

Arrangements d'hyperplans et coloriage de graphes

Stéphane VINATIER

1. ARRANGEMENTS DE DROITES DANS LE PLAN

1.1. Un problème historique. C'est le point de départ de la théorie : en combien de « régions » un ensemble fini A de droites découpe-t-il le plan ? La réponse générale est connue depuis le XIX^e siècle. Elle s'exprime en fonction des données suivantes :

- p_0 est le nombre de points d'intersection de A (sans multiplicité) ;
- $p_1 = |A|$ est le cardinal de A ;
- p_{01} est le nombre de paires constituées d'une droite de A et d'un de ses points d'intersection.

Notons f_1 le nombre de « segments » (bornés ou non) et f_2 le nombre de « régions » (bornées ou non) de l'arrangement A . Le résultat général est :

Théorème 1.1. $f_1 = p_1 + p_{01}$, $f_2 = 1 - p_0 + p_1 + p_{01}$.

Par exemple :

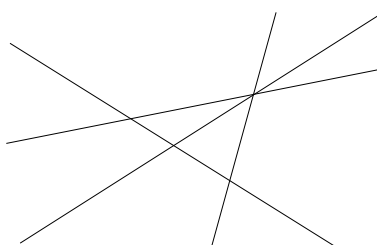


FIG. 1. $p_0 = 4$, $p_1 = 4$, $p_{01} = 9$; $f_1 = 13$, $f_2 = 10$.

Exercice 1.2. En déduire les formules donnant le nombre de segments et de régions bornés (variables à condition que les droites de A ne soient pas toutes parallèles) :

$$f_1^b = -p_1 + p_{01}, \quad f_2^b = 1 - p_0 - p_1 + p_{01}.$$

Prouve. La formule pour f_1 se démontre facilement et de manière directe : le nombre f_1 de segments est la somme des nombres de segments sur chacune des droites, lesquels valent 1 plus le nombre de points d'intersection de cette droite ; ceci donne le résultat pour f_1 .

On montre la formule donnant f_2 par récurrence sur $|A|$, faute de disposer d'une démonstration directe. Si $|A| = 0$, on a $p_0 = p_1 = p_{01} = 0$ et $f_2 = 1$; si $|A| = 1 = p_1$, on a $p_0 = p_{01} = 0$ et $f_2 = 2$. Supposons le résultat vrai pour une famille A et notons A' la famille obtenue en ajoutant à A une droite D distincte de toutes les droites de A . On a donc

$$p'_1 = p_1 + 1 .$$

Soient m le nombre de nouveaux points d'intersection créés par D (et donnant lieu à deux nouvelles paires « droite-point ») et n le nombre de points d'intersection de A' coïncidant avec d'anciens points d'intersection de A (et donnant lieu à une seule nouvelle paire), alors

$$p'_0 = p_0 + m , \quad p'_{01} = p_{01} + n + 2m .$$

Enfin, la droite D découpe une nouvelle région à chaque fois qu'elle rencontre une droite de A , puis encore une nouvelle région (non bornée) lorsqu'elle quitte la zone des intersections, si bien que

$$f'_2 = f_2 + n + m + 1 .$$

Il ne reste qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence pour f_2 et à utiliser les relations écrites ci-dessus. ■

Exercice 1.3. *On considère le cas particulier d'un arrangement A de droites en position générale : 2 droites de A ne sont pas parallèles, 3 droites de A ne sont pas concourantes. Montrer qu'alors*

$$f_1 = |A|^2 , \quad f_2 = \frac{|A|^2 + |A| + 2}{2} .$$

1.2. Vers une généralisation. L'arrangement d'hyperplans permet de définir une décomposition du plan en « cellules » de dimensions 0 (les points d'intersection), 1 (les segments) et 2 (les régions). Notons $f_0 = p_0$ le nombre de points d'intersection, alors pour $0 \leq k \leq 2$, f_k désigne le nombre de cellules de dimension k et les formules établies ci-dessus montrent qu'on a

$$(1) \quad f_0 - f_1 + f_2 = 1 .$$

En rajoutant un point à l'infini vers lequel toutes les demi-droites convergent (donc f_0 augmente de 1, f_1 et f_2 sont inchangés), le plan devient homéomorphe à la sphère S^2 , dont l'arrangement augmenté du point à l'infini fournit une décomposition cellulaire. La somme alternée des nombres de cellules de différentes dimensions est un invariant topologique de S^2 appelé sa *caractéristique d'Euler-Poincaré*; on obtient sa valeur grâce à la relation (1) :

$$\chi(S^2) = (f_0 + 1) - f_1 + f_2 = 2 .$$

Inversement, sachant que $\chi(S^2) = 2$, on retrouve la formule donnant f_2 à partir de celle qui donne f_1 (et qui est immédiate).

