de dimensions $50 \times 40 \times 30$ cm contient environ 24 kg de pommes.

1. L'épicier dispose d'une cave de 20m^2 au sol et de 2m de haut. En la remplissant au maximum, quelle quantité de pommes peut-il y stocker ?
2. Compléter le schéma de la modélisation mathématique de la Figure 7.
3. Combien de tonnes de pommes la salle de classe peut-elle contenir ?

Exercice 3 (Lycée). Allongé sur le sable auprès de l’eau, sur la plage, Georges regarde un paquebot s’éloigner vers l’horizon depuis le port de Marseille. Le bras tendu devant lui avec le pouce posé sur l’horizon, il remarque que le haut du bateau coïncide avec le haut de sa main ouverte, c’est-à-dire que l’angle entre la direction de l’horizon et celle du haut du bateau mesure approximativement 20° .

1. Sachant que le haut du paquebot est à 65 m au-dessus de l’eau, à quelle distance de Georges se trouve-t-il ? On complètera le schéma de modélisation mathématique.
2. Le paquebot avance à une vitesse moyenne de 21 nœuds, soit environ 39 km/h. Depuis combien de temps est-il parti quand Georges l’observe ?
3. À quelle distance de Georges se trouvera-t-il 45min après son départ ? Sous quel angle pourra-t-il alors l’observer ?
4. À titre de comparaison, déterminer sous quel angle on voit la Lune depuis la Terre, sachant que son diamètre est d’environ 3 475 km et qu’elle se trouve (en moyenne) à 384 000 km de la Terre. Georges verra-t-il le paquebot 45min après son départ ?
5. Après un bon bain rafraichissant, Georges tente de nouveau d’apercevoir le paquebot, 45min après son départ. Il scrute l’horizon... rien. Même avec des jumelles, absolument aucune trace du paquebot. A-t-il sombré ? Georges doit-il prévenir les secours ?

On pourra examiner la situation à travers un nouveau modèle inspiré par la Figure 8.

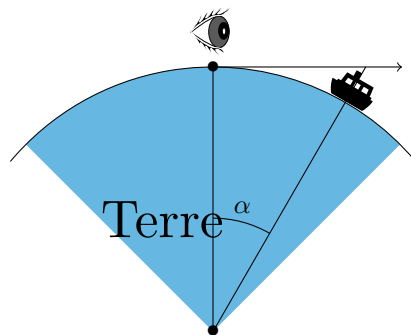


FIGURE 8 – Le rayon de la Terre mesure environ 6 378 km.

6 Conclusion

Nous avons proposé un cadre simplifié pour que les enseignants puissent présenter le cycle de modélisation mathématique à leurs élèves dès le collège et leur

fournissent un outil permettant de réfléchir à toute application des mathématiques à une situation tirée du monde réel, développant ainsi les compétences de base de la démarche de modélisation. Cet outil (Figure 4) est simple à expliquer et à mettre en œuvre, et les tests qui ont été effectués en classe de 6^e ont été très positifs. L’enrichissement du sens des calculs mathématiques qu’il permet a été souligné.

Nous pensons que l’acquisition des compétences de base de la démarche de modélisation est un préalable indispensable à l’approfondissement de très nombreux apprentissages mathématiques, notamment en probabilités où les liens avec des situations tirées du monde réel sont constants. Ces compétences devraient donc devenir un véritable objet d’enseignement du cycle 4, inscrit dans les attendus de fin de cycle et évalué en tant que tel sous une forme ou sous une autre (l’outil schématique de la Figure 4 n’est qu’une des formes possibles).

