Mathématiques

Université de Limoges

École doctorale n° 521
*SCIENCES ET INGÉNIERIE*
*POUR L'INFORMATION, MATHEMATIQUES (S2I)*

Numéro d'ordre : XX-2022

# MÉMOIRE

# Habilitation à Diriger des Recherches

## Spécialité doctorale "Mathématiques et leurs interactions"

*présentée et soutenue publiquement par*

**Pierre DUSART**

le lundi 20 juin 2022

# Estimations explicites en Théorie Analytique des Nombres

Garant HDR : **Abbas C. MOVAHHEDI**

**Jury**

| | | |
|---|---|---|
| **M. Jean-Marc Deshouillers,** | Professeur | Rapporteur |
| **M. Olivier Ramaré,** | Directeur de Recherche | Rapporteur |
| **M. Xavier-François Roblot,** | MC HDR | Rapporteur |
| **M. Bouchaïb Sodaïgui,** | Professeur | Examinateur |
| **M. Jean-Pierre Borel,** | Professeur | Examinateur |
| **M. Abbas C. Movahhedi,** | Professeur | Chargé du suivi |
| **M. Alain Salinier,** | Professeur | Examinateur |

INSTITUT DE RECHERCHE xlim

**Université de Limoges**
**33, rue François Mitterrand 87000 LIMOGES, France**
**Unité de recherche : XLIM, UMR 7252**

HDR

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Guy Robin, mon directeur de thèse, qui m'a mis le pied à l'étrier et m'a orienté vers des parties de la théorie analytique des nombres qui lui semblaient prometteuses. Ces indications ont porté leurs fruits avec de premiers résultats encourageants, et mon directeur a continué son travail d'encadrement en relisant et corrigeant avec patience mes premiers écrits. Pour tout cela, je le remercie. Jean-Louis Nicolas, son collègue, également directeur de sa thèse et passionné par le sujet, a toujours suivi avec intérêt mes travaux et m'a toujours encouragé à progresser. C'est cette quête que je poursuis en passant cette habilitation.

Dès ma nomination, j'ai partagé le bureau avec plaisir avec Hakim Smati, chercheur au département, thématiquement le plus proche de mes recherches. Il possède une bibliothèque personnelle bien fournie et ses indications m'ont permis de retrouver rapidement des références pour des résultats classiques. Sa bibliothèque et moi l'ont suivis lors du déménagement dans le bâtiment XLim nouvellement créé. C'est aussi avec lui que je me suis lancé dans cette aventure périlleuse qu'est l'encadrement de thèse.

Jean-Marc Deshouillers a fait beaucoup pour les mathématiques en France (et dans le monde) et aujourd'hui encore, il est présent pour moi. Je le remercie pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être rapporteur.

Je remercie Olivier Ramaré, membre de mon jury de thèse, qui a fait des beaux articles novateurs sur lesquels j'ai pu rebondir et qui n'a jamais oublié de citer mes travaux dans les articles de recherches et de vulgarisation. Il a de beaux projets comme le projet TME-EMT (Théorie Multiplicative Explicite des nombres) et ne cesse de s'investir à la fois dans la recherche de pointe et la vulgarisation scientifique. Un exemple à suivre.

Xavier-François Roblot est un de mes tous premiers co-auteurs. Je ne le connaissais pas et, par l'intermédiaire de Marc Deléglise, nous avons écrit un article ensemble. Je ne voyais que l'aspect algorithmique et il m'a montré qu'il n'y a pas que l'aspect technique pour rendre un article intéressant.

De plus, je remercie ces trois rapporteurs pour leurs rapports d'évaluation très vivifiants et qui m'ont fait éminemment plaisir.

Bouchaidi Sodaïgui a toujours suivi mon dossier avec intérêt dans les instances nationales et m'a fait un grand plaisir en acceptant de faire partie de mon jury d'HDR tout comme Alain Salinier.

Jean Pierre Borel a toujours su lancer des projets intéressants et avoir un regard d'évaluateur sur les projets en cours. L'aspect gestion et développement n'est jamais facile et demande beaucoup d'énergie. Merci à lui pour m'avoir permis de participer à ces projets et d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie Abbas C. Movahhedi, responsable de l'équipe Théorie des Nombres, de m'avoir accueilli avec bienveillance au sein de son équipe et d'avoir accepté de gérer les requêtes administratives que je lui soumettais pour l'inscription dans le processus de l'HDR. Il m'a fait également fait confiance dans l'animation du séminaire de théorie des nombres.

Je remercie Philippe Gaborit d'avoir su gérer les pourcentages de moi-même, François Arnault pour les discussions sur la crypto, les bugs de programmation, entre autres.

C'est toujours avec un grand plaisir que j'ai pu publier des articles écrits à quatre mains (ou plus), en particulier Marc Deleglise m'a permis d'atteindre le nombre d'Erdös égal à 2 (je ne pourrai pas faire mieux), mais aussi Gilles Letourneux, Olivier Vivolo, Xavier-François Roblot (bis), Damien Sauveron, Kim Tai-Hoon, Pierre-Louis Cayrel, Abdelkader Necer, Sinaly Traoré, Pierre-François Bonnefoi, Raja Naeem Akram, Konstantinos Mar-

kantonaki, Safia Aoudjit et Djamel Berkane.
Un grand merci à mes co-auteurs.

Je remercie le directeur de l'institut XLIM, Stéphane BILA, d'avoir soutenu ma démarche et la présidente de l'Université de Limoges, de l'avoir acceptée. Je remercie l'ensemble des membres du département de Mathématiques d'avoir accepté de prendre quelques heures complémentaires et de me remplacer dans les cours que j'assurais pendant l'écriture de ce manuscrit.

Merci à celles et ceux qui, au Département, gardent leur bonne humeur et oeuvrent au quotidien pour essayer de nous faciliter la vie : Annie, Catherine, Debora, Henri, Odile, Sophie, Yolande, Thérèse. Cette présence permet souvent de garder le lien avec les autres collègues.

Enfin, un grand merci à ma famille qui m'a soutenu dans cette démarche.

# Table des matières

**Table des matières** v

**Liste des figures** vii

**Liste des tableaux** ix

**1 Formules asymptotiques avec reste explicite** 1
- 1.1 Fonction $\zeta$ de Riemann . . . 1
- 1.2 Utilisation de la fonction de $\zeta$ de Riemann dans l'étude de la répartition des nombres premiers . . . 10
- 1.3 Théorème des Nombres Premiers . . . 19
- 1.4 Références . . . 26

**2 Estimations explicites de $\psi(x)$ pour des grandes valeurs de $x$.** 29
- 2.1 Calcul des zéros non triviaux de $\zeta$. . . . 29
- 2.2 Estimation de $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ par Rosser. . . . 30
- 2.3 Encadrement du terme d'erreur . . . 37
- 2.4 Méthode de Rosser&Schoenfeld . . . 38
- 2.5 Fonction majorante . . . 43
- 2.6 Références . . . 47

**3 Amélioration des encadrements pour des moyennes valeurs de $x$.** 49
- 3.1 Le nombre de zéros de zêta détaillé . . . 49
- 3.2 Méthode de Faber-Kadiri . . . 50
- 3.3 Expressions des sommes partielles . . . 54
- 3.4 Bornes explicites pour $\psi(x)$. . . . 57
- 3.5 En pratique . . . 61
- 3.6 Références . . . 63

**4 Estimations explicites de $\psi(x)$ sous l'hypothèse de Riemann** 65
- 4.1 Introduction . . . 65
- 4.2 Borne supérieure de la différence entre $\pi(x)$ et $\mathrm{li}(x)$. . . . 66
- 4.3 Fonction réciproque du logarithme intégral . . . 69
- 4.4 Applications . . . 71
- 4.5 Références . . . 77

**5 Encadrements explicites de quelques fonctions de sommation de nombres premiers** 79
- 5.1 Introduction . . . 79
- 5.2 Estimations des fonctions reliées aux nombres premiers en utilisant la théorie de la fonction de zêta de Riemann . . . 80

5.3 Bornes pour $\psi$. . . . . 82
5.4 Encadrements pour $\theta$. . . . . 84
5.5 Estimations des fonctions liées aux nombres premiers grâce à la fonction $\theta$. 87
5.6 Références . . . . . 97

**6 Dans les progressions arithmétiques** **101**
6.1 Introduction . . . . . 101
6.2 Série de Dirichlet . . . . . 104
6.3 Formule explicite de $\psi(x,\chi)$. . . . . 109
6.4 Calcul explicite . . . . . 111
6.5 Résultat pour les grandes valeurs de $x$ . . . . . 117
6.6 Résultats en supposant GRH$(k,\infty)$ . . . . . 117
6.7 Applications . . . . . 118
6.8 Références . . . . . 122

# Liste des figures

1.1 Zéros triviaux et non triviaux de $\zeta$ . . . . . 7
1.2 Graphe de $Z(t)$ . . . . . 8
1.3 Influence des zéros sur la précision . . . . . 13

# Liste des tableaux

3.1 Valeurs de $\varepsilon(x)$ pour $\psi$ . . . . . 62

5.1 Valeurs de $\theta(x)$ pour $10^{10} \leqslant x \leqslant 10^{15}$ . . . . . 96

6.1 $|\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < x\varepsilon(x)$ . . . . . 116

# Chapitre 1

# Formules asymptotiques avec reste explicite

Dans ce chapitre, nous allons présenter pourquoi la fonction $\zeta$ est fortement liée aux nombres premiers (Expressions (1.6) et (1.8)) et comment elle a été introduite pour étudier la répartition des nombres premiers. Une étude plus approfondie nécessitant l'utilisation de la formule de Perron permet de préciser que la position de des zéros complexes de $\zeta$ est intimement liée à la répartition des nombres premiers (Théorème 10). Certaines propriétés de $\zeta$, en particulier son équation fonctionnelle exprimée à l'aide de la fonction $\Gamma$, sont nécessaires pour montrer qu'il n'y a pas de zéro de partie réelle supérieure ou égale à 1. Il est alors possible de déterminer le comportement asymptotique de fonctions de décompte des nombres premiers comme la fonction $\pi(x)$. Cette partie s'est inspirée de l'article proposé par [4] avec des parties de démonstration de [2] et [3].

## 1.1 Fonction $\zeta$ de Riemann

Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On rappelle qu'une fonction holomorphe est une fonction à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.

### 1.1.1 Fonction $\Gamma$

Soit $\Gamma_0$ la fonction définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(z) > 0$ par

$$\Gamma_0 : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive, et une intégration par parties montre que $\Gamma_0(z+1) = z\,\Gamma_0(z)$. Cette fonction peut être prolongée analytiquement en une fonction méromorphe [1] sur l'ensemble des nombres complexes, excepté pour $z = 0, -1, -2, -3\ldots$ qui sont des pôles. La fonction $\Gamma$ sera définie comme ce prolongement et vérifie également l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$. On peut retrouver les propriétés de cette fonction dans [8][Chap 12 et 13]. La formule de Stirling appliquée à la fonction $\Gamma$ donne

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}(1+\mathrm{O}(1/z)), \quad \text{pour } |\arg(z)| < \pi. \tag{1.1}$$

1. fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction

Ainsi, en dérivant la formule précédente, on obtient

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \ln z + O(1) \quad \text{pour } |\arg(z)| < \pi. \tag{1.2}$$

### 1.1.2 La fonction $\zeta$ et son équation fonctionnelle

Nous allons avoir besoin de manipuler un cas particulier de la fonction thêta de Jacobi :

$$\vartheta_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2 i\pi x}.$$

Notons qu'en utilisant la formule sommatoire de Poisson et que le fait $e^{-x^2/2}$ est sa propre transformée de Fourier, nous obtenons une équation fonctionnelle (voir aussi Lemme 119) :

$$\vartheta_0(-1/(\mathrm{i}x)) = x^{1/2}\vartheta_0(\mathrm{i}x).$$

**Définition 1.** *La fonction $\zeta$ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe définie, pour tout nombre complexe $s$ tel que $\Re\mathrm{e}(s) > 1$, par la série de Riemann :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Remarque : la série ne converge pas en $s = 1$ car $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} > \int_1^{m+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(m+1)$. On dira que $\zeta$ admet une singularité au point $s = 1$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) \\
&= s\sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} x^{-s-1}\,dx \\
&= s\int_1^{\infty} [x]x^{-s-1}\,dx
\end{aligned}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de $x$. En notant $\{x\}$ la partie fractionnaire de $x$, on a $[x] = x - \{x\}$ et ainsi

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \{x\}x^{-s-1}\,dx. \tag{1.3}$$

L'intégrale est absolument convergente pour $\sigma > 0$ et uniformément pour $\sigma \geq \delta > 0$. Ainsi $\zeta$ est méromorphe pour $\sigma > 0$, son seul pôle étant un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. □

Il est pratique de définir la fonction (expressions obtenues en utilisant l'équation fonctionnelle de $\Gamma$)

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = (s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{1.4}$$

qui est une fonction entière[2] et qui vérifie une équation fonctionnelle de la forme $\xi(1-s) = \xi(s)$.

2. fonction holomorphe définie sur tout le plan complexe

*Démonstration.* A partir de la définition de la fonction $\Gamma$, nous avons pour tout point $s$ du demi-plan $\Re\mathrm{e}(s) > 0$ et pour tout entier $n > 0$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\pi n^2)^{-s/2} = \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} \mathrm{d}x.$$

Si on se restreint au demi-plan $\Re\mathrm{e}(s) > 1$, une sommation sur tous les entiers positifs $n$ conduit à

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x} \mathrm{d}x.$$

Comme la série

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x}| \mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\pi^{-\sigma/2}\zeta(\sigma)$$

est convergente, l'inversion des symboles d'intégration et sommation est légitime, d'où

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\pi n^2)^{-s/2} = \int_0^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\mathrm{d}x,$$

où $\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$.

En découpant l'intégrale du second membre en deux morceaux

$$\int_0^1 x^{s/2-1}\omega(x)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\mathrm{d}x$$

puis en changeant $x$ par $x^{-1}$ dans le premier morceau et en remarquant que $1 + 2\omega(x) = \theta_0(\mathrm{i}x)$, l'équation fonctionnelle de $\vartheta_0$ devient $1 + 2\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + 2\omega(1/x))$ ou encore,

$$\omega(1/x) = -1/2 + \sqrt{x}/2 + \sqrt{x}\omega(x)$$

et nous obtenons

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_1^\infty x^{-s/2-1}\left(-1/2 + \sqrt{x}/2 + \sqrt{x}\omega(x)\right)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\mathrm{d}x.$$

Or, dans le demi-plan $\Re\mathrm{e}(s) > 1$,

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1}\left(-1/2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{s(s-1)}$$

de sorte que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty x^{s/2-1}\omega(x)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-\frac{s+1}{2}}\omega(x)\mathrm{d}x$$

soit après multiplication par $s(s-1)/2$

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s(s-1)\int_1^\infty \left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{\omega(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Puisque $\omega(x) = \mathrm{O}(e^{-\pi x})$, la formule, établie pour $\Re\mathrm{e}(s) > 1$, se prolonge clairement à tout le plan et montre ainsi que $\xi$ est une fonction entière. De plus, le second membre de l'égalité est invariant si on change $s$ en $1 - s$. Par suite, $\xi(s) = \xi(1 - s)$. □

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\xi(1-s) &= \frac{1}{2}(1-s)(-s)\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\\ &= \xi(s) = \frac{1}{2}(s)(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\end{aligned}$$

On obtient :

$$\zeta(1-s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta(s).$$

En utilisant les deux propriétés de la fonction $\Gamma$, $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ (Formule des compléments, valable pour $0 < \Re\mathrm{e}(s) < 1$) sous la forme

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi\frac{1-s}{2})} = \frac{\pi}{\cos(\frac{\pi s}{2})}$$

et puis $2\sqrt{\pi}2^{-2s}\Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma(s+1/2)$ utilisée sous la forme $2\sqrt{\pi}2^{-s}\Gamma(s) = \Gamma(s/2)\Gamma(\frac{1+s}{2})$, il vient que la fonction $\zeta$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s) \tag{1.5}$$

valable pour tout nombre complexe $s$ différent de 0 et 1, démontrée par Riemann en 1859.

