

Polynômes hyperboliques - Littérature

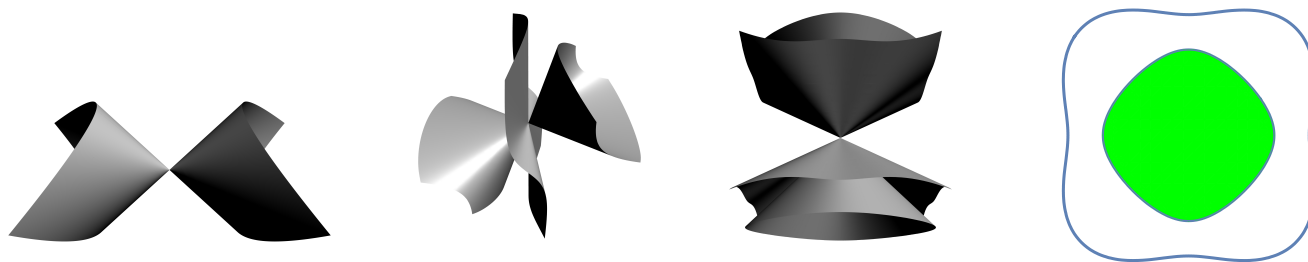


FIGURE 1 – Surfaces hyperboliques de degré deux, trois et quatre, et point de vue projectif

L’hyperbolicité se lit de la manière suivante : toute droite contenant un point de la région verte, intersecte la variété (courbe bleue) en quatre points réels. Si dans cet exemple on a “quatre”, en général on aura le degré de la courbe bleue, ou de la surface.

Motivations historiques. La raison historique pour l’étude de cette classe de polynômes réels provient de la théorie des équations aux dérivées partielles hyperboliques [5, 1, 2] : dans ce cadre plus classique, f est l’opérateur différentiel définissant un problème de Cauchy $f(\partial)u = v$: l’hyperbolicité de f implique existence et unicité des solutions. À partir du travail de Renegar [9], cette théorie a intéressé la communauté d’optimisation : l’objet convexe qu’on associe au polynôme f (voir Figure 1, région verte) est un cône, et l’optimisation sur ce cône est appelée programmation hyperbolique. Aujourd’hui, les polynômes hyperboliques constituent un domaine de recherche prometteur en algèbre appliquée [4, 8], notamment à cause de l’impact scientifique provoqué par la Conjecture de Lax, prouvée vraie dans sa forme originelle [6], mais encore ouverte dans sa version étendue [3]. Enfin, la théorie des polynômes hyperboliques peut être considérée la version symétrique de celle de L. Valiant sur les représentations déterminantales [10], donc aujourd’hui liée au programme “Geometric Complexity Theory” proposé par K. Mulmuley et M. Sohoni, et à la version algébrique du problème $P \neq NP$, voir par exemple [7].

Références

- [1] L. GÅRDING, *An inequality for hyperbolic polynomials*, Journal of Mathematics and Mechanics, 8 (1959), pp. 957–965.
- [2] O. GÜLER, *Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming*, Mathematics of Operations Research, 22 (1997), pp. 350–377.
- [3] M. KUMMER, *Determinantal representations and bézoutians*, Math. Zeit., 285 (2017), pp. 445–459.
- [4] M. KUMMER, D. PLAUMANN, AND C. VINZANT, *Hyperbolic polynomials, interlacers, and sums of squares*, Mathematical Programming, 153 (2015), pp. 223–245.
- [5] P. LAX, [Differential equations, difference equations and matrix theory](#), Communications on pure and applied mathematics, 11 (1958), pp. 175–194.
- [6] A. LEWIS, P. PARRILO, AND M. RAMANA, *The Lax conjecture is true*, Proceedings of the American Mathematical Society, 133 (2005), pp. 2495–2499.

- [7] K. D. MULMULEY AND M. SOHONI, *Geometric complexity theory i : An approach to the p vs. np and related problems*, SIAM Journal on Computing, 31 (2001), pp. 496–526.
- [8] D. PLAUMANN, R. SINN, D. SPEYER, AND C. VINZANT, *Computing Hermitian determinantal representations of hyperbolic curves*, Int. Journal of Algebra and Computation, 25 (2015), pp. 1327–1336.
- [9] J. RENEGAR, *Hyperbolic programs, and their derivative relaxations*, Foundations of Computational Mathematics, 6 (2006), pp. 59–79.
- [10] L. G. VALIANT, *Completeness classes in algebra*, in Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '79, New York, NY, USA, 1979, ACM, pp. 249–261.