On peut de façon équivalente utiliser la formule d'Euler-Poincaré pour les graphes planaires :

$$s - a + f = 2 ,$$

où s désigne le nombre de sommets du graphe, a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces (c'est-à-dire le nombre de régions découpées dans le plan par le graphe), en associant à l'arrangement A , dans le cas où ses droites ne sont pas toutes parallèles, le graphe de sommets les points d'intersection des droites de A et d'arêtes les segments bornés délimités par ces points (voir ci-dessous le graphe associé à l'arrangement de la figure 1).

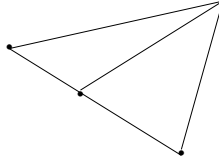


FIG. 2. $s = 4, a = 5, f = 3$.

On a alors

$$s = p_0, \quad a = f_1^b = f_1 - 2p_1, \quad f = f_2^b + 1 = f_2 - 2p_1 + 1$$

(il faut prendre en compte la région « extérieure » au graphe). La formule (1) s'en déduit.

Étant donné un arrangement d'hyperplans H dans un espace affine de dimension d sur $\mathbb{R}$, en notant encore f_k le nombre de cellules de dimension k ($0 \leq k \leq d$) de la décomposition cellulaire de l'espace définie par H , on aura de manière analogue

$$\sum_{k=0}^d (-1)^k f_k = \chi(S^d) - 1 = (-1)^d,$$

où S^d est la sphère unité de dimension d , dont on connaît par ailleurs la caractéristique d'Euler-Poincaré. À partir de cette formule, Zaslavsky a montré en 1975 comment obtenir les nombres f_k en fonction de données traduisant les relations d'incidence des hyperplans de H (et généralisant les nombres p_0 , p_1 et p_{01}). Pour ce faire, il a identifié et étudié la structure combinatoire sous-jacente au problème, que nous allons maintenant partiellement décrire.

2. OUTILS COMBINATOIRES

2.1. Fonction de Möbius-Rota. Dans toute cette section, on considère un ensemble ordonné fini L . On note $\leq$ la relation d'ordre (éventuellement partielle); l'écriture $x < y$ signifie $x \leq y$ et $x \neq y$.

Définition 2.1. Soient $x, y \in L$ avec $x \leq y$. Pour p entier naturel, on appelle chaîne de longueur p de x à y toute suite d'éléments $x_0, x_1, \dots, x_p$ de L telle que

$$x = x_0 < x_1 < \dots < x_p = y.$$

Plaçons nous par exemple dans l'ensemble $\mathbb{N}_{100}$ des entiers naturels inférieurs ou égaux à 100, muni de la relation de divisibilité :

$$a \leq b \quad \text{si} \quad a \mid b,$$

qui y définit un ordre partiel. On peut former les chaînes suivantes :

- $2 \mid 100$ est une chaîne de longueur 1 de 2 à 100 ;
- $2 \mid 4 \mid 100$ est une chaîne de longueur 2 de 2 à 100 ;
- $2 \mid 4 \mid 20 \mid 100$ est une chaîne de longueur 3 de 2 à 100 ;

c'est d'ailleurs la plus longue chaîne possible de 2 à 100 puisque $\frac{100}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 5$ se décompose en produit de trois nombres premiers. Notons qu'il y a deux autres chaînes de longueur 3 de 2 à 100 : $2 \mid 10 \mid 20 \mid 100$ et $2 \mid 10 \mid 50 \mid 100$.

Définition 2.2. Soient $x, y \in L$ avec $x \leq y$. Pour p entier naturel, on note $c_p(x, y)$ le nombre de chaînes de longueur p de x à y .

La chaîne $x = x_0$ donne $c_0(x, x) = 1$; on a évidemment $c_0(x, y) = 0$ si $x < y$. De plus, on a la relation de récurrence

$$c_{p+1}(x, y) = \sum_{x \leq z < y} c_p(x, z) = \sum_{x < z \leq y} c_p(z, y) .$$

Première. Notons $\mathcal{C}_p(x, y)$ l'ensemble des chaînes de longueur p de x à y , alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p+1}(x, y) &\longrightarrow \bigcup_{x \leq z < y} \mathcal{C}_p(x, z) \\ x=x_0 < x_1 < \dots < x_{p+1}=y &\longmapsto x=x_0 < x_1 < \dots < x_p=z \end{aligned}$$

est clairement une bijection (et la réunion de droite est disjointe), d'où la première égalité. La seconde s'obtient de façon identique. ■

On peut maintenant définir la **fonction de Möbius-Rota** de L .