### 1.1.3 Relations entre la fonction de $\zeta$ de Riemann et les nombres premiers

Le lien entre la fonction $\zeta$ et les nombres premiers a été établi en 1737 par Leonhard Euler dans sa thèse intitulée "Variae observationes circa series infinitas" avec la formule, valable pour $\Re\mathrm{e}(s) > 1$ :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\\ &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5^s} + \cdots\right)\\ &= \prod_{p\text{ premier}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p^k)^s}\right) = \prod_{p\text{ premier}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^k\right)\\ \zeta(s) &= \prod_{p\text{ premier}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\end{aligned} \tag{1.6}$$

Une autre formule, reprise de [7], relie la fonction $\zeta$ avec, non plus directement les nombres premiers, mais avec la fonction $\pi(x)$, qui compte les nombres premiers jusqu'à $x$, qui est une sorte de fonction de répartition (mais qui n'a pas les propriétés d'une fonction de répartition sur des probabilités).

Soit $\mathrm{I}_{\mathscr{P}}(n)$ la fonction indicatrice des nombres premiers. Ainsi $\mathrm{I}_{\mathscr{P}}(n) = 1$ si $n$ est premier et 0 sinon. Ainsi

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\text{ premier}}} 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{I}_{\mathscr{P}}(n).$$

Inversement, la fonction $I_{\mathscr{P}}(n)$ peut être décrite à l'aide de la fonction $\pi(x)$ : $I_{\mathscr{P}}(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$. Pour $\sigma = \Re e(s) > 1$, en prenant le logarithme de chaque côté de l'égalité (1.6), il vient

$$\begin{aligned}
\log\zeta(s) &= -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = -\sum_{n=2}^{\infty} I_{\mathscr{P}}(n)\cdot\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)\\
&= -\sum_{n=2}^{\infty}\{\pi(n)-\pi(n-1)\}\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)\\
&= -\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\left\{\log\left(1-\frac{1}{n^s}\right)-\log\left(1-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right\} \text{ en réordonnant selon } \pi(n)\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\int_n^{n+1}\frac{s}{x(x^s-1)}dx \qquad \text{car la dérivée } \frac{d\log(1-1/x^s)}{dx} = \frac{s}{x(x^s-1)}\\
\log\zeta(s) &= s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}dx \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Le réarrangement des séries est justifié par $\pi(n) \le n$ et $\log(1-n^{-s}) = O(n^{-\sigma})$.

Avec cette nouvelle formule, le lien entre $\zeta$ et les fonctions-sommes sur les nombres premiers devient plus clair et il «suffit» d'inverser le formule pour obtenir une estimation de la fonction $\pi(x)$ (Voir Titchmarsh [7] p.51 paragraphe 3.7).

Pour obtenir une formule pour $\pi(x)$ à partir de l'équation (1.7), l'idée est de dériver la formule avec $\log\zeta(s)$. On s'intéresse donc à l'expression $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. En prenant le logarithme puis en dérivant la formule d'Euler (équation (1.6)), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\\
&= -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\frac{1}{1-(1/p^s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^s}\right)^m\\
&= -\sum_p \log p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}}\\
\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

où $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p$ ou une puissance de $p$ et 0 sinon. Cette fonction est appelée la fonction de *Von Mangoldt*.

**Définition 2** (Von Mangoldt)**.** *La fonction de Von Mangoldt est définie par*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \textit{si } n \textit{ est une puissance d'un nombre premier } p \quad (\textit{i.e., } n = p^k, k \geqslant 1)\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}$$

La fonction de von Mangoldt joue donc un rôle important dans la théorie des séries de Dirichlet, en particulier pour la fonction zêta de Riemann. La fonction sommatoire de la fonction de Von Mangoldt, définie par Chebyshev et notée $\psi(x)$, est également très utile :

**Définition 3** (Fonctions de Chebyshev)**.** *La première fonction de Chebyshev, notée* $\vartheta(x)$ *est définie par*

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x}\log p \qquad (1.9)$$

*où la somme s'étend sur les nombres premiers inférieurs ou égaux à* $x$.

*La seconde fonction de Chebyshev, notée $\psi(x)$ est définie par $\psi(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)$. Elle est similaire à $\vartheta(x)$ mais la somme s'étend sur toutes les puissances des nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$ :*

$$\psi(x) = \sum_{p^k\le x} \log p = \sum_{p\le x} \lfloor \log_p x \rfloor \log p. \tag{1.10}$$

Exemples :

- $\theta(10) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7$
- $\psi(10) = 3\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 5 + \ln 7$.

### 1.1.4 Les zéros de $\zeta$

**Théorème 1.** *La fonction de $\zeta$ n'a pas de zéros sur le demi-plan $\Re\mathrm{e}(s) > 1$.*

*Démonstration.* Si $\Re\mathrm{e}(s) > 1$, il est clair à partir de (1.8) que $\zeta$ n'a pas de zéro car la série converge. □

Ce théorème sera complété par le théorème 17 pour montrer que c'est également vrai sur le demi-plan $\Re\mathrm{e}(s) \ge 1$.

**Propriétés :**

1. *La fonction $\xi$ définie par (1.4) est à valeurs réelles sur les droites $\Im\mathrm{m}(s) = 0$ et $\Re\mathrm{e}(s) = \frac{1}{2}$.*
2. *Elle n'a aucun zéro sur les demi-plans $\Re\mathrm{e}(s) \ge 1$ et $\Re\mathrm{e}(s) \le 0$, ni sur l'axe réel. Les zéros, s'ils existent, se répartissent symétriquement autour de l'axe $\Im\mathrm{m}(s) = 0$ et la droite $\Re\mathrm{e}(s) = 1/2$.*
3. *Les zéros de $\zeta$ sont, d'une part ceux de $\xi$ et, d'autre part, les zéros simples aux points -2,-4,-6,...de la fonction $\{\Gamma(1+s/2)\}^{-1}$.*

Nous retiendrons donc :

**Théorème 2.** *Les zéros de $\zeta$ sont :*

— *les zéros dits "triviaux" : ce sont les zéros simples aux points $-2,-4,-6,\cdots,-2n,\cdots$ (ce sont les zéros de $\Gamma(1+s/2)^{-1}$)*

— *Les zéros non triviaux :*
*la fonction $\zeta$ admet une infinité de zéros dans la bande $\Re\mathrm{e}(s) \in ]0,1[$. Ils se répartissent symétriquement autour de l'axe réel $\Im\mathrm{m}(s) = 0$ et de la droite $\Re\mathrm{e}(s) = \frac{1}{2}$.*

**Conjecture 1** (Riemann)**.** *Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont tous simples et de partie réelle égale à 1/2. Ce qui peut s'exprimer de la façon suivante : si $0 \le \Re\mathrm{e}(s) \le 1$ et si $\zeta(s) = 0$ alors $\Re\mathrm{e}(s) = 1/2$.*

### 1.1.5 Vérification de la conjecture de Riemann

Comme la fonction $\xi$ satisfait à l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$ et que $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, il vient que si on définit la fonction thêta de Riemann-Siegel par $\theta(t) = \arg\left(\pi^{-\frac{1}{2}it}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)\right)$, alors la fonction

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta(\frac{1}{2}+it)$$

est réelle pour $t$ réel. Comme $|Z(t)| = |\zeta(1/2+it)|$, les zéros de Z sont les parties imaginaires des zéros de $\zeta(s)$ sur la ligne critique.

La conjecture de Riemann a été vérifiée jusqu'à une hauteur H.

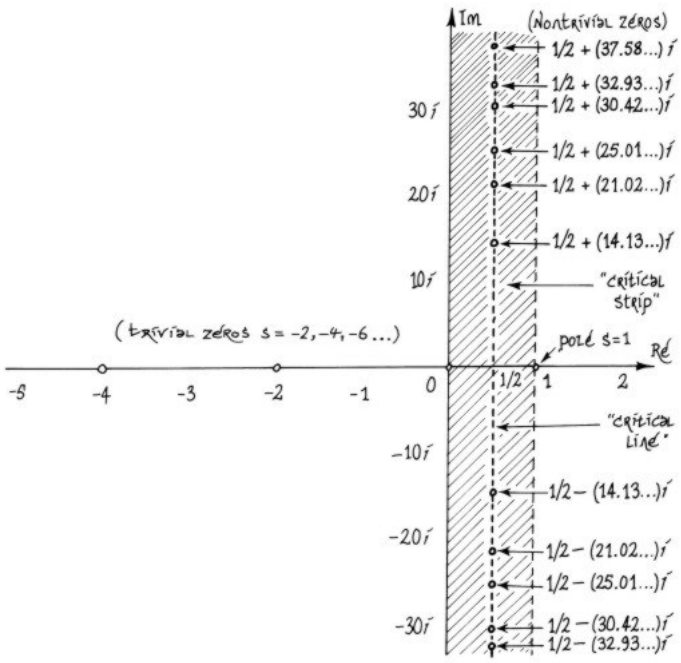



FIGURE 1.1 – Zéros triviaux et non triviaux de $\zeta$

Source: http ://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/zeros.jpg

### 1.1.6 Valeurs de $\zeta$

**Théorème 3** (Weierstrass)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les facteurs élémentaires par :*

$$\mathrm{E}_n(z) = \begin{cases} (1-z) & \text{si } n = 0, \\ (1-z)\exp\left(\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

*Soit $f$ une fonction entière et $\{a_n\}$ les zéros non nuls de $f$ répétés si nécessaire selon leur multiplicité. Supposons de plus que $f$ a un zéro en $z = 0$ d'ordre $m \geq 0$ (en prenant par convention, qu'un zéro d'ordre $m = 0$ en $z = 0$ signifie $f(0) \neq 0$. Alors il existe une fonction entière $g$ et une suite d'entiers $\{b_n\}$ tels que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_{b_n}(z/a_n).$$

Exemple de factorisation : $\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$.

**Théorème 4** (Hadamard,1890)**.** *[2, chap 11] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $f(0) \neq 0$ et supposons qu'il existe deux constantes $\mathrm{A} > 0$ et $\theta < 2$ telles que $f(z) = \mathrm{O}(\exp(\mathrm{A}|z|^{\theta}))$ pour tout $z$ complexe. Alors il existe deux constantes $\alpha$ et $\beta$ telles que*

$$f(z) = e^{\alpha+\beta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{(1 - \frac{z}{\rho_n})e^{z/\rho_n}\right\}, \tag{1.11}$$

*où $\rho_n$ parcourt l'ensemble des zéros de $f(z)$ comptés avec leur multiplicité. La somme infinie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-2}$ converge de sorte que le produit précédent est absolument et uniformément convergent sur tout compact qui inclut aucun de ces zéros.*

**Proposition 5.** *Soit $\gamma$ la constante d'Euler.*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \ln 2\pi - \frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

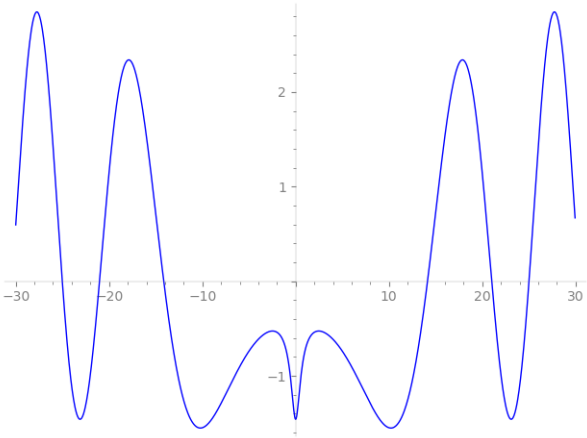



FIGURE 1.2 – Graphe de $Z(t)$

*Démonstration.* Nous allons appliquer le théorème 4 à la fonction (1.4)

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

On commence par montrer que

$$|\xi(s)| < \exp(C|s|\log|s|)$$

lorsque $|s| \to \infty$ pour une certaine constante C. Comme $\xi(s) = \xi(1-s)$, il suffit d'établir cela pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$. De façon évidente,

$$\left|\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\right| < \exp(C_1|s|)$$

et

$$\Gamma(s/2) = O(\exp(|s|\log|s|))$$

par la formule de Stirling, qui est applicable lorsque $-\frac{\pi}{2} < \arg s < \frac{\pi}{2}$. Pour estimer $\zeta(s)$, on utilise la représentation (1.3)

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx.$$

L'intégrale est bornée pour $\sigma \geq 1/2$ et ainsi $|\zeta(s)| < C_2|s|$ lorsque $|s|$ est grand. Comme $\xi(0) = 1/2$, on peut appliquer le théorème 4. La constante $\alpha$ du théorème 4 est positionnée par identification. En effet, comme

$$\xi(1) = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\Gamma(1/2)\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1/2$$

et $\xi(0) = 1/2$, on obtient $e^\alpha = 1/2$ par (1.11). Pour déterminer $\beta$, on utilise la dérivée logarithmique de la formule (1.11) :

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \beta + \sum_\rho\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

et obtenir que $\beta = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}$ par l'équation fonctionnelle de $\xi(s)$. La dérivée logarithmique de (1.4) donne

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+s/2)}{\Gamma(1+s/2)}.$$

A partir de la dérivée logarithmique de la formule de Weierstrass (cf. Théorème 3),

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n},$$

on obtient

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1+s/2)}{\Gamma(1+s/2)} = \gamma/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right),$$

que l'on évalue au point $s = 1$ pour obtenir

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)} = \gamma/2 - 1 + \ln 2$$

et en déduire que

$$\beta = \gamma/2 - 1 + \frac{1}{2}\ln(4\pi) - \lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right).$$

Pour évaluer cette limite, nous avons de nouveau recours à la représentation (1.3). Un simple calcul montre que

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) = 1 - \int_1^{\infty} (x - [x])x^{-2}dx.$$

Poursuivons le calcul

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} (x-[x])x^{-2}dx &= \lim_{N\to\infty}\left[\ln N - \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\ln N - \sum_{n=1}^{N-1} 1/n + 1\right] = 1 - \gamma.\end{aligned}$$

Ainsi $\beta = -\gamma/2 - 1 + \frac{1}{2}\ln(4\pi)$. On obtient

$$\xi(s) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\ln(4\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}\right)s}}{2} \prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}$$

et

$$\zeta(s) = \frac{e^{\left(\ln(2\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2}\right)s}}{2(s-1)\Gamma(1+\frac{s}{2})} \prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho}$$

La dérivée logarithmique de cette dernière identité permet d'obtenir la proposition. □

**Lemme 6.**

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \ln 2\pi$$

*Démonstration.* On utilise la proposition 5 et le fait que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$. □

**Lemme 7.** *Pour $x > 1$,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,x^{2n}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

*Démonstration.* On utilise les développements en série entière. Pour $-1 \leq u < 1$, $\ln(1 - u) = -\sum_{n\geq 1} \frac{u^n}{n}$. □

## 1.2 Utilisation de la fonction de $\zeta$ de Riemann dans l'étude de la répartition des nombres premiers

### 1.2.1 Formule sommatoire d'Abel

Un outil très puissant en théorie analytique des nombres est la technique de remplacement des sommes par des intégrales. Cette technique, dite de sommation d'Abel, est la suivante :

**Théorème 8** (Formule sommatoire d'Abel)**.** *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de nombres réels ou complexes et* $\varphi$ *une fonction réelle ou complexe de classe* $\mathrm{C}^1$ *(dérivée première continue).*

*On pose*

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1\le n\le x} a_n.$$

*Alors, pour tout réel x,*

$$\sum_{1\le n\le x} a_n\varphi(n) = \mathrm{A}(x)\varphi(x) - \int_1^x \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

*de plus, lorsque le produit* $\mathrm{A}(x)\varphi(x)$ *s'annule à l'infini, alors (si cela a un sens)*

$$\sum_{1\le n\le x} a_n\varphi(n) = -\int_1^x \mathrm{A}(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

On applique cette formule sur l'équation (1.8)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s},$$

issue du logarithme de la fonction zêta de Riemann suivi de sa dérivée logarithmique pour obtenir pour $\Re\mathrm{e}(s) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u^{s+1}}du,$$

ou encore, par intégration par parties,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s(s+1)\int_1^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^{s+2}}du,$$

où $\psi_1(x) = \int_1^{\infty}\psi(u)du$. En effet, la primitive d'une fonction est plus régulière que la fonction initiale, ce qui rend les opérations plus aisées.