Références

- [Art+09] M. ARTIGUE et al. “Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie : l’expérience du Master professionnel « Didactique » à l’université Paris-Diderot -Paris 7”. In : *Approches plurielles en didactique des mathématiques*. Sous la dir. d’Ouvrier-Buffet C. et Perrin-Glorian M.J. 2009, p. 277-293.
- [BAR+14] Dominique BAROUX-RAYMOND et al. “MPS « Science et vision du monde ». Un exemple de scénario”. In : *Petit x* 96 (2014), p. 31-49.
- [Blu+02] Werner BLUM et al. “ICMI Study 14 : Applications and modelling in mathematics education – Discussion document”. In : *Educational Studies in Mathematics* 51 (2002), p. 149-171. URL : <https://doi.org/10.1023/A:1022435827400>.
- [BL06] Werner BLUM et Dominik LEISS. “Filling up - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks”. In : *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (2005)*. Sous la dir. de Marianna BOSCH. Europeans research in mathematics education 4. United Kingdom : CERME, 2006, p. 1623-1633.
- [Dro24] Sébastien DROGUET. *Croissance microbienne - Suivi de croissance (M)*. 2024. URL : <https://droguet-sebastien.e-monsite.com/pages/activites-technologiques-terminale-2014-2015/at11-croissance-microbienne-2eme-partie.html>.
- [GY24] Marie-Line GARDES et Sonia YVAIN-PRÉBISKI. “Interroger l’enseignement de l’activité de recherche et de modélisation mathématique : pourquoi et comment ? Exemple de deux dispositifs de formation à l’Université”. Prépublication. 2024.

- [JS23] Pierre JOB et Maggy SCHNEIDER. *Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?* Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en mathématiques. Commission inter-IREM Didactique. Mai 2023. URL : https://irem.univ-poitiers.fr/colloque2023/Presentation_26_05_23_v_5_Pierre_Job.pdf.
- [Kuz22] Alain KUZNIAK. *Enseigner la modélisation mathématique pour enseigner les mathématiques : une dynamique problématique*. Séminaire de l'IREM de Paris. 16 mars 2022. URL : <https://video.irem.univ-paris-diderot.fr/w/sGUYR3ZyQeiv4FpBGa3EGq>.
- [KV11] Alain KUZNIAK et Laurent VIVIER, éd. *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques. Mise en perspective critique*. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) 3. Paris : IREM de Paris 7 - université Denis Diderot, 2011.
- [Maa06] K. MAASS. "What are modelling competencies?" In : *ZDM* 38.2 (2006), p. 113-142.
- [16] "Modéliser". In : *Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques au cycle 4*. Eduscol, mars 2016. URL : <https://eduscol.education.fr/document/17218/download>.
- [19a] "Programme de mathématiques de première générale". In : *Bulletin officiel de l'éducation nationale* 1 (22 jan. 2019). URL : <https://eduscol.education.fr/document/24565/download>.
- [19b] "Programme de mathématiques de seconde générale et technologique". In : *Bulletin officiel de l'éducation nationale* 1 (22 jan. 2019). URL : <https://eduscol.education.fr/document/24553/download>.
- [20a] "Programmes du cycle 3. En vigueur à la rentrée 2020". In : *Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports* 31 (30 juill. 2020). URL : https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/88/7/ensel714_annexe2_1312887.pdf.
- [20b] "Programmes du cycle 4. En vigueur à la rentrée 2020". In : *Bulletin officiel de l'éducation nationale, de la jeunesse et des sports* 31 (30 juill. 2020). URL : <https://eduscol.education.fr/document/621/download>.
- [Vin23] Stéphane VINATIER. "Conjectures et preuves". In : *Actes du Colloque « Raisonner en arithmétique. Est-ce incongru ? »*. Commissions inter-IREM Collège et Lycée. Talence, juin 2023, p. 130-145. URL : https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/actes-bordeaux_compressed.pdf.
- [Vin25] Stéphane VINATIER. "Les paradoxes du paradoxe des anniversaires". In : *Repères IREM (à paraître)* (2025).

- [Yva21] S. YVAIN-PRÉBISKI. “Didactical adaptation of professional practice of modelling : a case study”. In : *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Sous la dir. de F.K.S. LEUNG et al. Springer, 2021, p. 305-319. DOI : https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26.
- [YM23] Sonia YVAIN-PRÉBISKI et Blandine MASSELIN. “La modélisation à partir d’une situation extra-mathématique”. In : *Repères IREM* 131 (2023).