Définition 2.3. Soient $x, y \in L$ avec $x \leq y$, on pose

$$\mu_L(x, y) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p c_p(x, y) .$$

Des propriétés des c_p , on déduit immédiatement que $\mu_L(x, x) = 1$ et que

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(x, z) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(z, y) = 0 \quad \text{si } x < y .$$

Première. En effet, si $x < y$,

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(x, z) = \sum_{x \leq z \leq y} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p c_p(x, z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(c_p(x, y) + \sum_{x \leq z < y} c_p(x, z) \right) ,$$

donc

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_L(x, z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (c_p(x, y) + c_{p+1}(x, y)) = 0 .$$

■

Revenons à $\mathbb{N}_{100}$ muni de la relation de divisibilité. On a vu que $c_3(2, 100) = 3$; on trouve de même que $c_2(2, 100) = 4$ et $c_1(2, 100) = 1$. Il s'ensuit que

$$\mu_{\mathbb{N}_{100}}(2, 100) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p c_p(2, 100) = 0 - 1 + 4 - 3 + 0 + \dots = 0 .$$

De fait, si on note $\mu(x) = \mu_{\mathbb{N}_{100}}(1, x)$ pour $x \in \mathbb{N}_{100}$, on retrouve la fonction de Möbius « classique », dont on peut montrer qu'elle vaut

$$\mu(x) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } x \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or $\mu_{\mathbb{N}_{100}}(2, 100) = \mu_{\mathbb{N}_{100}}(1, 50)$ et 50 n'est pas sans facteur carré, donc $\mu(50) = 0$. La fonction de Möbius classique apparaît fréquemment en arithmétique. Elle intervient par exemple dans l'expression de l'inverse de la fonction ζ de Riemann en un $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s)^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \right)^{-1} = \prod_{p \text{ premiers}} (1 - p^{-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} .$$

Considérons un autre exemple typique de la théorie, celui de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(S)$ d'un ensemble fini S , ordonné (partiellement) par l'inclusion. Pour deux parties A et B de S avec $A \subseteq B$, on obtient aisément que $c_1(A, B) = 1$ si $A \neq B$, 0 sinon, puis, en posant $n = |B| - |A|$,

$$c_2(A, B) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2 ,$$

car il y a autant de parties strictement intermédiaires entre A et B que de sous-ensembles stricts de $B \setminus A$. Le calcul direct des autres c_p paraissant plus difficile, on va plutôt montrer par récurrence sur $n = |B| - |A|$ que $\mu_{\mathcal{P}(S)}(A, B) = (-1)^n$, ce qui est immédiat pour $n = 0$ et pour $n = 1$. Supposons donc ceci acquis pour tous les entiers inférieurs ou égaux à $n - 1$; la formule de récurrence pour la fonction de Möbius donne

$$\mu_{\mathcal{P}(S)}(A, B) = - \sum_{A \subseteq Z \subsetneq B} \mu_{\mathcal{P}(S)}(A, Z) = - \sum_{A \subseteq Z \subsetneq B} (-1)^{|Z| - |A|}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence; un raisonnement similaire à ci-dessus donne alors

$$\mu_{\mathcal{P}(S)}(A, B) = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k = (-1)^n .$$

Lorsque L a un *plus petit élément*, noté 0 (c'est-à-dire $0 \leq x$ pour tout $x \in L$, attention à la confusion dans le cas où L est un ensemble de nombres) et un *plus grand élément*, noté 1 (définition analogue), on pose

$$\mu_L(x) = \mu_L(0, x) \text{ pour tout } x \in L, \quad \mu_L(L) = \mu_L(1) .$$

Par exemple, le plus petit élément de $\mathcal{P}(S)$ est l'ensemble vide $\emptyset$ et son plus grand élément est S , si bien que

$$\mu_{\mathcal{P}(S)}(\mathcal{P}(S)) = \mu_{\mathcal{P}(S)}(\emptyset, S) = (-1)^{|S|} .$$

2.2. Formule d'inversion de Rota. La formule qu'on va présenter maintenant est la généralisation par Rota d'une formule connue auparavant pour la fonction de Möbius classique.

Étant donnée une application f de L vers un groupe abélien quelconque (par exemple $\mathbb{Z}$), on définit sa *fonction sommatoire*

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) .$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{y \leq x} \mu_L(y, x) g(y) .$$

Preuve. On obtient cette égalité en intervertissant deux sommations; pour $x \in L$,

$$\sum_{y \leq x} \mu_L(y, x) g(y) = \sum_{y \leq x} \mu_L(y, x) \sum_{z \leq y} f(z) = \sum_{z \leq x} f(z) \sum_{z \leq y \leq x} \mu_L(y, x) ;$$

or la seconde somme est nulle si $z < x$ et vaut 1 si $z = x$, d'où le résultat. ▀

REMARQUE. On peut munir L de l'ordre renversé $\geq$; les chaînes « ascendantes » de x à y étant en bijection avec les chaînes « descendantes » de y à x , la fonction de Möbius de $(L, \geq)$ est égale à celle

de $(L, \leq)$, quitte à intervertir x et y . Appliquant la formule d'inversion à $(L, \geq)$, on obtient que, si $h(x) = \sum_{y \geq x} f(y)$, alors

$$f(x) = \sum_{y \geq x} \mu_L(x, y) h(y) .$$

Cette formule d'inversion utilisant la fonction sommatoire « supérieure » sera utilisée à plusieurs reprises dans la section 3.