On inverse cette dernière égalité pour obtenir une formule pour $\psi_1(x)$ à l'aide de la formule de Perron.

### 1.2.2 Formule de Perron

La formule de Perron est une formule permettant de calculer la fonction sommatoire

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{n\le x}{}^{\star} a(n)$$

d'une fonction arithmétique, au moyen d'une transformation de Mellin inverse de la série de Dirichlet associée, c'est-à-dire la formule de Perron décrit la transformation de Mellin inverse appliquée aux séries de Dirichlet.

**Théorème 9** (Formule de Perron)**.** *Soient* $(a(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une fonction arithmétique et*

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{n\leq x}{}^{\star} a(n),$$

*où l'étoile sur la sommation indique que le dernier terme n'est compté qu'avec un poids de 1/2 lorsque x est entier.*

*Nous supposons que la série de Dirichlet classique* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ *admet une abscisse de convergence simple finie* $\sigma_c$.

*Alors, pour tous réels* $c > \max(0, \sigma_c)$ *et* $x > 0$,

$$\mathrm{A}(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} f(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s, \tag{1.12}$$

*où l'intégrale est semi-convergente pour x non entier et converge en valeur principale pour x entier.*

### 1.2.3 Formule liant la fonction $\psi(x)$ de Chebyshev avec les zéros de la fonction $\zeta$ de Riemann

La fonction $\psi(x)$, définie par (1.10), admet des discontinuités aux points où $x$ est une puissance d'un nombre premier. Pour appliquer la formule précédente, il est nécessaire de modifier légèrement sa définition en prenant la valeur moyenne aux sauts de discontinuité. Ainsi on pose

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \neq p^n \\ \frac{\psi(x-1/2)+\psi(x+1/2)}{2} & \text{si } x = p^n \end{cases}.$$

La formule de Perron (1.12) appliquée à l'égalité suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

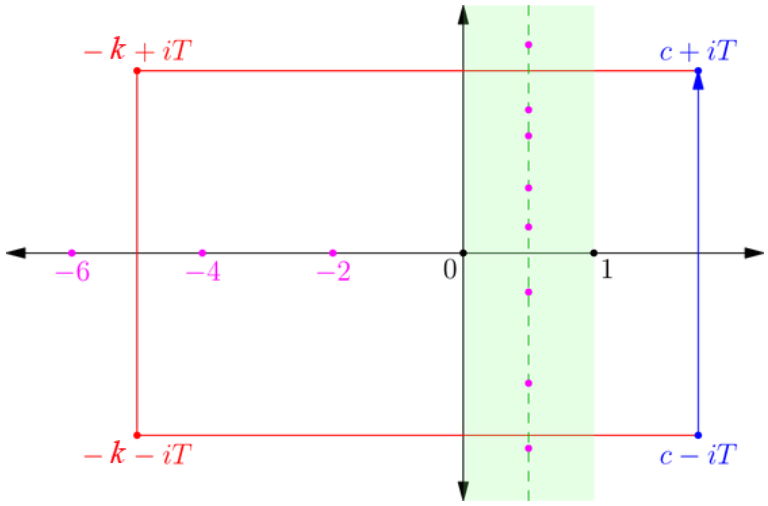
valable pour $\Re\mathrm{e}(s) > 1$, donne une "inversion" de la forme

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \left[ -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s$$

pour $c > 1$.

La fonction $\psi_0$ peut alors s'exprimer comme somme des résidus de la fonction $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s}$ à ses pôles.

Pour montrer cela, le contour d'intégration sera $c - i\mathrm{T}$ jusqu'à $c + i\mathrm{T}$ et fermé sur la gauche par $-k - i\mathrm{T}$ jusqu'à $-k + i\mathrm{T}$ ($k \in \mathbb{R}_+ \backslash 2\mathbb{N}$) de façon à constituer un rectangle $\mathscr{R}$.




On pose

$$\mathrm{I}(x,\mathrm{T}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\mathrm{T}}^{c+i\mathrm{T}} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds.$$

Ainsi $\psi_0(x) = \mathrm{I}(x,\infty)$ et, d'après le théorème des résidus, le pôle de $1/s$ en $s=0$ contribue avec un résidu de $-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)$, le pôle de $\zeta(s)$ en $s=1$ avec un résidu de $x$, et chaque zéro $\rho$ de $\zeta$, trivial ou non, contribue avec un résidu de $-x^\rho/\rho$. Nous obtenons

$$\mathrm{I}(x,\mathrm{T}) + \mathrm{I}_1(\mathrm{T},k) + \mathrm{I}_2(\mathrm{T},k) + \mathrm{I}_3(\mathrm{T},k) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(0) + x - \sum_{|\gamma|<\mathrm{T}} x^\rho/\rho + \sum_{1\le n\le \frac{k}{2}} x^{-2n}/(2n), \tag{1.13}$$

où $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$, $\mathrm{I}_3$ sont respectivement les intégrations sur les segments $[c+i\mathrm{T}, -k+i\mathrm{T}]$, $[-k+i\mathrm{T}, -k-i\mathrm{T}]$ et $[-k-i\mathrm{T}, c-i\mathrm{T}]$. Il reste à prouver que ces intégrales tendent vers zéro lorsque $k$ et T tendent vers l'infini.

Pour $\mathrm{I}_1$, ces majorations classiques sont utilisées (Davenport [2] p.108)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\mathrm{T}) = \begin{cases} \mathrm{O}(\ln^2\mathrm{T}) & \text{pour} \quad -1\le\sigma\le 2 \\ \mathrm{O}(\ln(2|\sigma+i\mathrm{T}|)) & \text{pour} \quad \sigma\le -1 \end{cases}$$

Ainsi il existe une constante formelle K (la constante n'est pas forcément la même à chaque fois) telle que

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(\mathrm{T},k) &\leqslant \mathrm{K}\left[\ln^2\mathrm{T}\int_{-1}^{c}\left|\frac{x^s}{s}\right|d\sigma + \ln(2\mathrm{T})\int_{-k}^{-1}\left|\frac{x^s}{s}\right|d\sigma\right] \\
&\leqslant \mathrm{K}\left[\frac{\log^2\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{c} x^\sigma d\sigma + \frac{\ln(2\mathrm{T})}{\mathrm{T}}\int_{-k}^{-1} x^\sigma d\sigma\right] \\
&\leqslant \mathrm{K}\left[\frac{\log^2\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{c} x^\sigma d\sigma + \frac{\ln(2\mathrm{T})}{\mathrm{T}}\int_{-k}^{-1} x^\sigma d\sigma\right] \\
\mathrm{I}_1(\mathrm{T},k) &= \mathrm{O}\left(\frac{\log^2\mathrm{T}}{\mathrm{T}}\frac{x}{\ln x}\right)
\end{aligned}$$

Il en est de même pour $I_3$. Pour l'intégration suivant la ligne verticale, avec $s = \sigma + it$,

$$\begin{aligned} I_2(T,k) &\leqslant K\ln(2k)\int_{-k-iT}^{-k+iT}\left|\frac{x^s}{s}\right|d\sigma \\ &\leqslant K\frac{\ln(2k)}{k}\int_{-T}^{T}x^{-k}dt \\ &= K\frac{\ln(2k)}{k}x^{-k}2T \\ I_2(T,k) &= O\left(\frac{T\log k}{kx^k}\right) \end{aligned}$$

En reprenant (1.13) avec les lemmes 6 et 7, nous obtenons la formule bien connue suivante :

**Théorème 10** (Formule explicite de Riemann (Démontrée par Von Mangoldt en 1895))**.** *Pour $x > 1$,*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

*où la sommation porte uniquement les zéros $\rho$ non triviaux de $\zeta$.*

Le dernier point à montrer est que les autres termes de droite sont négligeables devant $x$, autrement dit qu'il n'y a pas de zéro $\rho$ dont la partie réelle est 1. Ce point a été prouvé par Hadamard et La Vallée Poussin (Théorème 17).

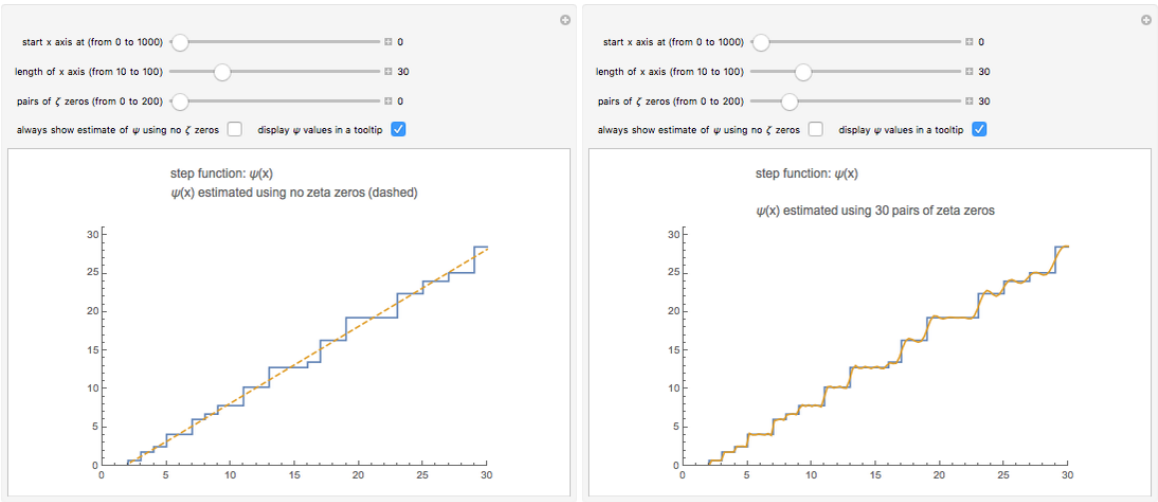



FIGURE 1.3 – Influence des zéros sur la précision

Source: https://demonstrations.wolfram.com/UsingZetaZerosToComputeTheChebyshevPsiFunction/

### 1.2.4 La fonction N(T)

Nous allons étudier la fréquence des zéros de $\zeta(s)$ dans la bande critique. Définissons

$$N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma : 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq T\}$$

qui compte les zéros d'ordonnée positive dans la bande critique.

**Théorème 11.** *Si* T *ne correspond pas à l'ordonnée d'un zéro, alors*

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\ln\frac{\mathrm{T}}{2\pi} - \frac{\mathrm{T}}{2\pi} + \frac{7}{8} + \mathrm{S}(\mathrm{T}) + \mathrm{O}(1/\mathrm{T}),$$

*où* $\mathrm{S}(\mathrm{T}) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta(1/2+i\mathrm{T})$ *est définie par variation continue le long des segments* $[2, 2+i\mathrm{T}]$ *et* $[2+i\mathrm{T}, 1/2+i\mathrm{T}]$.

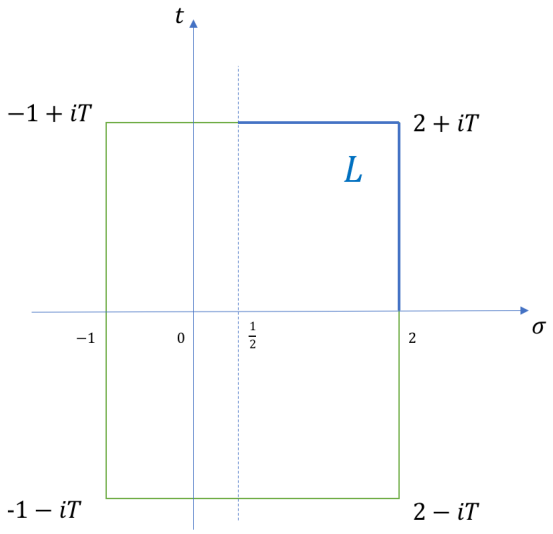
*Démonstration.* Il est plus confortable de travailler avec $\xi$ plutôt que $\zeta$ de part de son équation fonctionnelle. Soit $\mathscr{R}$ le chemin rectangulaire de sommets $2$, $2+i\mathrm{T}$, $-1+i\mathrm{T}$, $-1$ parcouru dans ce sens. Le nombre de zéros de $\xi$ à l'intérieur de ce contour $\mathscr{R}$ est $\mathrm{N}(\mathrm{T})$. En supposant T ne coïncide pas avec l'ordonnée d'un zéro, on a

$$2\pi\mathrm{N}(\mathrm{T}) = \Delta_{\mathrm{R}}\arg\xi(s),$$

où $\Delta_{\mathrm{R}}$ est l'augmentation de la fonction le long de $\mathscr{R}$. L'hypothèse sur T permet d'assurer que $\xi(s)$ ne dépend pas de $\mathscr{R}$. Comme $\xi(s) = \xi(1-s)$ et $\xi(1-s) = \overline{\xi(1-\bar{s})}$, les deux valeurs $\xi(\frac{1}{2}+a+ib)$ et $\xi(\frac{1}{2}-a+ib)$ sont conjuguées. Ainsi

$$\Delta_{\mathrm{R}}\arg\xi(s) = 2\,\Delta_{\mathrm{C}}\arg\xi(s),$$

où $\mathscr{C}$ est le chemin $1/2 \to 2 \to 2+i\mathrm{T} \to 1/2+i\mathrm{T}$. Sur le premier segment, $\xi(s)$ est réelle et strictement positive, ainsi sa contribution dans $\Delta_{\mathrm{C}}\arg\xi(s)$ vaut zéro. Soit $\mathscr{L}$ la ligne brisée $2 \to 2+i\mathrm{T} \to 1/2+i\mathrm{T}$ restante.




Ainsi avec la définition (1.4),

$$\Delta_{\mathrm{C}}\arg\xi(s) = \Delta_{\mathrm{L}}\arg\xi(s) = \Delta_{\mathrm{L}}\{\arg(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\} + \Delta_{\mathrm{L}}\arg\zeta(s).$$

Sur $\mathscr{L}$, la fonction $s-1$ va de $1$ à $-1/2+i\mathrm{T}$, soit

$$\Delta_{\mathrm{L}}\arg(s-1) = \arg(-1/2+i\mathrm{T}) = \pi/2 + \mathrm{O}(1/\mathrm{T}).$$

Il est facile de vérifier que, sur $\mathscr{L}$, $\arg_{\mathrm{L}}\pi^{-s/2} = \Im\mathrm{m}\ln\pi^{-s/2} = \Im\mathrm{m}(\frac{-s}{2}\ln\pi)$ qui varie de $0$ à $-\frac{\mathrm{T}}{2}\ln\pi$ et ainsi

$$\arg_{\mathrm{L}}\pi^{-s/2} = -\frac{\mathrm{T}}{2}\ln\pi.$$

La formule de Stirling (1.1) indique que

$$\ln\Gamma(z) = (s-1/2)\ln z - z + \ln(2\pi)/2 + O(1/|z|)$$

et permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Delta_L \arg\Gamma(s/2+1) &= \Im\mathrm{m}\ln\Gamma\left(\frac{1/2+iT}{2}+1\right)\\ &= \Im\mathrm{m}\left\{(3/4+iT/2)\ln(5/4+iT/2)-(5/4+iT/2)+\log(2\pi)/2\right\}+O(1/T)\\ &= \frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}+\frac{3\pi}{8}+O(1/T),\end{aligned}$$

comme $\ln(5/4+iT/2) = \ln(T/2)+i\pi/2+O(1/T)$. Ainsi, en rassemblant les différents arguments,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+S(T)+O(1/T).$$

Le comportement asymptotique de $S(T)$ sera étudié dans la proposition 13. □

**Lemme 12.** *Si les sommations portent sur les zéros non-triviaux $\rho=\beta+i\gamma$ de $\zeta(s)$, alors*

1. *Pour $T$ grand,* $\displaystyle\sum_\rho \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} = O(\ln T)$.
2. *Quand $T$ croît infiniment (et ne coïncide pas avec l'ordonnée d'un zéro) et pour $s=\sigma+iT$ avec $-1\le\sigma\le 2$*
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho/|\gamma-T|<1}\frac{1}{s-\rho}+O(\ln T)$$

*Démonstration.* D'après la formule asymptotique (1.2) de $\Gamma(z)$, on voit facilement qu'il existe une constante A telle que, pour $z=\sigma+it$ avec $1\le\sigma\le 2$ et $t\ge 2$, $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} < A\ln z$. En utilisant cette majoration du terme $\Gamma$ dans la proposition 5, on obtient

$$-\Re\mathrm{e}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A\ln t - \sum_\rho \Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

pour $1\le\sigma\le 2$ et $t\ge 2$.

