Faculté des Sciences et Techniques — Université de Limoges
Analyse Numérique 1 – Travaux Pratiques — L3 – Semestre 5 – 2020/2021

Feuille de TP n°2

Résolution d'équations non-linéaires

Le travail en binôme est possible. On utilise de préference Scilab, en altérnative n'importe quel logiciel/language capable de résoudre les exercices de la feuille. Le compte-rendu est à rendre[1] *en utilisant l'espace de dépôt dans Community.*

Si l'ordinateur se bloque pendant un calcul, c'est peut être à cause de la taille des entrées ; si c'est le cas, diminuez la taille. N'hesitez pas à discuter de tels problèmes (et des solutions que vous avez apportées) dans le compte-rendu.

Le but de ce deuxième TP est de programmer des méthodes étudiées dans le cours (et de comparer leur convergence avec les résultats de la théorie) pour résoudre une équation

$$f(x) = 0$$

où $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles, typiquement *non-linéaire*. Aussi, normalement nous avons l'information que une solution existe dans un domain donné $D \subset \mathbb{R}^n$, où f est bien définie et assez régulière (par exemple, continue ou différentiable).

Nous rappélons que pour implanter une fonction en Scilab, vous avez appris au TP1 que vous pouvez utiliser l'environnement `function`. Par exemple, le code

```
function y = f(x)
y = x^3+sin(x)
endfunction
```

définit la fonction $x^3 + sin(x)$, et lui donne le nom `f`. Vous pourrez ensuite *évaluer* f en une valeur $t \in \mathbb{R}$ juste en exécutant `f(t)`.

1. Nous considerons la fonction $f_1(x) = \cos(x) - xe^x$, définie dans l'intervalle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tracer une représentation graphique[2] de la fonction f_1 dans le domain proposé. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une unique solution $\bar{x}$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Méthode de dichotomie (bissection). Nous rappélons que la méthode de dichotomie ($n = 1$) consiste à diviser le domain $D = [a, b]$ en deux parties de même longueur à chaque étape, et à remplacer un des extrèmes avec le baricentre, en fonction du signe de f.

- Implémenter cette méthode en une fonction `dichotomie`.
- Utiliser la méthode de dichotomie pour trouver une valeur approchée de $\bar{x}$ (solution de $f_1(x) = 0$) avec une tolérance de 10^{-6}. Quel est le nombre d'itération nécessaires pour obtenir une telle précision avec votre implantation ? Comparer avec les bornes théoriques.
- Discuter la puissance de cette méthode en faisant varier la tolérance.
- Calculer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près avec cette méthode (exercice 1.2 du TD).

Méthode de Newton. Nous rappélons que un itéré de Newton pour une équation $f(x) = 0$ est défini par l'égalité

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

[1] Le compte-rendu doit être un travail **original**, avec des commentaires qui aideront l'enseignant à comprendre que vous avez bien maitrisé le sujet. Bref il ne s'agit **pas du tout** de donner une description passive de la séance de TP.

[2] `https://help.scilab.org/docs/5.5.0/fr_FR/plot.html`

- Vérifier que la méthode de Newton est applicable dans le cas de l'équation $f_1(x) = 0$.
- En utilisant le signe de f'', indiquer un bon choix du point initial x_0.
- Implémenter la méthode de Newton[3] en une fonction `newton`
- Calculer les 10 premiers itérés de la méthode pour $x_0 = 1$ et $x_0 = 0.5$.

Méthode du point fixe. Nous rappélons que la méthode du point fixe consiste à transformer l'équation implicite $f(x) = 0$ en forme explicite $x = g(x)$ et utiliser cette répresentation pour construire des itérés.

- Mettre l'équation $f_1(x) = 0$ sous forme explicite. Montrer que les hypothèse d'application du théorème du point fixe ne sont pas vérifiées sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Montrer qu'elles le sont sur l'intervalle $[0.45, 0.6]$.
- Utiliser la méthode du point fixe pour calculer $\bar{x}$ avec une tolérance de 10^{-6}, en choisissant $x_0 = 0.5$. Combien d'itérations faut-il prévoir pour obtenir une telle précision ? Comparer ces résultats avec ceux trouvés avec la méthode de Newton.

Faire un tableau récapitulatif pour la résolution de l'équation $f_1(x) = 0$ avec les trois méthodes.

2. Soit $f_2 = x^3 - 4x + 1$.

- Appliquer la méthode de Newton à l'équation $f_2(x) = 0$. Le comparer aux autres méthodes.
- En particulier, pour la méthode de Newton, fixer une tolérance et un nombre maximal d'itérations, et tracer le graphique des itérations nécessaires, en fonction du point initial $x_0 \in [-3, 3]$ (si admissible). Que peut-on remarquer ?

3. On cherche à calculer une valeur approchée des racines de l'unité dans le plan complexe $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On definit la fonction $F_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$F_n(x, y) = (Re(z^n - 1), Im(z^n)).$$

Montrer que les nombres de zéros de F_n est fini. À quoi correspondent les zeros de F_n ? On fixe $n = 4$ pour le reste de l'exercice.

- Calculer (à la main) la Jacobienne[4] $J_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ de F_4. Implémenter F_4 et J_4 en deux fonctions Scilab `F` et `JF` respectivement:

```
function [v]=F(z)
  v(1)= ...
  v(2)= ...
endfunction
function [w]=JF(z)
  w(1,1)= ...
  w(1,2)= ...
  w(2,1)= ...
  w(2,2)= ...
endfunction
```

- Nous souhaitons appliquer une methode de Newton avec itérée $(x_k, y_k) \to (x_{k+1}, y_{k+1})$ définie par

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - (J_4(x_k, y_k))^{-1} F_4(x_k, y_k)$$

en faisant varier le point initial (x_0, y_0). Fixer une *résolution* `res` (par exemple `res = 20`). Construire une grille (a_i, b_j) de la région $[-1.5, 1.5]^2$ avec la résolution donnée :

[3] Faire attention aux données en entrée et sortie: il faudra avant construire la fonction f et la dérivée f', qui feront partie de l'entrée de la fonction `newton`.

[4] $J_4(x, y)$ est la matrice dont la i−ème ligne est le gradient (transposé) de la i−ème cordonnée de F_4.

```
xvec = -1.5:3/res:1.5
yvec = -1.5:3/res:1.5
```

- Initialiser deux matrices `z` et `II`, de taille $res \times res$, à zero.
- Pour chaque point (a_i, b_j) de la grille, soit $z_t = (\cos(\frac{2\pi t}{4}), \sin(\frac{2\pi t}{4}))$ la racine vers laquelle la méthode de Newton (avec point initial (a_i, b_j)) converge, et soit $I_{i,j}$ le nombre d'itérations nécessaires. Enregistrer t dans `z(i,j)` et $I_{i,j}$ dans `II(i,j)`.
- Utiliser `Matplot(z')` et `Matplot(II')` pour dessiner le bassin d'attraction de Newton et le nombre d'itérations. Que remarquez-vous? Augmenter `res` si l'ordinateur le permet.

Voici quelques exemples de bassin d'attraction de Newton pour $f(z) = z^4 - 1$, avec différentes résolutions :

Figure 1: Bassin d'attraction de Newton (gauche) et nombre d'itérations (droite) pour $f(z) = z^4 - 1$, $res = 10$

Figure 2: Bassin d'attraction de Newton (gauche) et nombre d'itérations (droite) pour $f(z) = z^4 - 1$, $res = 100$

Figure 3: Bassin d'attraction de Newton (gauche) et nombre d'itérations (droite) pour $f(z) = z^4 - 1$, $res = 1000$