2.3. Treillis géométriques.

Définition 2.4. *Un treillis est un ensemble ordonné possédant un plus petit élément (noté 0) et un plus grand élément (noté 1), dans lequel deux éléments x et y ont toujours une borne inférieure (plus grand des minorants de $\{x, y\}$, notée $x \wedge y$) et une borne supérieure (plus petit des majorants, notée $x \vee y$). On appelle atome du treillis un élément minimal parmi les éléments distincts de 0.*

Par exemple, l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel N , muni de la relation de divisibilité, a pour plus petit élément 1 et pour plus grand élément N ; la borne inférieure de deux diviseurs de N est leur pgcd, la borne supérieure leur ppcm; les atomes sont les diviseurs premiers de N .

Définition 2.5. *Un treillis géométrique L est un treillis fini satisfaisant aux axiomes :*

- (i) *tout $x \in L$ est de la forme $x = a_1 \vee \dots \vee a_r$ où $a_1, \dots, a_r$ sont des atomes de L ; le plus petit r possible s'appelle le rang de x , noté $r(x)$;*
- (ii) *$r(x) < r(y)$ si $x < y$;*
- (iii) *$r(x \wedge y) + r(x \vee y) \leq r(x) + r(y)$ pour tous $x, y \in L$.*

Le rang de L est $r(L) = r(1)$. Le polynôme caractéristique de L est

$$p_L(t) = \sum_{x \in L} \mu_L(x) t^{r(L) - r(x)} .$$

On calcule aisément deux valeurs de ce polynôme :

$$p_L(0) = \mu_L(1) = \mu_L(L) \quad ; \quad p_L(1) = \sum_{0 \leq x \leq 1} \mu_L(0, x) = 0 \quad \text{si } |L| > 1 .$$

On verra plus tard un résultat (théorème 3.3) reliant sa valeur en -1 au nombre de régions découpées dans un espace vectoriel réel par un arrangement d'hyperplans.

Le treillis des diviseurs d'un entier N n'est pas un treillis géométrique si N a des facteurs carrés : les ppcm des atomes, qui sont les diviseurs premiers de N , ne produisent que des nombres sans facteur carré. La propriété (i) n'est donc pas satisfaite.

Par contre, l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties d'un ensemble fini S , muni de l'inclusion, en est un : on a déjà vu que $\emptyset$ est son plus petit élément, S son plus grand; la borne inférieure (resp. supérieure) de deux parties est leur intersection (resp. réunion); les atomes sont les singletons; toute partie est réunion (borne supérieure) des singletons (atomes) constitués par ses éléments, d'où la propriété (i) et le fait que le rang égale le cardinal. On laisse la vérification (facile) des deux autres propriétés au lecteur. Noter que l'inégalité de la propriété (iii) est toujours une égalité dans ce treillis. Enfin, on a vu à la fin de la sous-section 2.1 que pour $A \in \mathcal{P}(S)$, $\mu_{\mathcal{P}(S)}(A) = \mu_{\mathcal{P}(S)}(\emptyset, A) = (-1)^{|A|} = (-1)^{r(A)}$, d'où

$$p_{\mathcal{P}(S)}(t) = \sum_{A \subseteq S} (-1)^{|A|} t^{|S| - |A|} = \sum_{k=0}^{|S|} \binom{|S|}{k} (-1)^k t^{|S| - k} = (t - 1)^{|S|} .$$

3. APPLICATIONS

3.1. Treillis des partitions. On considère encore un ensemble fini S et on note Π l'ensemble de ses partitions. Un élément π de Π est donc une suite $B_1, \dots, B_b$ de parties de S deux à deux disjointes telle que

$$S = B_1 \cup \dots \cup B_b .$$

Les B_i sont appelés les *blocs* de π et $b = b(\pi)$ désigne le nombre de blocs de π . On écrit la partition π sous la forme

$$\pi = B_1 \coprod \dots \coprod B_b .$$

On ordonne Π par la relation suivante : π est *plus fine que* π' , noté $\pi \leq \pi'$, si tout bloc de π est inclus dans un bloc de π' . Le plus petit élément de Π est $0 = \coprod_{x \in S} \{x\}$, le plus grand est $1 = S$; les atomes sont les

$$\pi_{x,y} = \{x,y\} \coprod \coprod_{z \neq x,y} \{z\} , \quad \text{pour } x \neq y \in S .$$

La borne inférieure de deux partitions π et π' est constituée des intersections des blocs de l'une avec les blocs de l'autre. En effet, celle-ci est trivialement plus fine que π et que π' (donc minore l'ensemble $\{\pi, \pi'\}$) et, si π'' vérifie aussi cette propriété, chacun de ses blocs est inclus à la fois dans un bloc de π et dans un bloc de π' , donc dans leur intersection ; ceci signifie que π'' est plus fine que la partition des intersections de blocs, qui est donc bien le majorant de l'ensemble des minorants de $\{\pi, \pi'\}$.