Prenons $s=2+iT$ dans cette formule. Comme $|\zeta'/\zeta|$ est borné pour de tels $s$, on obtient

$$\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) < A\ln T.$$

Comme tous les termes de chaque série sont positifs, et comme $\Re\mathrm{e}\frac{1}{s-\rho} = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} \ge \frac{1}{4+(T-\gamma)^2}$, on obtient la première partie du lemme. On remarque que ce premier résultat permet de déduire que

a) Le nombre de zéros avec $T-1<\gamma<T+1$ est $O(\ln T)$ car

$$\sum_\rho \frac{1}{1+|\gamma-T|^2} \ge \sum_{|\gamma-T|<1}\frac{1}{1+|\gamma-T|^2} \ge \frac{1}{2}\sum_{|\gamma-T|<1} 1. \tag{1.14}$$

b) La somme $\sum(T-\gamma)^{-2}$ sur les zéros avec $\gamma$ tel que $|\gamma-t|>1$ est aussi en $O(\ln T)$.

Intéressons-nous maintenant à la suite. La proposition 5 appliquée en $2+it$ donne

$$\sum_\rho \left\{ \frac{1}{2+i\mathrm{T}-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2+i\mathrm{T}/2) + \mathrm{O}(1).$$

En dérivant la formule de Stirling (1.1), on obtient l'ordre de

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \ln s + \mathrm{O}(1) \text{ pour } (|\arg(s)| < \pi),$$

pour obtenir

$$\sum_\rho \left\{ \frac{1}{2+i\mathrm{T}-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} = \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}).$$

En soustrayant la formule précédente à la même formule (proposition 5) appliquée en $s$, on obtient

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}) + \sum_\rho \left( \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+i\mathrm{T}-\rho} \right).$$

Pour les termes avec $|\gamma - t| \geq 1$, on a

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+i\mathrm{T}-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+it-\rho)|} \leq \frac{3}{|\gamma - t|^2}$$

dont la somme sur ce type de zéros est en $\mathrm{O}(\ln \mathrm{T})$ par la remarque b) au-dessus. Pour les termes avec $|\gamma - t| < 1$, on a $|2+it-\rho| \geq 1$ et dont la somme est en $\mathrm{O}(\ln t)$ selon la remarque a) au-dessus. □

**Proposition 13.** *Soit* $\mathrm{S}(\mathrm{T}) = \frac{1}{\pi}\Delta_{\mathrm{L}} \arg\zeta(s)$ *(Voir théorème 11). Alors* $\mathrm{S}(\mathrm{T}) = \mathrm{O}(\ln \mathrm{T})$.

*Démonstration.* On parcourt le chemin $\mathrm{L} : 2 \to 2+i\mathrm{T} \to 1/2+i\mathrm{T}$. Comme $\arg\zeta(2) = 0$, on a $\mathrm{S}(\mathrm{T}) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta(1/2+i\mathrm{T})$.

En prenant $\mathrm{T} \geq 2$, on a

$$\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+i\mathrm{T}\right) = \Im\mathrm{m}\ln\zeta\left(\frac{1}{2}+i\mathrm{T}\right) = \Im\mathrm{m}\left\{ \int_2^{2+i\mathrm{T}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\mathrm{d}s + \int_{2+i\mathrm{T}}^{1/2+i\mathrm{T}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\mathrm{d}s \right\}.$$

Sur le premier segment,

$$\int_2^{2+i\mathrm{T}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\mathrm{d}s = \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \ln n} \right]_2^{2+i\mathrm{T}} = \mathrm{O}(1).$$

Pour le second segment, par le lemme 12

$$\begin{aligned}
\Im\mathrm{m}\int_{2+i\mathrm{T}}^{1/2+i\mathrm{T}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\mathrm{d}s &= \sum_{\rho:|\gamma-\mathrm{T}|\leq 1} \Im\mathrm{m}\int_{2+i\mathrm{T}}^{1/2+i\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}s}{s-\rho} + \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}) \\
&= \sum_{\rho:|\gamma-\mathrm{T}|\leq 1} \Im\mathrm{m}\big(\ln(1/2-i\mathrm{T}-\rho) - \ln(2+i\mathrm{T}-\rho)\big) + \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}) \\
&= \sum_{\rho:|\gamma-\mathrm{T}|\leq 1} \big(\arg(1/2-i\mathrm{T}-\rho) - \arg(2+i\mathrm{T}-\rho)\big) + \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}) \\
&= \sum_{\rho:|\gamma-\mathrm{T}|\leq 1} \mathrm{O}(1) + \mathrm{O}(\ln \mathrm{T}) \\
&= \mathrm{O}(\ln \mathrm{T})
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 14.** *Si* $T \geq 2$ *ne correspond pas à l'ordonnée d'un zéro, alors*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + O(\ln T).$$

**Lemme 15.**

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\ln^2 T) \quad \textit{pour } -1 \leq \sigma \leq 2. \tag{1.15}$$

$$|\zeta'(s)/\zeta(s)| = O(\ln(2|s|)) \quad \textit{pour } \sigma \leq -1. \tag{1.16}$$

*Démonstration.* (Davenport[2] p.108) On a vu par la remarque de l'équation (1.14) que, pour T assez grand, le nombre de zéros avec $|\gamma - T| < 1$ est en $O(\ln T)$. Parmi les ordonnées de ces zéros, il y a un écart de longueur plus grand qu'un $O((\ln T)^{-1})$. Ainsi en faisant varier T par une petite quantité, on peut assurer que $|\gamma - T|$ est plus grand qu'un $O((\ln T)^{-1})$ pour tous les zéros $\beta + i\gamma$. Par le lemme 12, on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho/|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln T)$$

pour $s = \sigma + iT$ et $-1 \leq \sigma \leq 2$. Pour le choix de T, chaque terme est en $O(\ln T)$ et le nombre de termes est aussi en $O(\ln T)$ ; ainsi

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\ln^2 T) \quad \text{pour } -1 \leq \sigma \leq 2.$$

Pour la seconde estimation, on utilise l'équation fonctionnelle de $\zeta$ sous sa forme non-symétrique :

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Si $1 - \sigma \leq -1$, les termes de droite sont à considérer pour $\sigma \geq 2$. En prenant la dérivée logarithmique du terme de droite, on obtient :

$$-\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi s}{2}) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \ln(2\pi).$$

Le premier terme est borné si $|s-(2m+1)| \geq 1/2$ c'est-à-dire $|(1-s)+2m| \geq 1/2$. Le second terme est en $O(\ln|s|)$ par (1.2) et ainsi en $O(\ln(2|1-s|)$ pour $\sigma \geq 2$. Le troisième terme est borné. On obtient le résultat cherché.

□

### 1.2.5 Etude de $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = 1$

Les zéros non-triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent dans la bande critique $0 \leq \sigma \leq 1$. Nous allons montrer qu'il n'y a pas de zéros sur la frontière de cette bande.

**Lemme 16** (Mertens)**.** *Pour tout* $\theta$ *réel, on a*

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.$$

**Théorème 17** (Hadamard et De la Vallée Poussin, indépendamment en 1896)**.** *Pour tout réel* $t$, $\zeta(1+it) \neq 0$.

*Démonstration.* Nous voulons montrer que $\zeta$ n'a aucun zéro sur la droite $\Re\mathrm{e}(s) = 1$. Si $\sigma > 1$, on a pour tout réel

$$\ln\zeta(\sigma + it) = -\sum_p \ln(1 - p^{-\sigma - it}) = \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu(\sigma+it)}.$$

En considérant la partie réelle, $\Re\mathrm{e}\ln\zeta(\sigma + it) = \sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} p^{-\nu\sigma} \cos(\nu t \ln p)$. Le lemme 16 implique que

$$\sum_p \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} p^{-\nu\sigma} \left(3 + 4\cos(\nu t \ln p) + cos(2\nu t \ln p)\right) \geq 0.$$

et ainsi

$$3\Re\mathrm{e}\ln\zeta(\sigma) + 4\Re\mathrm{e}\ln\zeta(\sigma + it) + \Re\mathrm{e}\ln\zeta(\sigma + 2it) \geq 0,$$

ou encore pour tout $\sigma > 1$ et tout $t$ réels,

$$|\zeta(\sigma)|^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1. \tag{1.17}$$

Supposons par l'absurde que $s = 1 + it_0$ soit un zéro de $\zeta$. Il est certain que $t_0 \neq 0$ car $s = 1$ est un pôle de $\zeta$. Dans l'inégalité (1.17) précédente, on choisit $t = t_0$ et on fait tendre $\sigma$ vers 1 par valeurs supérieures. Comme $s = 1$ est un pôle simple, on a $\zeta(s) = \mathrm{O}((\sigma - 1)^{-1})$. Le fait que $1 + it_0$ soit un zéro entraîne que $\zeta(\sigma + it_0) = \mathrm{O}(\sigma - 1)$. Par ailleurs, $\zeta(\sigma + 2it_0) = \mathrm{O}(1)$ car $\sigma + 2it_0$ n'est pas un pôle comme $t_0 \neq 0$. Donc $|\zeta(\sigma)|^3 \cdot |\zeta(\sigma + it_0)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it_0)| = \mathrm{O}((\sigma - 1)^{-3}(\sigma - 1)^4) = \mathrm{O}(\sigma - 1)$, ce qui contredit l'inégalité (1.17). □

De la Vallée Poussin a étendu cet argument pour montrer en 1899 que $\zeta(s) \neq 0$ dans une fine région à gauche de $\sigma = 1$.

**Théorème 18** (De la Vallée Poussin)**.** *Il existe une constante absolue $c$, positive, telle que pour tout $\mathrm{T} \geq 2$, il n'y a pas de zéro dans le région*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln \mathrm{T}}, \quad |t| \leq \mathrm{T}.$$

*Démonstration.* On part de $\frac{1}{n^{\sigma+it}} = \frac{1}{n^\sigma e^{it\ln n}} = \frac{e^{-it\ln n}}{n^\sigma}$. Ainsi $\Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{n^{\sigma+it}}\right) = \frac{1}{n^\sigma}\cos(t\ln n)$. En appliquant l'identité (1.8) à l'inégalité du lemme 16, on obtient

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\mathrm{e}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\{3 + 4\cos(t\ln n) + \cos(2t\ln n)\} \geq 0. \tag{1.18}$$

Pour $1 < \sigma \leq 2$, le développement de Laurent autour du pôle simple $s = 1$ donne

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + \mathrm{O}(1).$$

Le comportement des deux autres fonctions au voisinage de $\sigma = 1$ est influencé par tout zéro que $\zeta(s)$ peut avoir à juste gauche de $\sigma = 1$ à une hauteur proche de $t$ ou $2t$. A l'aide de la proposition 5 qui rend cette influence explicite, et en majorant le terme des $\Gamma$ par $\mathrm{A}\ln t$ lorsque $t \geq 2$ et $1 \leq \sigma \leq 2$, on obtient

$$-\Re\mathrm{e}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < \mathrm{A}\ln t - \sum_\rho \Re\mathrm{e}\left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho}\right).$$

La somme sur les $\rho$ est positive comme

$$\Re\mathrm{e}\frac{1}{s - \rho} = \frac{\sigma - \beta}{|s - \rho|^2} \quad \text{et} \quad \Re\mathrm{e}\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{|\rho|^2}.$$

Ainsi lorsque $s = \sigma + 2it$, on obtient l'inégalité

$$-\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it))} < A\ln t.$$

Pour la partie avec $s = \sigma + it$, on choisit $t$ qui coïncide avec l'ordonnée $\gamma_0$ d'un zéro $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ avec $\gamma \geq 2$. En prenant juste le terme $1/(s-\rho_0)$ qui correspond à ce zéro dans la somme :

$$-\Re\mathrm{e}\,\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it))} < A\ln t - \frac{1}{\sigma-\beta_0}.$$

En substituant ces majorations dans l'équation (1.18), on obtient

$$\frac{4}{\sigma-\beta_0} < \frac{3}{\sigma-1} + K\ln t.$$

En supposant $\beta_0 = 1$, on obtient une contradiction en choisissant $\sigma = 1 + \frac{1}{2K\ln t}$ : dans ce cas, l'inégalité précédente devient $\beta_0 < 1 + \frac{1}{2K\ln t} - \frac{4}{7}\frac{1}{K\ln t} < 1$. Si $\beta_0 < 3/4$, on a immédiatement $\beta < 1 - \frac{c_0}{\ln t}$ (prendre $c_0 = 1/4\ln 2$ pour $t \geq 2$). Si $3/4 \leq \beta_0 < 1$, on choisit $\sigma = 1 + 4(1-\beta_0)$ (ainsi on peut vérifier que $1 < \sigma \leq 2$). Dans ce cas, l'inégalité considérée conduit à $\frac{4/5}{1-\beta_0} - \frac{3/4}{1-\beta_0} < K\ln t$ ou encore $\beta_0 < 1 - \frac{1}{20K\ln t}$. □

## 1.3 Théorème des Nombres Premiers

La forme la plus connue du Théorème des Nombres Premiers est une estimation de $\pi(x)$, mais il est plus naturel de travailler avec $\Lambda(n)$ et $\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ c'est-à-dire $\psi(x)$. Les deux fonctions sont liées par le lemme suivant :

**Lemme 19.** *Pour $x \geq 2$, on a*

$$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t + O(x^{1/2}).$$

*Démonstration.* Reprenons $\vartheta(x) = \sum_{p\leq x}\ln p$ de la définition 3. Alors, en utilisant l'intégrale de Stieltjes, on peut écrire $\sum_{p\leq x} 1 = \int_{2^-}^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}\vartheta(t)$. Une intégration par parties donne

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

De plus, $\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{k\geq 2}\psi(x^{1/k}) = \sum_{k\geq 2, p\leq x^{1/k}}\ln p$. Les termes pour $k \geq 2$ portent sur les $p \leq x^{1/2}$ et il y a au plus $x^{1/2}$ de tels $p$. De plus $k \leq \ln x/\ln p$ ainsi la contribution totale de ces termes est en $O(x^{1/2}\ln x)$. Ainsi

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2}\ln x).$$

En substituant $\theta$ par $\psi$ dans l'égalité liant $\pi$ et $\vartheta$, on obtient le résultat cherché. □

**Lemme 20.** *Soit $\delta(y)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & si\, 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & si\, y = 1, \\ 1 & si\, y > 1. \end{cases}$$

*et soit*

$$\mathrm{I}(y,\mathrm{T}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\mathrm{T}}^{c+i\mathrm{T}} \frac{y^s}{s} ds.$$

*Alors pour* $y > 0$, $c > 0$, $\mathrm{T} > 0$,

$$|\mathrm{I}(y,\mathrm{T}) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min(1, \mathrm{T}^{-1}|\ln y|^{-1}) & si\ y \neq 1 \\ c\mathrm{T}^{-1} & si\ y = 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que, pour $c > 0$, $\mathrm{I}(y,\infty) = \delta(y)$. Il reste à évaluer le terme d'erreur lorsque la borne d'intégration est finie. Prenons d'abord le cas $0 < y < 1$. On remplace le chemin d'intégration par le chemin (par la droite) $c - i\mathrm{T} \to \mathrm{N} - i\mathrm{T} \to \mathrm{N} + i\mathrm{T} \to c + i\mathrm{T}$ avec $\mathrm{N} \to \infty$, car la fonction $y^s/s$ tend vers 0 lorsque $\sigma \to +\infty$ et cela uniformément en $t$. Ainsi $\int_{\mathrm{N}-i\mathrm{T}}^{\mathrm{N}+i\mathrm{T}} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s \to 0$ tandis que $\left|\int_{c-i\mathrm{T}}^{\mathrm{N}-i\mathrm{T}} \frac{y^s}{s}\mathrm{d}s\right| \leq \int_c^\infty \frac{y^\sigma}{\mathrm{T}}\mathrm{d}\sigma = \frac{y^c}{\mathrm{T}|\ln y|}$. Il en est de même pour l'intégrale de $\mathrm{N} + i\mathrm{T}$ à $c + i\mathrm{T}$. Dans le cas où $y > 1$, on remplace le chemin vertical par le chemin (par la gauche) $c - i\mathrm{T} \to -\mathrm{N} - i\mathrm{T} \to -\mathrm{N} + i\mathrm{T} \to c + i\mathrm{T}$ avec $\mathrm{N} \to \infty$. Ce contour inclut un pôle en $s = 0$ de résidu 1 qui est égal à $\delta(y)$. Il reste le cas où $y = 1$ qui est traité par calcul direct. Pour $s = c + it$,

$$\mathrm{I}(1,\mathrm{T}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{2c}{c^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\mathrm{T}/c} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}[\arctan(u)]_0^\infty - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{T}/c}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

Cette dernière intégrale est plus petite que $c/\mathrm{T}$ car $\int \frac{du}{1+u^2} \leq \int \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]$. □

**Théorème 21.** *Pour* $x > 1$, $c = 1 + 1/\ln x$ *et* $\mathrm{T} \geq 1$,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\mathrm{T}}^{c+i\mathrm{T}} \left[-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right]\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + \mathrm{O}\left(\frac{x\ln^2 x}{\mathrm{T}} + \ln x \min(1, \frac{x}{\mathrm{T}\langle x\rangle})\right),$$

*où* $\langle x\rangle$ *désigne la distance de* $x$ *à la plus proche puissance de nombre premier.*

*Démonstration.* En reprenant (1.8),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\mathrm{T}}^{c+i\mathrm{T}} \left[-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right]\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s &= \sum_{n=2}^\infty \Lambda(n)\mathrm{I}(x/n,\mathrm{T}) \\ &= \sum_{n\leq x}\Lambda(n) + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq x}}^\infty \Lambda(n)(x/n)^c \min(1, \frac{1}{\mathrm{T}|\ln(x/n)|}) + c\Lambda(x)/\mathrm{T},\end{aligned}$$

le terme $\Lambda(x)$ n'étant présent que si $x$ est une puissance d'un nombre premier.

Prenons d'abord les termes tels que $n \leq \frac{1}{2}x$ ou $n \geq 2x$. Pour ces termes, $|\ln(x/n)|$ admet une borne inférieure $\ln 2$ strictement positive et ainsi leur contribution dans la somme est au plus la valeur absolue de

$$\frac{x\ln 2}{\mathrm{T}}\sum_{n=1}^\infty \Lambda(n)n^{-c} = \frac{x\ln 2}{\mathrm{T}}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(c)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{(c-1)\mathrm{T}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{x\ln x}{\mathrm{T}}\right),$$

en prenant $c = 1 + 1/\ln x$.

Maintenant considérons les termes pour lesquels $\frac{1}{2}x < n < x$. Soit $x_1$ la plus grande puissance de nombres premiers plus petite que $x$. On peut supposer qu'elle appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}x; x[$, sinon le terme considéré disparaît. Pour le terme $n = x_1$, on a

$$\ln\frac{x}{n} = -\ln\frac{x_1}{x} = -\ln(1 - \frac{x-x_1}{x}) \geq \frac{x-x_1}{x},$$

et ainsi la contribution de ce terme est inférieure à

$$\Lambda(x_1)\min(1, x/(\mathrm{T}(x-x_1))) = \mathrm{O}\left((\ln x)\min\left((1, \frac{x}{\mathrm{T}(x-x_1)}\right)\right).$$

Pour les autres termes, on peut poser $n = x_1 - \nu$ où $0 < \nu < x/2$ et ainsi

$$\ln\frac{x}{n} \geq \ln\frac{x_1}{n} = -\ln(1-\nu/x_1) \geq \nu/x_1.$$

La contribution de ces termes est majorée par

$$\sum_{0<\nu<x/2} \Lambda(x_1-n)\mathrm{T}^{-1}\frac{x_1}{\nu} \leq \frac{x_1\Lambda(x_1)}{\mathrm{T}} \sum_{1\leq\nu<x/2} \frac{1}{\nu} = \mathrm{O}(x\mathrm{T}^{-1}\ln^2 x).$$

Pour les termes tels que $x < n < 2x$, on procède de la même façon en introduisant $x_2$, la plus petite puissance d'un nombre premier plus grande que $x$. En introduisant $\langle x\rangle$ la distance de $x$ à la plus proche puissance de nombre premier, on uniformise la formule. □

**Théorème 22.** *Pour $x > 1$ et $\mathrm{T} \geq 1$,*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<\mathrm{T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1-1/x^2) + \mathrm{O}\left(\frac{x\ln^2(x\mathrm{T})}{\mathrm{T}} + (\ln x)\min(1, \frac{x}{\mathrm{T}\langle x\rangle})\right),$$

*où $\langle x\rangle$ désigne la distance de $x$ à la plus proche puissance de nombre premier.*

*Démonstration.* On modifie la ligne verticale d'intégration du théorème 21 par le chemin composé des trois côtés d'un rectangle de sommets $c - i\mathrm{T}$, $-\mathrm{U} - i\mathrm{T}$, $-\mathrm{U} + i\mathrm{T}$, $c + i\mathrm{T}$ où U est un entier impair très grand, ce qui permet au segment vertical gauche de passer entre deux zéros triviaux de $\zeta(s)$. La somme des résidus dans ce rectangle est alors

$$x - \sum_{|\gamma|<\mathrm{T}} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<\mathrm{U}} \frac{x^{-2m}}{-2m}.$$

On étudie la contribution des intégrales le long des lignes horizontales . Comme pour $-1 \leq \sigma \leq 2$ on a $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \mathrm{O}(\ln^2\mathrm{T})$ (Lemme 15) cette contribution pour les valeurs de $\sigma$ dans cette zone est plus petite que

$$\mathrm{O}(\ln^2\mathrm{T})\int_{-1}^{c}\left|\frac{x^s}{s}\right|\mathrm{d}\sigma \leq \frac{\mathrm{O}(\ln^2\mathrm{T})}{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{c} x^\sigma\mathrm{d}\sigma = \mathrm{O}\left(\frac{x\ln^2\mathrm{T}}{\mathrm{T}\ln x}\right).$$

La contribution de l'intégrale sur les lignes horizontales avec $-\mathrm{U} \leq \sigma \leq -1$ est en

$$\frac{\mathrm{O}(\ln(2\mathrm{T}))}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{U}}^{-1} x^\sigma\mathrm{d}\sigma = \mathrm{O}\left(\frac{\ln\mathrm{T}}{\mathrm{T}x\ln x}\right),$$

comme $|\zeta'(s)/\zeta(s)| = \mathrm{O}(\ln(2|s|)$ pour ces valeurs de $\sigma$ ((Lemme 15). Cette dernière majoration est utilisée sur la ligne verticale $\sigma = -\mathrm{U}$ pour affirmer que la contribution de l'intégrale sur la ligne verticale est en

$$\mathrm{O}\left(\frac{\ln(2\mathrm{U})}{\mathrm{U}}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} x^{-\mathrm{U}}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{T}\ln\mathrm{U}}{\mathrm{U}x^{\mathrm{U}}}\right),$$

qui disparaît lorsque U tend vers l'infini. En regroupant le reste prédominant $\mathrm{O}\left(\frac{\ln\mathrm{T}}{\mathrm{T}x\ln x}\right)$ avec celui déjà présent au théorème 21, on obtient le reste annoncé. Le résultat est encore valable pour $1 < x < 2$. □

### 1.3.1 Encadrement de $\psi(x)$

**Théorème 23.** *Il existe une constante positive $c$ telle que*

$$\psi(x) = x + O(x\exp(-c\sqrt{\ln x})),$$

*pour $x \geq 2$.*

*Démonstration.* Il reste à estimer la somme $\sum x^\rho/\rho$ de la formule du théorème 22 en utilisant le fait que la partie réelle $\beta$ de $\rho$ n'est pas trop proche de 1. En effet, par le théorème 18, si $|\gamma| < T$ (avec T assez grand) alors $\beta < 1 - c_1/\ln T$ où $c_1$ est une constante positive. Ainsi

$$|x^\rho| = x^\beta < x\exp(-c_1(\ln x)/\ln T).$$

De plus, $|\rho| \geq \gamma$ pour $\gamma > 0$. Il reste donc à estimer des termes de la forme

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma}.$$

Avec $N(t)$ le nombre de zéros dans la bande critique avec les ordonnées plus petites que $t$, cette somme est

$$\int_0^T t^{-1} dN(t) = \frac{1}{T}N(T) + \int_0^T t^{-2}N(t)dt.$$

Comme $N(t) = O(t\ln t)$ pour $t$ grand, cette partie est en $O(\frac{1}{2}\ln^2 T)$. Ainsi, pour $x$ grand,

$$\sum_{|\gamma|<T} \left|\frac{x^\sigma}{\rho}\right| = O\left(x(\ln^2 T)\exp(-c_1(\ln x)/\ln T)\right).$$

Ainsi, en considérant que $x$ est entier sans perte de généralité, alors le reste dans théorème 22 est d'ordre $O(x(\ln^2(xT)/T)$ comme $\langle x\rangle \geq 1$, et il vient

$$\psi(x) - x = O(x\ln^2(xT)/T + x(\ln T)^2\exp(-c_1(\ln x)/\ln T)).$$

Si on détermine T comme fonction de $x$ telle que

$$(\ln T)^2 = \ln x$$

ou encore $T = \exp(\sqrt{\ln x})$, on obtient

$$\psi(x) = x + O(x(\ln x)^2\exp(-\sqrt{\ln x})) + O(x\ln x.\exp(-c_1(\ln x)^{\frac{1}{2}}))$$

soit

$$\psi(x) = x + O(x\exp(-c_2\sqrt{\ln x})),$$

avec $c_2 < \min(1, c_1)$. □

**Proposition 24.** *Sous l'hypothèse de Riemann,*

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 x).$$

*Démonstration.* Sous l'hypothèse de Riemann, $|x^\rho| = x^{\frac{1}{2}}$ et comme la somme $\sum 1/|\rho|$ pour $0 < \gamma < T$ est en $O(\ln^2 T)$, la formule explicite du théorème 22 donne

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln^2 T + xT^{-1}\ln^2(xT)\right),$$

si $x$ est un entier. En prenant $T = x^{\frac{1}{2}}$, on obtient le résultat annoncé. □

**Définition 4.** *La fonction* ***logarithme intégral*** *est définie pour $x > 0$ par*

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)},$$

*l'intégrale pour $x > 1$ devant être interprétée comme la valeur principale de Cauchy :*

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left( \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \right).$$

*De la même façon, la fonction d'écart logarithmique intégrale, notée* $\mathrm{Li}(x)$*, est définie de la façon suivante :*

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)},$$

*avec*[3]

$$\mathrm{li}(2) = 1,04516378\cdots.$$

*De plus,*

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(\ln x)^k} + o\left( \frac{x}{(\ln x)^{n+1}} \right).$$

**Théorème 25.**

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(x \exp(-c\sqrt{\ln x})),$$
$$\vartheta(x) = x + \mathrm{O}(x \exp(-c\sqrt{\ln x})).$$

*Démonstration.* On part de $\Pi(x) = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{\ln n}$ que l'on peut écrire par la formule sommatoire d'Abel

$$\Pi(x) = \frac{\psi(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \ln^2 t} \mathrm{d}t.$$

En utilisant l'encadrement de $\psi(x)$ du théorème 23,

$$\Pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left( x \exp(-c\sqrt{\ln x}) \right) + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} + \int_2^x \frac{\mathrm{O}\left( t \exp(-c\sqrt{\ln t}) \right)}{t \ln^2 t} \mathrm{d}t.$$

On peut monter par intégration par parties que

$$\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \mathrm{O}(1),$$

si bien que

$$\Pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \mathrm{O}\left( \frac{x \exp(-c\sqrt{\ln x})}{\ln x} + \int_2^x \frac{t \exp(-c\sqrt{\ln t})}{t \ln^2 t} \mathrm{d}t \right).$$

La fonction $\ln t - \exp(-c\sqrt{\ln t})$ étant croissante,

$$\Pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \mathrm{O}\left( \frac{x \exp(-c\sqrt{\ln x})}{\ln x} + x \exp(-c\sqrt{\ln x}) \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^2 t} \right)$$

et comme cette dernière intégrale est en $\mathrm{O}(1)$,

$$\Pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \mathrm{O}\left( x \exp(-c\sqrt{\ln x}) \right).$$

3. suite A069284 de l'OEIS

D'autre part,

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \pi(x^{1/k})$$

La formule d'inversion de Möbius donne

$$\pi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{\mu(k)}{k} \Pi(x^{1/k}).$$

Ainsi en utilisant la formule asymptotique de $\Pi(x)$, on obtient

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \mathrm{O}\left(x \exp(-c\sqrt{\ln x})\right).$$

Les formules asymptotiques de $\theta(x)$ se déduit également très facilement :

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{k=2}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \vartheta(x^{1/k})$$

ainsi

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \psi(x) - \psi(x^{1/2}) - \psi(x^{1/3}) - \psi(x^{1/5}) + \psi(x^{1/6}) - \cdots + \mu(n)\psi(x^{1/n}) + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \mu(k)\psi(x^{1/k}), \end{aligned}$$

où $\mu(k)$ est la fonction de Möbius. On obtient alors

$$\theta(x) = \psi(x) + \mathrm{O}(x^{1/2})$$

et

$$\theta(x) = x + \mathrm{O}\left(x \exp(-c\sqrt{\ln x})\right).$$

□

**Corollaire 26** (Robin [5], Théorème 3)**.** *Sous l'hypothèse de Riemann,*

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}} \ln x),$$

*ou de façon équivalente,*

$$\vartheta(x) = x + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x),$$
$$p_k = \mathrm{li}^{-1}(k) + \mathrm{O}(k^{\frac{1}{2}} \ln^{5/2} k).$$

*Démonstration.* En supposant que $\psi(x) = x + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x)$ (Proposition 24), on obtient facilement les deux premières estimations avec la méthode précédente (Preuve du théorème 25). Avec la relation (1.19), les deux estimations sont équivalentes : si $\vartheta(x) = x + \mathrm{O}(\sqrt{x} \ln^2 x)$, alors

$$\pi(x) = x/\ln x + \mathrm{O}(\sqrt{x} \ln x) + \int_2^x \frac{1}{\ln^2 t} \mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\int_2^x \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t\right),$$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(\sqrt{x} \ln x) + \mathrm{O}(\sqrt{x})$$

par intégration par parties.