À contrario, la borne supérieure s'obtient en réunissant les blocs des deux partitions qui sont d'intersection non vide. Plus précisément, les blocs de $\pi \vee \pi'$ peuvent être mis sous la forme

$$C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r ,$$

où r est un entier et les C_i sont des blocs tous distincts de π ou π' tels que, pour tout $2 \leq i \leq r$ et tout bloc C de π ou π' , on ait :

$$C_i \cap \left(\bigcup_{1 \leq j \leq i-1} C_j \right) \neq \emptyset , \quad C \notin \{C_1, \dots, C_r\} \Rightarrow C \cap \bigcup_{1 \leq j \leq r} C_j = \emptyset .$$

Ceci signifie que, en partant d'un bloc C_1 de π ou de π' , on construit le bloc de $\pi \vee \pi'$ qui le contient en lui agglomérant un des blocs (de l'autre partition) qui l'intersectent, noté C_2 , puis un des blocs (de l'une ou l'autre partition) qui intersectent $C_1 \cup C_2$, noté C_3 , et ainsi de suite jusqu'à obtenir une partie de S qui n'intersecte aucun autre bloc de π ou de π' .

Notons ϖ la partition formée des parties de S construites ainsi et prouvons que $\varpi = \pi \vee \pi'$. Il est clair que tout bloc C de π ou π' est inclus dans un bloc de ϖ (la partie de S construite en commençant avec $C_1 = C$), donc ϖ est bien un majorant de l'ensemble $\{\pi, \pi'\}$. Supposons que π et π' soient toutes deux plus fines qu'une partition π'' . Étant donné $C_1 \cup \dots \cup C_r$ un bloc de ϖ de la forme ci-dessus, notons C'' le bloc de π'' qui contient C_1 et montrons par récurrence sur $1 \leq k \leq r$ que $C_1 \cup \dots \cup C_k \subseteq C''$. Si $k = 1$ il n'y a rien à faire ; si $k = 2$, soit C_2'' le bloc de π'' qui contient C_2 , alors $C'' \cap C_2''$ est non vide puisque $C_1 \cap C_2$ ne l'est pas, d'où $C_2'' = C''$ et $C_1 \cup C_2 \subseteq C''$. Si $k \geq 2$, notons C_k'' le bloc de π'' qui contient C_k , alors par hypothèse de récurrence $C'' \cap C_k''$ contient $(C_1 \cup \dots \cup C_{k-1}) \cap C_k \neq \emptyset$ donc $C_k'' = C''$ et $C_1 \cup \dots \cup C_k \subseteq C''$. Ceci (avec $k = r$) montre que tout bloc de ϖ est inclus dans un bloc de π'' , il s'ensuit que ϖ est bien le minorant de l'ensemble des majorants de $\{\pi, \pi'\}$.

Ce qui précède montre qu'on a affaire à un treillis, montrons maintenant qu'il est géométrique. On commence par établir la propriété (i). Étant donnée une partition π , notons $\sim$ la relation définie sur S par $x \sim y$ si x et y sont dans un même bloc de π . Alors

$$\pi = \bigvee_{x \sim y} \pi_{x,y} .$$

Plus précisément, si $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un bloc de π de cardinal $|B|$, alors

$$B \coprod \coprod_{x \notin B} \{x\} = \bigvee_{2 \leq k \leq |B|} \pi_{x_1, x_k}$$

est la borne supérieure de $|B| - 1$ atomes (au minimum), si bien que

$$r(\pi) = \sum_{B \text{ bloc de } \pi} (|B| - 1) = |S| - b(\pi) .$$

En particulier, $r(\Pi) = |S| - 1$ et

$$p_\Pi(t) = \sum_{\pi \in \Pi} \mu_\Pi(\pi) t^{b(\pi)-1} .$$

Exercice 3.1. Démontrer que $\pi \vee \pi' = \bigvee_{x \approx y} \pi_{x,y}$, où $x \approx y$ signifie que x et y sont dans un même bloc de π ou de π' .