Si $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x)$, alors (2.26) de [6] donne

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) &= \sum_{p \le x} \ln p = \int_2^x dt + \mathrm{li}(2)\ln 2 + (\ln x)(\pi(x) - \mathrm{li}(x)) - \int_2^x \frac{1}{t}(\pi(t) - \mathrm{li}(t))\mathrm{d}t \\
&= x + (\ln x) O(x^{1/2} \ln x) - \int_2^x \frac{1}{t} O(t^{1/2} \ln t)\mathrm{d}t \\
&= x + O(x^{1/2} \ln^2 x) + O(x^{1/2} \ln x)
\end{aligned}$$

Pour la formule sur $p_k$, en substituant $x$ par $p_k$ dans $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x)$, on obtient $k = \mathrm{li}(p_k) + O(\sqrt{p_k} \ln p_k)$ ou encore $\mathrm{li}^{-1}(k + O(\sqrt{p_k} \ln p_k) = p_k$. On cherche une formule sous la forme $p_k = \mathrm{li}^{-1}(k) + reste$, reste que l'on notera $f(k)$. Soit $f(k) = \mathrm{li}^{-1}(k + O(\sqrt{p_k} \ln p_k)) - \mathrm{li}^{-1}(k)$ c'est-à-dire $\mathrm{li}(f(k) + \mathrm{li}^{-1}(k)) = k + O(\sqrt{p_k} \ln p_k)$. On pose $a = \mathrm{li}^{-1}(k)$ (ou encore $\mathrm{li}(a) = k$) ainsi $\mathrm{li}(f(k) + a) = \mathrm{li}(a) + O(\sqrt{p_k} \ln p_k)$. En soustrayant, $\mathrm{li}(f(k) + a) - \mathrm{li}(a) = \int_a^{a+f(k)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim f(k)/\ln(a + f(k))$ comme $\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\ln x}$. Ainsi

$$f(k) = O(\max(\sqrt{p_k} \ln p_k \ln a, \sqrt{p_k} \ln p_k \ln p_k))$$

soit $O(\sqrt{k} \ln^{5/2} k)$ comme $p_k \sim k \ln k$ et $a \sim k \ln k$.

Inversement, pour $x$ tel que $p_k \le x < p_{k+1}$, on a $\pi(x) = \pi(p_k) = k$. D'autre part, comme $\mathrm{li}(p_k + O(k^{1/2} \ln^{5/2} k)) = k$, on obtient

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \mathrm{li}(p_k + O(k^{1/2} \ln^{5/2} k)) = \mathrm{li}(p_k) + O(k^{1/2} \ln^{5/2} k / \ln p_k), \\
&= \mathrm{li}(p_k) + O({p_k}^{1/2} \ln^{3/2} p_k / \ln p_k), \\
&= \mathrm{li}(x) + \mathrm{li}(p_k) - \mathrm{li}(x) + O({p_k}^{1/2} \ln^{1/2} p_k), \\
&= \mathrm{li}(x) + \mathrm{li}(p_k) - \mathrm{li}(p_{k+1}) + O({p_k}^{1/2} \ln^{1/2} p_k), \\
&= \mathrm{li}(x) + O(x^{1/2} \ln^{1/2} x).
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 27.** *Equivalence de l'estimation* $\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x)$ *avec l'hypothèse de Riemann.*

*Démonstration.* Si on suppose que $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ pour un certain $\alpha < 1$ fixé, alors il vient que tous les zéros de $\zeta(s)$ ont une partie réelle $\beta \le \alpha$. Pour $\sigma > 1$, nous avons

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s},$$

et cela peut être aisément réarrangé sous la forme

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \psi(x) x^{-s-1} \mathrm{d}x.$$

Si $\psi(x) = x + R(x)$, on obtient

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty R(x) x^{-s-1} \mathrm{d}x.$$

La supposition que $R(x) = O(x^\alpha)$ implique que l'intégrale représente une fonction régulière de variable $s$ pour $\sigma > \alpha$ et ainsi $\zeta(s)$ ne peut avoir aucun zéro dans ce demi-plan. □

**Corollaire 28.**

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + O(x/\ln^2 x)$$
$$p_k = k(\ln k + \ln\ln k + O(1)).$$

*Démonstration.* Le développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$ donne

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

que l'on introduit dans l'estimation de $\pi(x)$ par $\mathrm{li}(x)$ du théorème 25 pour obtenir

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{O}\left(x/\ln^2 x\right).$$

Cette estimation appliquée à $x = p_k$ donne

$$k = \pi(p_k) = \frac{p_k}{\ln p_k} + \mathrm{O}\left(\frac{p_k}{\ln^2 p_k}\right)$$

ou encore

$$p_k = k \ln p_k + \mathrm{O}\left(\frac{p_k}{\ln p_k}\right)$$

et

$$\ln p_k = \ln k + \ln\ln p_k + \mathrm{O}\left(1/\ln p_k\right)$$

soit

$$p_k = k \ln k + k \ln\ln k + \mathrm{O}\left(\frac{p_k}{\ln p_k}\right).$$

□

**Proposition 29.** *Les termes suivants du développement asymptotique de $p_k$ sont les suivants :*

$$\begin{aligned} p_k = \quad & k\Bigg(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2}{\ln k} - \frac{\frac{1}{2}(\ln\ln k)^2 - 3\ln\ln k + 11/2}{\ln^2 k} \\ & + \frac{\frac{1}{3}(\ln\ln k)^3 - \frac{7}{2}(\ln\ln k)^2 + 14\ln\ln k - \frac{131}{6}}{\ln^3 k} + \mathrm{O}((\ln\ln k/\ln k)^4)\Bigg) \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'équation $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{O}(\cdot)$ appliqué en $x = p_k$ donne $k = \mathrm{li}(p_k) + \mathrm{O}(\cdot)$. Il « suffit » d'inverser cette équation à l'aide de l'expression de li pour obtenir le développement cherché. Ainsi il existe[1] des polynômes $\mathrm{P}_i$ à coefficients entiers tels que

$$\frac{p_k}{k} = \ln k + \sum_{n=1}^{m} \frac{\mathrm{P}_n(\ln\ln k)}{\ln^n k} + \mathrm{O}\left((\ln\ln k/\ln k)^{m+1}\right).$$

et vérifient la formule de récurrence suivante (en posant $\mathrm{X} = \ln\ln k$)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0(\mathrm{X}) &= \mathrm{X} - 1 \\ \mathrm{P}_n &= n\mathrm{P}_{n-1} - \mathrm{P}'_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\mathrm{P}_{n-j-1}\left((j-1)\mathrm{P}_{j-1} - \mathrm{P}_j - \mathrm{P}'_{j-1}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - 2$, $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = -\frac{1}{2}(\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 11)$ et $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = \frac{1}{3}\mathrm{X}^3 - \frac{7}{2}\mathrm{X}^2 + 14\mathrm{X} - \frac{131}{6}$. □

## 1.4 Références

[1] Juan Arias de Reyna and Jérémy Toulisse. The $n$-th prime asymptotically. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 25(3) :521–555, Nov. 2013. [page 26]

[2] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1980. [page 1, 7, 12, 17]

[3] William John Ellison and Michel Mendès France. *Les nombres premiers*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1975. [page 1]

[4] D.R. Heath-Brown. Prime number theory and the Riemann zeta-function. 2005. https://www.ora.ox.ac.uk/objects/uuid:71a2904e-5eb6-4124-9eef-7f52179fd4af. [page 1]

[5] Guy Robin. Estimation de la fonction de Tchebychef $\theta$ sur le $k$-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de $n$. *Acta Arithmetica*, 42(4) :367–389, 1983. [page 24]

[6] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(1) :64–94, 03 1962. [page 25]

[7] Edward Charles Titchmarsh and David Rodney Heath-Brown. *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford science publications. Clarendon Press, Oxford, Oxfordshire, 1986. Réimp. : 1988, 1994, 1999, 2001, 2002, 2003. [page 4, 5]

[8] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, third edition, 1920. [page 1]

# Chapitre 2

# Estimations explicites de $\psi(x)$ pour des grandes valeurs de $x$.

Au chapitre précédent, nous avons obtenu une relation pour la fonction $\psi(x)$ dépendant des zéros non-triviaux de $\zeta$. Elle est donnée sous la forme ([3, théorème 5.9 (p. 172)])

$$\frac{\psi(x^+)+\psi(x^-)}{2} = x + \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2}) - \lim_{T\to+\infty} \sum_{\rho\in\mathscr{R}_\zeta, |\Re e(\rho)|<T} \frac{x^\rho}{\rho}, \tag{2.1}$$

où $\mathscr{R}_\zeta$ l'ensemble des zéros non-triviaux de $\zeta$ dans la zone $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re e(s) < 1\}$, appelée bande critique. Le but est d'estimer finement la dernière somme. Pour cela, la première idée est de trouver les valeurs des zéros $\rho$. Nous obtiendrons ensuite une estimation de $\psi(x)$.

## 2.1 Calcul des zéros non triviaux de $\zeta$.

La fonction $\zeta(s)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

où $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Ainsi si on note

$$\theta(t) = \arg[\pi^{-\frac{1}{2}it}\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)] = \Im m[\ln\Gamma((\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it)] - \frac{1}{2}t\ln\pi,$$

alors

$$Z(t) = \exp[i\theta(t)]\zeta(\frac{1}{2}+it)$$

est réelle pour tout réel $t$. Ainsi les zéros de $\zeta$ sur la droite critique $\sigma = 1/2$ peuvent être déterminés en étudiant les changements de signe de $Z(t)$. Les premiers zéros de $Z(t)$ sont $t_1 = 14,1347\cdots$, $t_2 = 21.0220\cdots$, $t_3 = 25,0109\cdots$, .... Pour calculer effectivement $Z(t)$, une formule d'expansion asymptotique pour $\theta(t)$ est déterminée à l'aide de l'application de la formule de Stirling pour $\ln\Gamma(s/2)$ :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}t\ln(\frac{t}{2\pi}) - \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{8} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(1-2^{1-2k})}{4k(2k-1)}t^{1-2k} + r_n(t),$$

où la suite $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, ...sont les nombres de Bernoulli et

$$|r_n(t)| < \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n+2}t^{2n+1}} + \exp(-\pi t)$$

pour tout $t > 0$ et $n \geq 0$. De même, $\zeta(1/2 + it)$ peut être calculée en utilisant la formule d'Euler-MacLaurin en prenant $m$ et $n$ suffisamment grand pour obtenir la précision désirée :

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^{n-1} j^{-s} + \frac{1}{2}n^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{T}_{k,n}(s) + \mathrm{E}_{m,n}(s),$$

où

$$\mathrm{T}_{k,n} = \frac{\mathrm{B}_{2k}}{(2k)!} n^{1-s-2k} \prod_{j=0}^{2k-2} (s+j),$$

et

$$|\mathrm{E}_{m,n}(s)| < |\mathrm{T}_{m+1,n}(s)(s+2m+1)/(\sigma+2m+1)|$$

pour tout $m \geq 0$, $n \geq 1$ et $\sigma = \Re\mathrm{e}(s) > -(2m+1)$.

### 2.1.1 La formule de Riemann-Siegel

La formule de Riemann-Siegel est un développement asymptotique de $\mathrm{Z}(t)$ qui améliore celui d'Euler-MacLaurin lorsque $t$ est grand car les calculs sont en $\mathrm{O}(t^{1/2})$ au lieu de $\mathrm{O}(t)$.

Soit $\tau = t/(2\pi)$, $m = \lfloor \tau^{1/2} \rfloor$ et $z = 2(\tau^{1/2} - m) - 1$. Alors la formule de Riemann-Siegel pour $n+1$ termes est

$$\mathrm{Z}(t) = \sum_{k=1}^{m} 2k^{-1/2} \cos[t \ln k - \theta(t)] + (-1)^{m+1} \tau^{-1/4} \sum_{j=0}^{n} \Phi_j(z)(-1)^j \tau^{-j/2} + \mathrm{R}_n(\tau),$$

où $\mathrm{R}_n(\tau) = \mathrm{O}(\tau^{-(2n+3)/4})$ pour $n \geq -1$ et $\tau > 0$.

Nous pouvons donc calculer avec cette méthode les premiers zéros de $\zeta$ avec une précision définie.

## 2.2 Estimation de $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ par Rosser.

Nous nous intéressons donc à la somme $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ où la somme court sur $\mathscr{R}_\zeta$ l'ensemble des zéros $\rho$ non-triviaux de $\zeta$, ce qui revient par la relation (2.1) à s'intéresser à la fonction $g(x)$ définie comme suit. En l'intégrant, les discontinuités sont lissées. Cette méthode, présentée ici, a été développée par Rosser[15].

Soient

$$\begin{aligned} g(x) &= \psi(x) - x + \ln 2\pi + 1/2 \ln(1 - \frac{1}{x^2}), \\ \mathrm{K}_m(x,h) &= \int_0^h \cdots \int_0^h g(x + y_1 + \cdots + y_m) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m, \\ f_{m,n,a}(x,h,z) &= \frac{\mathrm{K}_m(x,h)}{h^m} + \frac{1}{2} n h^a - z h^{a-1}. \end{aligned}$$

On suppose $x > 1$ et $x + mh > 1$ pour que les fonctions et les intégrales existent et soient à valeurs réelles.

**Lemme 30.**

$$\int_0^h f_{m,1,a}(x,h,z) \mathrm{d}z = \mathrm{K}_m(x,h)$$

**Lemme 31.**

$$\int_0^h f_{m,n,a}(x,h,y_1+\cdots+y_n)\mathrm{d}y_n = f_{m,n-1,a+1}(x,h,y_1+\cdots+y_{n-1})$$

**Lemme 32.**

$$\mathrm{K}_m(x,h) = \int_0^h \cdots \int_0^h f_{m,n,a}(x,h,y_1+\cdots+y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m$$

Soit $f_m(x,h,z) = f_{m,m,1}(x,h,z)$.

**Lemme 33.** *Si $h>0$ alors il existe $z$ tel que $0\le z\le mh$ et*

$$g(x+z)\le f_m(x,h,z).$$

*Démonstration.* Par l'absurde, supposons $g(x+z) > f_m(x,h,z)$ pour $0\le z\le mh$. Alors $\int_0^h\cdots\int_0^h g(x+y_1+\cdots+y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m > \int_0^h\cdots\int_0^h f_m(x,h,y_1+\cdots+y_m)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m$. On aboutit à une contradiction car le premier terme est égal à $\mathrm{K}_m(x,h)$ par définition et le second est égal à $\mathrm{K}_m(x,h)$ par le lemme 32 précédent. □

**Lemme 34.** *Si $h<0$ alors il existe $z$ tel que $mh\le z\le 0$ et*

$$g(x+z)\ge f_m(x,h,z).$$

**Théorème 35.** *Si $0<\delta<(x-1)/(xm)$ et*

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{K}_m(x,-x\delta)}{(-x)^{m+1}\delta^m} + m\delta/2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\mathrm{K}_m(x,x\delta)}{x^{m+1}\delta^m} + m\delta/2,$$

*alors*

$$x(1-\varepsilon_1)-\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(1-1/x^2)\le\psi(x)\le x(1+\varepsilon_2)-\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(1-1/x^2).$$

*Démonstration.* Par le lemme 33, il existe $z\in[0,mh]$ tel que $g(x+z)\le f_m(x,h,z)$. Ainsi

$$\begin{aligned} g(x+z) &= \psi(x+z)-(x+z)+\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\ln(1-1/(x+z)^2) \\ &\le f_m(x,h,z) = f_{m,m,1}(x,h,z) = \frac{\mathrm{K}_m(x,h)}{h^m}+\frac{1}{2}mh-z \end{aligned}$$

En prenant $h=\delta x$,

$$\begin{aligned} \psi(x+z) &\le x-\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(1-1/(x+z)^2)+\left(\frac{\mathrm{K}_m(x,-x\delta)}{(-x)^{m+1}\delta^m}+m\delta/2\right)x \\ &= x-\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(1-1/(x+z)^2)+\varepsilon_2 x. \end{aligned}$$

Comme $z\ge 0$, $\psi(x)\le\psi(x+z)$ et $-\frac{1}{2}\ln(1-1/(x+z)^2)\le-\frac{1}{2}\ln(1-1/x^2)$. On prouve ainsi la première inégalité. On prouve l'autre inégalité avec $h=-\delta x$ et le lemme 34. □

**Théorème 36.**

$$\int_0^h g(x+z)dz = \sum_\rho \frac{1}{\rho(\rho+1)}\left\{x^{\rho+1}-(x+h)^{\rho+1}\right\}.$$

*Démonstration.* Nous avons

$$\begin{aligned}&\int_x^{x+h} g(u)\mathrm{d}u\\ &= \int_1^{x+h}\psi(u)\mathrm{d}u-\int_1^{x}\psi(u)\mathrm{d}u-\left[\frac{u^2}{2}\right]_x^{x+h}+\ln(2\pi)[u]_x^{x+h}+\frac{1}{2}\int_x^{x+h}\ln(1-1/u^2)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or, par le théorème 28 p.73 de [8],

$$\int_1^x \psi(u)du=\frac{x^2}{2}-\sum_\rho\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+x\frac{\zeta'}{\zeta}(0)-\frac{\zeta'}{\zeta}(-1)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}.$$

De plus $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}=\ln(2\pi)$, d'où

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} g(u)\mathrm{d}u &= \frac{(x+h)^2}{2}-\sum_\rho\frac{(x+h)^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}-(x+h)\ln(2\pi)-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(x+h)^{1-2r}}{2r(2r-1)}\\ &\quad -x^2/2+\sum_\rho\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+x\ln(2\pi)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}\\ &\quad -\left[(x+h)^2/2-x^2/2\right]+h\ln(2\pi)+\frac{1}{2}\int_x^{x+h}\ln(1-1/u^2)\mathrm{d}u\\ &= \sum_\rho\left((x+h)^{\rho+1}-x^{\rho+1}\right)\end{aligned}$$

car $\ln(1-u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n}$, $\ln(1-1/u^2)=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{ru^{2r}}$ et $\int_x^{\infty}\ln(1-1/u^2)\mathrm{d}u=-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{r(2r-1)}$ donc

$$\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\ln(1-1/u^2)\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{r(2r-1)}.$$

□

**Théorème 37.**

$$\mathrm{K}_m(x,\pm\delta x)=\sum_\rho\frac{x^{\rho+m}}{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m+1}\binom{m}{j}(1\pm j\delta)^{\rho+m}.$$

*Démonstration.* La preuve s'effectue par récurrence sur $m$. Pour $m=1$,

$$\mathrm{K}_1(x,\pm\delta x)=\sum_\rho\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\left(1-(1\pm\delta)^{\rho+m}\right)$$

par le théorème précédent. Supposons maintenant que

$$\mathrm{K}_{m-1}(x,h)=\sum_\rho\frac{1}{\rho\cdots(\rho+m-1)}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}(-1)^{j+m}(x+jh)^{\rho+m-1}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_m(x,h) &= \int_0^h \mathrm{K}_{m-1}(x+y,h)dy\\ &= \sum_\rho\frac{1}{\rho\cdots(\rho+m-1)}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}(-1)^{j+m}\frac{1}{\rho+m}\left[(x+jh+y)^{\rho+m}\right]_0^h,\\ &= \sum_\rho\frac{1}{\rho\cdots(\rho+m)}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m}{j}(-1)^{j+m}\left((x+(j+1)h)^{\rho+m}-(x+jh)^{\rho+m}\right)\\ &= \sum_\rho\frac{1}{\rho\cdots(\rho+m)}\mathrm{S}\end{aligned}$$

où $S = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j}(-1)^{j+m}\left((x+(j+1)h)^{\rho+m} - (x+jh)^{\rho+m}\right)$. En faisant un changement d'indice dans la première partie de la somme, nous obtenons

$$S = \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j-1}(-1)^{j+m-1}(x+jh)^{\rho+m} - \sum_{j=1}^{m} \binom{m-1}{j}(-1)^{j+m}(x+jh)^{\rho+m}$$

Comme $\binom{m-1}{j-1} + \binom{m-1}{j} = \binom{m}{j}$, nous regroupons les termes centraux

$$\begin{aligned} S &= -(x+mh)^{\rho+m} + \sum_{j=1}^{m} -1\binom{m}{j}(-1)^{j+m-1}(x+jh)^{\rho+m} - (-1)^m x^{\rho+m} \\ S &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j}(-1)^{j+m+1}(x+jh)^{\rho+m} \end{aligned}$$

□

**Théorème 38.** *Si* $\delta \geq 0$ *alors* $|K_m(x, \pm\delta x)| < x^{m+1}((1+\delta)^{m+1}+1)^m K$ *où* $K = K(m,x) = \sum_\rho \frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|}$.

*Démonstration.* Dans le théorème précédent, prenons le module de chaque côté :

$$\left|\frac{x^{\rho+m}}{\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)}\right| < \frac{x^{\beta+m}}{|\gamma^{m+1}|}.$$

De même,

$$|(1 \pm j\delta)^{\rho+m}| = (1 \pm j\delta)^{\beta+m} < (1 \pm j\delta)^{m+1}$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m+1}\binom{m}{j}(1 \pm j\delta)^{\rho+m}| &< \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(1+j\delta)^{m+1} \\ &< \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}((1+\delta)^j)^{m+1} \\ &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}((1+\delta)^{m+1})^j \\ &= ((1+\delta)^{m+1}+1)^m. \end{aligned}$$

□

**Théorème 39.** *Avec* $K$, $\varepsilon_1$ *et* $\varepsilon_2$ *définis précédemment, si* $\delta \geqslant 2K^{\frac{1}{m+1}}$ *et*

$$\theta = \frac{\delta}{2}\left\{\left(\frac{(1+\delta)^{m+1}+1}{2}\right)^m + m\right\}$$

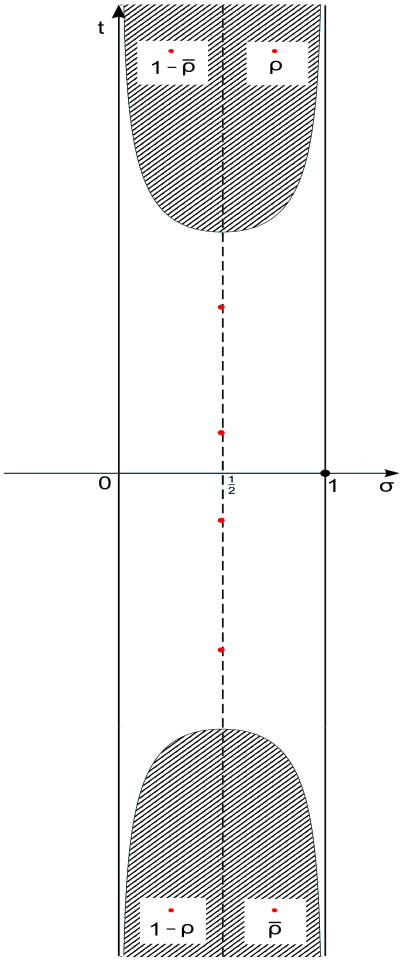
*alors* $\varepsilon_1 < \theta$ *et* $\varepsilon_2 < \theta$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{K_m(x, \pm x\delta)}{(\pm x)^{m+1}\delta^m} + m\delta/2 \\ &< \frac{x^{m+1}((1+\delta)^{m+1}+1)^m K}{(\pm x)^{m+1}\delta^m} + m\delta/2 \\ &= \frac{\delta}{2}\left(\left(\frac{(1+\delta)^{m+1}+1}{2}\right)^m K\left(\frac{2}{\delta}\right)^{m+1} + m\right) \\ &< \theta \quad \text{car } \delta^{m+1} \geq 2^{m+1}K. \end{aligned}$$

□

Avec ces deux derniers théorèmes, nous avons une estimation explicite dans lequel il faudra choisir le degré de lissage (nombre $m$ d'intégration) et le pas d'intégration ($\delta$). Mais il reste le lien avec les zéros de $\zeta$ au travers de la valeur K qui n'est pas encore exprimé. C'est ici que nous allons utiliser le savoir sur le positionnement des zéros de $\zeta$.




Dans la bande critique, nous avons pu constater / vérifier, jusqu'à une hauteur A, que les zéros sont sur la droite critique.
Ensuite nous savons qu'ils ne sont pas sur l'abscisse 1 (Théorème 17) et mieux (Théorème 18) il existe une constante $c$ telle que $\sigma > 1 - \frac{c}{\ln T}$. Rosser ([15], Th.20) a montré que la valeur $c = 1/17.72$ convenait.
Cette constante sera par la suite améliorée (et sera notée R dans ce document).
De même, s'il existe des zéros hors de la droite critique ($\sigma = 1/2$), par conjugaison, il y en aura 4. Leur contribution dans la somme K est d'autant plus importante que leur abscisse se rapproche de $\sigma = 1$. En pratique, la contribution des zéros tels que $\sigma < 1/2$ sera négligeable, contrairement à ceux tels que $\sigma > 1/2$. Cette remarque est utilisée dans le lemme 40. Par la suite, Ramaré est arrivé à préciser (s'il existent) la densité explicite[12] des zéros tels que $\sigma > \sigma_0 > 1/2$.
De même, Rosser a rendu explicite le théorème 11 en précisant le terme d'erreur de N(T) par rapport à sa valeur moyenne : Soient une borne $T \geqslant 2$ et le nombre N(T) des zéros non-triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ dans la région $0 \leqslant \gamma \leqslant T$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. En 1941, Rosser [15, Théorème 19 p. 223] démontre pour $T \geqslant 2$ que

$$|N(T) - F(T)| < R(T) \tag{2.2}$$

avec $F(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}$ et un terme d'erreur

$$R(T) = 0,137\ln T + 0,443\ln\ln T + 1,588. \tag{2.3}$$

Ce terme d'erreur R(T) a été réduit par Trudgian [19].

Maintenant, introduisons une nouvelle notation qui est basée sur l'exploitation de cette zone sans zéro :

$$\Phi(\gamma) = \Phi(m, x, \gamma) = \frac{x^{-1/17.72\ln\gamma}}{\gamma^{m+1}}.$$

**Lemme 40.**

$$K \leq x^{-1/2}\sum_{\rho}\frac{1}{|\gamma^{m+1}|} + \sum_{\gamma>A}\Phi(\gamma).$$

*Démonstration.* Par définition, $K = \sum_\rho \frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} = \sum_{\beta\leq 1/2}\frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} + \sum_{\beta>1/2}\frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|}$.

Or $\sum_{\beta\leq 1/2}\frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} \leq x^{-1/2}\sum_{\beta\leq 1/2}\frac{1}{|\gamma^{m+1}|} \leq \sum_\rho \frac{1}{|\gamma^{m+1}|}$. Comme $\beta - i\gamma$ est un zéro de $\zeta(s)$ si $\beta + i\gamma$ en est un :

$$\sum_{\beta>1/2}\frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} = 2\sum_{\beta>1/2,\gamma>0}\frac{x^{\beta-1}}{\gamma^{m+1}}$$

A l'aide de la région sans zéro ([15], Th.20) , il vient

$$\frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} < 2 \sum_{\beta>1/2,\gamma>A} \Phi(\gamma) = \sum_{\gamma>A} \Phi(\gamma)$$

par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. □

**Lemme 41.** *Si* $\ln x \leq 942(m+1)$ *alors*

$$\sum_{\gamma>A} \Phi(\gamma) < \frac{3.47}{A^{m+1}x^{1/130}} + 0.1592 \int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)dy.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma>A} \Phi(\gamma) &= \int_{A^-}^{+\infty} \Phi(y)\mathrm{d}N(y) = [\Phi(y)N(y)]_A^{+\infty} - \int_A^{+\infty} N(y)\Phi'(y)\mathrm{d}y \\ &= -N(A)\Phi(A) - \int_A^{+\infty} N(y)\Phi'(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Pour $y \geq A$, on a $\ln x \leq 942(m+1) < 17,72(m+1)\ln^2 A \leq 17,72(m+1)\ln^2 y$ et ainsi

$$\Phi'(y) = \frac{y^m \exp(-1/(17,72\ln y)\ln x)}{(y^{m+1})^2}\left(\frac{\ln x}{17,72(\ln y)^2} - (m+1)\right) < 0.$$

Par (2.2), $N(T) < R(T) + F(T)$ et

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma>A} &< -\int_A^{+\infty} \Phi'(y)(F(y)+R(y))dy - N(A)\Phi(A) \quad (\text{car } -\Phi'(y) > 0), \\ &= -[\Phi(y)(F(y)+R(y)]_A^{+\infty} + \int_A^{+\infty} (F'(y)+R'(y))\Phi((y)\mathrm{d}y - N(A)\Phi(A) \\ &= \int_A^{+\infty} (F'(y)+R'(y))\Phi((y)\mathrm{d}y + R(A)\Phi(A)\end{aligned}$$

$$R(A)\Phi(A) = \frac{x^{-1/(17.72\ln A)}}{A^{m+1}}(0.137\ln A + 0.443\ln\ln A + 1.588) < 3.37\frac{x^{-1/130}}{A^{m+1}}.$$

$$\int_A^{+\infty} F'(y)\Phi(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_A^{+\infty} \ln\frac{y}{2\pi}\Phi(y)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty} F'(y)\Phi(y)\mathrm{d}y &= 0.137\int_A^{+\infty} \frac{\Phi(y)}{y}\mathrm{d}y + 0.443\int_A^{+\infty} \frac{\Phi(y)}{y\ln y}\mathrm{d}y \\ &< 0.137\frac{1}{A\ln(A/(2\pi))}\int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y \\ &\quad +0.443\frac{1}{A\ln A\ln(A/(2\pi))}\int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y \\ &= [\frac{0.137}{A\ln(A/(2\pi))} + \frac{0.443}{A\ln A\ln(A/(2\pi))}]\int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

□

**Lemme 42.** *Si* $\ln x < \frac{942m^2}{m+0.184}$ *alors*

$$\int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y < \frac{1+5.454m}{(1-\frac{m+0.184}{942m^2}\ln x)m^2A^m x^{1/130}}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty} \ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y &= \left[-\frac{1+m\ln(y/(2\pi))}{m^2y^m}x^{-1/(17.72\ln y)}\right]_A^{+\infty} \\ &\quad + \int_A^{\infty}\Phi(y)\frac{\ln x(1+m\ln(y/(2\pi))}{17.72m^2\ln^2 y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u' = \frac{\ln(y/(2\pi))}{y^{m+1}} & u = -\frac{1+m\ln(y/(2\pi))}{m^2y^m} \\ v = y^{m+1}\Phi(y) = \exp(-\frac{\ln x}{17.72\ln y}) & v' = \frac{\partial v}{\partial y} = (\frac{\ln x}{17.72}\frac{1}{y\ln^2 y})\exp(-\frac{\ln x}{17.72\ln y}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1+m\ln(A/(2\pi))}{m^2A^m}x^{-1/(17.72\ln A)} + \int_A^{+\infty}\frac{\ln x(\frac{1}{\ln(y/(2\pi))}+m)}{17.72m^2\ln^2 y}\ln(y/(2\pi))\Phi(y)dy \\ &< \frac{1+5.454m}{m^2A^mx^{1/130}} + \frac{\ln x(m+1/\ln(A/(2\pi)))}{17.72m^2\ln^2 A}\int_A^{+\infty}\ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y \\ &< \frac{1+5.454m}{m^2A^mx^{1/130}}/(1-\frac{\ln x(m+1/\ln(A/(2\pi)))}{17.72m^2\ln^2 A}) < \frac{1+5.454m}{m^2A^mx^{1/130}(1-\frac{m+0.184}{942m^2})}\end{aligned}$$

en utilisant la valeur $A = 1467.47747$, hauteur de vérification utilisée par Rosser qui a été considérablement augmentée de nos jours. □

**Théorème 43** ([15],Th.21)**.** *Soit $k$ tel que $\sum_\rho \frac{1}{|\gamma^{m+1}|} \le k$. Si $\ln a < \frac{942m^2}{m+0.184}$,*

$$\delta = 2\left\{a^{-1/2}k + \frac{3.47}{A^{m+1}a^{1/130}} + \frac{0.869m+0.160}{(1-\frac{m+0.184}{942m^2}\ln a)m^2A^ma^{1/130}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2}\left\{\left(\frac{(1+\delta)^{m+1}+1}{2}\right)^m + m\right\}$$

*et $1+m\delta a < a$ Alors pour $x \ge a$,*

$$x(1-\varepsilon) - 1.84 < \psi(x) < x(1+\varepsilon) - 1/2\ln(1-1/x^2).$$

*Démonstration.* Pour $\ln a < \frac{942m^2}{m+0,184} < 942(m+1)$, en appliquant le lemme 41,

$$\sum_{\gamma>A}\Phi(\gamma) < \frac{3.47}{A^{m+1}a^{1/130}} + 0.1592\int_A^{\infty}\ln(y/(2\pi))\Phi(y)\mathrm{d}y$$