La propriété (ii) s'obtient en remarquant que si $\pi \leq \pi'$, alors chaque bloc de π' contient au moins un bloc de π , donc $b(\pi) \geq b(\pi')$; il s'ensuit que $\pi < \pi'$ entraîne $b(\pi) > b(\pi')$, d'où $r(\pi) < r(\pi')$ comme attendu, vue la formule pour le rang ci-dessus. Enfin, pour montrer la propriété (iii), considérons un bloc $C_1 \cup \dots \cup C_r$ de $\pi \vee \pi'$ avec les conventions détaillées ci-dessus. Si $r = 1$, C_1 n'intersecte aucun autre bloc de π ou de π' , donc est un bloc de chacune de ces partitions et aussi de $\pi \wedge \pi'$. Si $r \geq 2$, on a $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, donc $B_1 = C_1 \cap C_2$ est un bloc de $\pi \wedge \pi'$; si $r \geq 3$, $C_3 \cap (C_1 \cup C_2) \neq \emptyset$, donc $C_3 \cap C_1$ ou $C_3 \cap C_2$ est non vide, ce qui donne au moins un bloc B_2 de $\pi \wedge \pi'$ (avec $B_2 \neq B_1$); plus généralement, pour $2 \leq i \leq r$, $C_i \cap (\cup_{j < i} C_j) \neq \emptyset$, donc $C_i \cap C_j$ est non vide pour au moins un entier j , ce qui donne au moins un bloc B_i de $\pi \wedge \pi'$ (forcément distinct des précédents). Finalement, on obtient ainsi au moins $r - 1$ blocs distincts dans $\pi \wedge \pi'$. En tenant compte du bloc de $\pi \vee \pi'$ dont on est parti, ceci montre que

$$b(\pi \wedge \pi') + b(\pi \vee \pi') \geq b(\pi) + b(\pi') .$$

On en déduit l'inégalité cherchée à l'aide de l'expression du rang donnée plus haut.

Exercice 3.2. Exhiber deux partitions de $\{a, b, c, d\}$ pour lesquelles l'inégalité de la propriété (iii) est stricte.

On détermine maintenant l'expression factorisée de p_Π en utilisant la formule d'inversion de Rota. Soit H un ensemble de cardinal $h \geq |S|$. Pour $u : S \rightarrow H$, on appelle *noyau de u* la partition $\coprod_{b \in H} u^{-1}(\{b\})$ formée des images réciproques des points de H . On note que u est injective si et seulement si son noyau est la partition nulle $0 = \coprod_{x \in S} \{x\}$.

Pour $\pi \in \Pi$, désignons par $f(\pi)$ le nombre d'applications de S dans H de noyau π ; alors $\sum_{\pi' \supseteq \pi} f(\pi')$, le nombre d'applications de S dans H de noyau contenant π , est égal à $h^{b(\pi)}$, car

une telle application est déterminée par l'image de chaque bloc de π . La formule d'inversion de Rota (pour l'ordre inverse) donne

$$f(\pi) = \sum_{\pi' \supseteq \pi} \mu(\pi, \pi') h^{b(\pi')} ,$$

si bien que $f(0)$, qui est le nombre d'applications injectives de S dans H , vérifie

$$\frac{h!}{(h - |S|)!} = f(0) = \sum_{\pi \in \Pi} \mu(\pi) h^{b(\pi)} = h p_{\Pi}(h) .$$

Cette égalité étant satisfaite pour tous les entiers $h \geq |S|$, on en déduit l'expression du polynôme caractéristique

$$p_{\Pi}(t) = \prod_{i=1}^{|S|-1} (t - i) ,$$

puis sa valeur en $t = 0$: $\mu_{\Pi}(\Pi) = (-1)^{|S|-1} (|S| - 1)!$.

3.2. Coloriage de graphes. Le treillis qu'on va considérer maintenant est plus compliqué à définir et à représenter ; on verra cependant qu'on peut le relier à un « sous-treillis » du précédent et, par ailleurs, il donnera lieu à une jolie application. On considère un graphe fini G , sans arête multiple, d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A ; on définit $L(G)$ comme étant le sous-ensemble de $\mathcal{P}(A)$ constitué des parties $B \subseteq A$ satisfaisant la propriété

$$(*) \quad \exists \pi \in \Pi, \forall a \in A, \quad a \in B \Leftrightarrow a \text{ joint 2 sommets dans un même bloc de } \pi .$$

$L(G)$ est ordonné par l'inclusion (d'une partie de A vérifiant $(*)$ dans une autre).

Considérons par exemple le graphe ci-dessous :

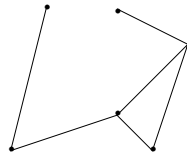


FIG. 3. 6 sommets, 6 arêtes

Pour trouver un élément $B \in L(G)$, il suffit de considérer une partition π de S et de ne conserver que les arêtes de A à l'intérieur d'un même bloc (figure 4).

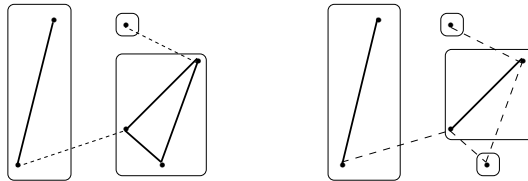


FIG. 4. Deux éléments de $L(G)$

Par contre, on n'obtient pas un élément de $L(G)$ en ne conservant que deux des trois arêtes du cycle (figure 5).

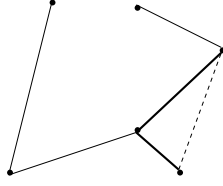


FIG. 5. Le début d'une partie de A non dans L(G)

On voit sur le deuxième exemple de la figure 4 que la partition des sommets associée à un sous-ensemble de A donné n'est pas unique en général : la partition pour laquelle les deux sommets isolés sont dans un même bloc convient, ainsi que celle dans laquelle on les adjoint au bloc de gauche.

Par contre, étant donné $B \in L(G)$, il existe une plus petite partition π_B (pour la relation « plus fine que » définie précédemment) pour laquelle la propriété (*) est satisfaite : celle dont chaque bloc est constitué des sommets d'une même composante connexe du graphe G_B d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes B. Le nombre $c(B)$ de composantes connexes de G_B est alors égal au nombre de blocs de π_B .

De plus, on voit aisément que, pour $B, B' \in L(G)$, de plus petites partitions associées $\pi_B, \pi_{B'} \in \Pi$, on a

$$B \subseteq B' \iff \pi_B \leq \pi_{B'} .$$

Il s'ensuit que $L(G)$ muni de la relation d'inclusion est un treillis géométrique :

- le plus petit élément est l'ensemble vide $\emptyset$, le plus grand élément est A et les atomes sont les singletons $\{a\}$ pour $a \in A$;
- la borne inférieure de B et B' est l'ensemble E des arêtes joignant deux sommets d'un même bloc de $\pi_B \wedge \pi_{B'}$. En effet, comme ces blocs sont intersections de ceux de π_B et de ceux de $\pi_{B'}$, E est inclus dans B et dans B' ; si C vérifie la même propriété, alors π_C est plus fine que π_B et que $\pi_{B'}$, donc aussi que $\pi_B \wedge \pi_{B'}$ (par définition de la borne inférieure), d'où $C \subseteq E$;
- de même, la borne supérieure de B et B' est l'ensemble F des arêtes joignant deux sommets d'un même bloc de $\pi_B \vee \pi_{B'}$. En effet, comme ces blocs sont des unions de blocs de π_B et de $\pi_{B'}$, B et B' sont inclus dans F ; si C vérifie la même propriété, alors π_B et $\pi_{B'}$ sont plus fines que π_C , donc $\pi_B \vee \pi_{B'}$ aussi (par définition de la borne supérieure), d'où $F \subseteq C$;
- noter que la borne supérieure de deux singletons $\{a\}$ et $\{a'\}$ contient trois arêtes lorsque a et a' ont un sommet commun et qu'une arête relie les deux autres ; la borne supérieure n'est donc pas une simple réunion ici. Cependant, $B \in L(G)$ est borne supérieure de l'ensemble des $\{b\}$ où b décrit B, d'où la propriété (i) de la définition 2.5. On laisse la démonstration des deux autres propriétés aux soins du lecteur.

D'après la description de la borne supérieure ci-dessus, le rang de $B \in L(G)$ est le même que celui de sa plus petite partition associée π_B :

$$r(B) = r(\pi_B) = |S| - b(\pi_B) = |S| - c(B) .$$

En particulier, $r(L(G)) = |S| - c(A)$ et

$$p_{L(G)}(t) = \sum_{B \in L(G)} \mu_{L(G)}(B) t^{c(B) - c(A)} .$$

On raisonne maintenant comme dans la sous-section précédente. Soit C un ensemble fini à c éléments (les « couleurs »). Un *coloriage* de G est une application $\mu : S \rightarrow C$. Son *noyau* A_μ est

l'ensemble des arêtes de A joignant deux sommets de G de même couleur. La partition ⁽¹⁾

$$\pi = \coprod_{c \in C} u^{-1}(\{c\})$$

satisfait la propriété (*) pour A_u , donc $A_u \in L(G)$. Pour $B \in L(G)$, notons $f(B)$ le nombre de coloriage de noyau B . Comme les coloriages de S de noyau contenant B sont au nombre de $c^{c(B)}$, on obtient par un raisonnement analogue à ci-dessus :

$$f(0) = c^{c(A)} p_{L(G)}(c) ,$$

ce qui donne une formule pour le nombre de coloriages *propres* de G , c'est-à-dire pour lesquels deux sommets joints par une arête sont de couleurs différentes.

L'intérêt de cette formule est dans son application au problème des *quatre couleurs*, qui consiste à montrer que (en termes un peu vagues) « toute carte géographique peut être coloriée avec 4 couleurs », sous-entendu de façon à ce que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. Le lien avec ce qui précède se fait facilement en associant à la carte à colorier le graphe de sommets les capitales des pays, que l'on relie par une arête s'ils sont limitrophes. Comme il suffit de résoudre le problème pour un continent, on peut supposer que le graphe n'a qu'une composante connexe ; répondre positivement à la question équivaut à montrer :

$$4p_{L(G)}(4) \geq 1 .$$

Il reste pour cela à trouver une expression pratique du polynôme caractéristique (appelé « chromatique » dans ce cas, d'où il tire son origine). Posé en 1852, le problème n'a été résolu — par la positive — qu'en 1976, à l'aide de longues vérifications par ordinateur, posant pour la première fois la question de la validité de ce type de preuve. Il n'est pas dénué d'applications pratiques, par exemple lorsqu'on souhaite affecter des fréquences différentes aux antennes radio relais d'une même station les plus proches les unes des autres.

3.3. Arrangements d'hyperplans réels. Revenons pour terminer au problème de départ. Dans un espace vectoriel réel de dimension d , on se donne un ensemble fini H d'hyperplans, dont on veut savoir en combien de régions il découpe l'espace V . Pour cela, considérons l'ensemble L de toutes les intersections d'éléments de H , muni de l'ordre opposé à l'inclusion :

$$E \leq F \iff E \supseteq F .$$

Cette relation fait de L un treillis géométrique, de plus petit élément $0 = V$ (intersection indicée par l'ensemble vide), d'atomes les éléments de H , de plus grand élément $1 = \bigcap_{h \in H} h$. Le rang de L est égal au rang du système constitué des équations des hyperplans de H , donc à la codimension $d - d_1$ de 1 , où $d_1 = \dim 1$. Il en va de même pour tout $E \in L$:

$$r(E) = \text{codim } E = d - \dim E .$$

Le résultat suivant a été obtenu par Zaslavsky et publié en 1975 dans [Z].

Théorème 3.3. *Le nombre de régions de V découpées par H est $(-1)^{r(L)} p_L(-1)$.*

Illustrons le théorème sur un exemple. Ayant fixé une base de V , on note H_{ij} l'hyperplan noyau de la forme linéaire $x_i - x_j$ pour tous $1 \leq i < j \leq d$, et A_{d-1} la famille d'hyperplans constituée des H_{ij} . Le treillis L associé à A_{d-1} comme ci-dessus est en bijection croissante avec l'ensemble

⁽¹⁾Cette partition n'est pas nécessairement la plus fine possible.

des partitions de $\{1, 2, \dots, d\}$: pour $E \in \mathcal{L}$, notons I_E l'ensemble des (i, j) tels que $E \subseteq H_{i,j}$, alors $E = \bigcap_{(i,j) \in I_E} H_{i,j}$ et on lui fait correspondre la partition

$$\pi = \bigvee_{(i,j) \in I_E} \pi_{i,j} .$$

La vérification du fait que l'application ainsi définie soit une bijection croissante est aisée. Il s'ensuit, en utilisant le résultat de la sous-section 3.1, que

$$p_L(t) = \prod_{i=1}^{d-1} (t - i) ,$$

si bien que le nombre de régions découpées par A_{d-1} est, à l'aide du théorème de Zaslavsky,

$$|p_L(-1)| = d! .$$

De nombreux autres exemples d'arrangements peuvent être traités de la même manière, une fois calculé leur polynôme caractéristique ; par ailleurs, un autre résultat de Zaslavsky donne le nombre de régions découpées par un arrangement d'hyperplans dans un espace affine [C, pp. 14-15].

RÉFÉRENCES

- [B] Bóna M., *A walk through combinatorics. An introduction to enumeration and graph theory. With a foreword by Richard Stanley.* World Scientific Publ., River Edge, NJ, 2002.
Ce livre présente de manière agréable les aspects plus classiques de la combinatoire, avec une partie consacrée aux problèmes d'énumération, l'autre aux graphes.
- [C] Cartier P., Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire. *Séminaire Bourbaki, Vol. 1980/81*, pp. 1-22, Lecture Notes in Math., 901, Springer, Berlin-New York, 1981.
Cet article de synthèse aborde les arrangements d'hyperplans sous plusieurs facettes, dont l'aspect combinatoire qu'on a repris ici (en développant les preuves).
- [Z] Zaslavsky T., *Facing up to arrangements : face-count formulas for partitions of space by hyperplanes.* Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975), issue 1, no. 154.
L'article sur lequel une partie du précédent repose ; fait pour la première fois le lien entre certaines notions combinatoires et une situation géométrique.