Cette dernière intégrale est plus petite que $\frac{1+5.454m}{(1-\frac{m+0.184}{942}\ln a)m^2A^mx^{1/130}}$ et ainsi en posant

$$S = \frac{3.47}{A^{m+1}a^{1/130}} + 0.1592\frac{1+5.454m}{(1-\frac{m+0.184}{942}\ln a)m^2A^mx^{1/130}}$$

on obtient $\sum_{\gamma>A}\Phi(\gamma) < S$.

$$K = K(m,x) = \sum_\rho \frac{x^{\beta-1}}{|\gamma^{m+1}|} \le K(m,a) < a^{-1/2}\sum\frac{1}{|\gamma^{m+1}|} + S$$

$$K < a^{-1/2}k + S = K_0$$

Prenons $\delta = 2K_0^{\frac{1}{m+1}} > 2K^{\frac{1}{m+1}}$ et $\theta = \frac{\delta}{2}\cdots$ A l'aide du théorème 39, on obtient $\varepsilon_1 < \theta$ et $\varepsilon_2 < \theta$. $0 < \delta < (x-1)/(xm)$ vrai si $am\delta < a-1$ ou encore $\delta < 1/m - 1/(am) \le 1/m - 1/(xm) = \frac{x-1}{xm}$. □

Rosser exprime le reste d'erreur pour les grandes valeurs de $x$ par une forme assez simple :

**Théorème 44** ([15],Th.22)**.** *Si* $\epsilon(x) = (\ln x)^{1/2} e^{-\sqrt{\ln x/19}}$ *et* $x \geq e^{4000}$, *alors*

$$(1-\epsilon(x))x < \psi(x) < (1+\epsilon(x))x.$$

## 2.3 Encadrement du terme d'erreur

Même si la somme des zéros n'est pas absolument convergente, Rosser [15] arrive à encadrer la fonction $\psi(x)$. Il obtient une formule précise qui nécessite un calcul direct dépendant d'une borne de début de validité (Th.43) ainsi qu'une formule valable (Th.44) pour les grandes valeurs de $x$. Cette fonction majorante a été améliorée par Rosser and Schoenfeld [16] en 1962 pour obtenir une fonction $\varepsilon(x)$ qui borne le terme d'erreur

$$E(x) = \left|\frac{\psi(x)-x}{x}\right|.$$

Le dernier résultat est donné quatorze ans plus tard par Schoenfeld [18, théorème 11]

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{8}{17\pi}} X^{1/2} e^{-X}, \tag{2.4}$$

où $X = \sqrt{(\ln x)/R}$ et $R = 9.645908801$. La preuve utilise trois ingrédients clefs : la vérification numérique de l'hypothèse de Riemann jusqu'à une hauteur A, une région sans zéro explicite et une majoration explicite du nombre de zéros dans la bande critique jusqu'à une hauteur donnée.

Cette partie est destinée à montrer que si la zone sans zéro est de la forme suivante (appelée forme de type De La Vallée Poussin)

$$\Re e(s) \geqslant 1 - \frac{1}{R\ln|\Im m(s)|} \quad \text{pour } |\Im m(s)| \geqslant 2 \tag{2.5}$$

où R est une constante formelle alors, il n'y pas vraiment besoin du calcul d'une hauteur A dans la vérification de l'hypothèse de Riemann, pour montrer que $E(x) \leqslant \varepsilon(x)$ pour $x$ assez grand.

**Théorème 45** (Dusart [2])**.** *Soit* $R > 0$ *une constante formelle telle qu'il existe une région sans zéro de la forme* $\Re e(s) \geqslant 1 - \frac{1}{R\ln|\Im m(s)|}$ *for* $|\Im m(s)| \geqslant 2\pi$.

*Soit* $X = \sqrt{(\ln x)/R}$ *et* $\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} X^{1/2} e^{-X}$.

*Alors, pour* $X \geqslant \max(8.36, \frac{8}{R})$, *nous avons*

$$|\vartheta(x) - x|, |\psi(x) - x| < x\varepsilon(x).$$

**Corollaire 46.** *Soit* $R_0 = 5.573412$. *Alors, pour* $x \geqslant 3$,

$$|\vartheta(x) - x|, |\psi(x) - x| < \sqrt{\frac{8}{\pi R_0^{1/2}}}\, x(\ln x)^{1/4}\, e^{-\sqrt{(\ln x)/R_0}}.$$

Cette fonction est intéressante pour des grandes valeurs de $x$ (i.e. $x \geqslant \exp(10000)$). Pour des valeurs plus petites, un calcul direct d'une expression majorante [4, théorème 1.1] avec un calcul des paramètres optimaux donne des résultats plus fins. Ces estimations sont très largement utilisées dans différents domaines tels que la cryptographie, l'informatique et partout où des bornes sur les sommes de nombres premiers interviennent [6, 1, 11]. Elles peuvent être également déclinées pour des fonctions avec des définitions proches. Par exemple, dans [13], Ramaré donne des estimations sur la fonction $\tilde{\psi}$, dont le comportement est similaire à $\psi$. Le comportement de $\psi$ dans les progressions arithmétiques peut être trouvée dans [14].

## 2.4 Méthode de Rosser&Schoenfeld

La première partie de la preuve utilise la méthode, développée par Rosser and Schoenfeld [17] puis complétée par Schoenfeld [18], qui estime la somme

$$\sum_{\rho \in \mathscr{R}_\zeta} \frac{x^\rho}{\rho}. \tag{2.6}$$

La bande critique $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re e(s) < 1\}$ peut être découpée en quatre régions selon que la partie réelle est plus grande que ½ ou non et que la partie imaginaire est plus petite qu'un paramètre T ou non.

Soit $m$ un entier strictement positif. Comme [17] p.256, on exprime la somme (2.6) selon ces quatre régions, avec $\beta = \Re e(\rho)$ et $\gamma = \Im m(\rho)$ en utilisant la nouvelle forme (2.5) de la région sans zéro de $\zeta$.

Définissons

$$\begin{aligned}
R_m(\delta) &= \left((1+\delta)^{m+1}+1\right)^m, && (2.7)\\
S_1(m,\delta) &= 2\sum_{\beta \leqslant 1/2; 0<\gamma\leqslant T_1} \frac{2+m\delta}{2|\rho|}, && (2.8)\\
S_2(m,\delta) &= 2\sum_{\beta \leqslant 1/2; T_1<\gamma} \frac{R_m(\delta)}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}, && (2.9)\\
S_3(m,\delta) &= 2\sum_{\beta > 1/2; 0<\gamma\leqslant T_2} \frac{2+m\delta}{2|\rho|}\exp(-X^2/\ln\gamma), && (2.10)\\
S_4(m,\delta) &= 2\sum_{\beta > 1/2; T_2<\gamma} \frac{R_m(\delta)\exp(-X^2/\ln\gamma)}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|}. && (2.11)
\end{aligned}$$

Cela correspond aux expressions (3.6)-(3.10) de [17] avec la nouvelle forme de la région sans zéro.

Par le lemme 8 de [17], pour $x > 1$ et $0 < \delta < (x-1)/(xm)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\left|\psi(x) - \{x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(1-x^{-2})\right| \\
&\quad \leqslant \{S_1(m,\delta)+S_2(m,\delta)\}/\sqrt{x} + S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) + m\delta/2. && (2.12)
\end{aligned}$$

Soit $n$ un entier naturel, R un paramètre constant pour la région sans zéro (2.5) et

$$\begin{aligned}
X &= \sqrt{(\ln x)/R}, && (2.13)\\
\phi_n(y) &= y^{-(n+1)}\exp(-X^2/\ln y), && (2.14)\\
W_n &= \exp(X/\sqrt{n+1}). && (2.15)
\end{aligned}$$

Le terme d'erreur (2.3) apparaît dans le corollaire du lemme 7 de [17] p. 256. Nous réécrivons à ce propos ce corollaire avec $W = W_n$ et $\Phi = \phi_n$ :

**Lemme 47.** *Soient* U *et* V *tels que* $2\pi < U \leqslant V$. *Soit* $\phi_n$ *définie par (2.14) et* $W_n$ *définie par (2.15). Soit* Y *le nombre central dans l'ensemble classé* $\{U, V, W_n\}$. *Choisissons* $j = 0$ *si* $V \geqslant W_n$ *et* $j = 1$ *dans l'autre cas. Alors*

$$\sum_{U<\gamma\leqslant V} \phi_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} + (-1)^j q(Y)\right) \int_U^V \phi_n(y) \ln \frac{y}{2\pi} dy + E_j(U,V),$$

*où*

$$q(y) = \frac{R'(y)}{\ln(y/(2\pi))} = \frac{0.137 \ln y + 0.443}{y \ln y \ln(y/(2\pi))} \tag{2.16}$$

*et*

$$\begin{aligned} E_0(U,V) &= 2R(Y)\phi_n(Y) \\ &\quad + (N(V) - F(V) - R(V))\phi_n(V) - (N(U) - F(U) + R(U))\phi_n(U) \end{aligned}$$

*ou*

$$E_1(U,V) = (N(V) - F(V) + R(V))\phi_n(V) - (N(U) - F(U) + R(U))\phi_n(U).$$

**Lemme 48.** *Soit* $m$ *un entier strictement positif and* $\nu$ *un réel strictement positif. Soit*

$$Y = X(1-\nu)^2/\nu \tag{2.17}$$

$$G_0 = \nu^2\{\nu - \ln(2\pi)/X\} \tag{2.18}$$

$$T_2 = \exp(\nu X). \tag{2.19}$$

*Soit* $T_0$ *un paramètre satisfaisant* $N(T_0) = F(T_0)$ *pour lequel il n'y pas de zéros* $\rho$ *satisfaisant* $\Re e(\rho) \neq 1/2$ *avec* $0 < \Im m(\rho) \leqslant T_0$.

*Si* $T_2 \geqslant T_0 > 2\pi$ *et* $\nu \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} S_3(m,\delta) &< \frac{2+m\delta}{4\pi} T_2 \exp(-2X)\exp(-Y)XG_0 \\ &\quad + (2+m\delta)R(T_2)\phi_0(T_2) \end{aligned} \tag{2.20}$$

*Démonstration.* La preuve est similaire avec celle de [18] (avec une modification de la forme de la région sans zéro).

Comme il n'y a pas de zéro avec $\beta > 1/2$ pour $|\gamma| \leqslant T_0$, la sommation peut commencer à $\gamma > T_0$ dans $S_3$. En utilisant le lemma 47 avec $n = 0$ (car $\nu \leqslant 1$, induit $T_2 \leqslant W_0$), il vient

$$S_3(m,\delta) \leqslant \frac{2+m\delta}{2}\left(\left\{\frac{1}{2\pi} - q(T_2)\right\}\int_{T_0}^{T_2} \phi_0(y) \ln \frac{y}{2\pi} dy + E_1\right) \tag{2.21}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= \{N(T_2) - F(T_2) + R(T_2)\}\phi_0(T_2) - \{N(T_0) - F(T_0) + R(T_0)\}\phi_0(T_0) \\ &< 2R(T_2)\phi_0(T_2) \qquad \text{en utilisant (2.2) et } R(T_0)\phi_0(T_0) > 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pour $\alpha \leqslant 1$ et $x > 0$, la fonction Gamma incomplète supérieure est définie et bornée comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, x) &= \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &\leqslant x^{\alpha-1} \int_x^\infty \exp(-t) dt = x^{\alpha-1}\exp(-x) \end{aligned}$$

et nous avons aussi

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_0(y)\ln\frac{y}{2\pi}dy &= \int_a^b y^{-1}\exp(-X^2/\ln y)\ln\frac{y}{2\pi}dy \\ &= X^4\{\Gamma(-2,V')-\Gamma(-2,U')\} \\ &\quad -X^2\ln(2\pi)\{\Gamma(-1,V')-\Gamma(-1,U')\}\end{aligned} \tag{2.23}$$

avec $U' = X^2/\ln a$, $V' = X^2/\ln b$ en prenant $y = \exp(X^2/t)$.

Ainsi, en substituant dans (2.23) $U' = X^2/\ln T_0$ et $V' = X^2/\ln T_2 = X/\nu$ par (2.19), et comme $T_0 > 2\pi$ alors $X^4\Gamma(-2,U') > X^2\ln(2\pi)\Gamma(-1,U')$ , nous obtenons une borne majorante pour (2.23). Comme $q(T_2) > 0$, nous trouvons par (2.21) et (2.22) la borne majorante suivante

$$\begin{aligned}S_3(m,\delta) &< \frac{2+m\delta}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\exp(-V)\{X^4V^{-3}-X^2V^{-2}\ln(2\pi)\}+\frac{2+m\delta}{2}E_1 \\ &< \frac{2+m\delta}{4\pi}\exp(-X/\nu)\{X\nu^3-\nu^2\ln(2\pi)\}+(2+m\delta)R(T_2)\phi_0(T_2).\end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{1}{\nu} = 2-\nu+\frac{(1-\nu)^2}{\nu}.$$

Ainsi, par (2.17),

$$\exp(-X/\nu) = \exp(-2X)T_2\exp(-Y). \tag{2.24}$$

Finalement, par (2.18),

$$\begin{aligned}S_3(m,\delta) &< \frac{2+m\delta}{4\pi}T_2\exp(-2X)\exp(-Y)XG_0 \\ &\quad +(2+m\delta)R(T_2)\phi_0(T_2).\end{aligned}$$

La borne pour $S_3$ est similaire à (7.11) p.342 de [18]. □

**Lemme 49.** *Soit $m$ un entier strictement positif et $\nu$ un réel strictement positif. Soit*

$$G_1 = \frac{m-1}{\nu^2 m-1}\nu^2\left(\nu+\frac{1-m\ln(2\pi)}{mX}\right) \tag{2.25}$$

$$G_2 = \frac{R_m(\delta)}{2^m}\left(1+2\pi q(T_2)\right). \tag{2.26}$$

*Si $\nu > 1/\sqrt{m}$ et $X \geqslant \frac{m\ln(2\pi)-1}{\sqrt{m}}$,*

$$S_4(m,\delta) < \frac{G_2G_1e^{-Y}}{2\pi(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m Xe^{-2X}T_2^{-(m-1)}+G_2\left(\frac{2}{\delta}\right)^m E_0. \tag{2.27}$$

*Démonstration.* La preuve ressemble à celle de [18]. Nous devons simplement ajouter une exigence due à la nouvelle forme de la région sans zéro :

$$1+2/(2X\sqrt{m})-\sqrt{m}\ln(2\pi)/X > 0.$$

En appliquant le lemme 47 avec $n = m$ dans (2.11),

$$S_4(m,\delta) \leqslant \frac{R_m(\delta)}{\delta^m}\left(\left\{\frac{1}{2\pi}+q(T_2)\right\}\int_{T_2}^{\infty}\phi_m(y)\ln\frac{y}{2\pi}dy+E_0\right), \tag{2.28}$$

où

$$\begin{aligned} E_0 &\leqslant \{R(T_2)+F(T_2)-N(T_2)\}\phi_m(T_2) \\ &< 2R(T_2)\phi_m(T_2) = 2R(T_2)\phi_0(T_2)T_2^{-m} \text{ by (2.2) and (2.14).} \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'intégrale précédente peut être exprimée à l'aide de fonctions de Bessel incomplètes définies pour $z>0$ et $x \geqslant 0$ par

$$K_\nu(z,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty t^{\nu-1}H^z(t)\,dt \tag{2.30}$$

avec

$$H^z(t) = \exp\{-\frac{1}{2}z(t+1/t)\}.$$

Nous avons

$$\int_{T_2}^\infty \phi_m(y)\ln\frac{y}{2\pi}\,dy = \frac{2X^2}{m}\left\{K_2(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m}) - \frac{\sqrt{m}\ln(2\pi)}{X}K_1(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m})\right\}. \tag{2.31}$$

Dans notre cas, le coefficient devant $K_1$ est négatif, contrairement à celui dans la preuve de Schoenfeld, et nous avons à minimiser ce terme.

Nous allons utiliser les majorations des fonctions de Bessel données par les lemmes 4 et 5 de [17] p. 252, valables pour $z>0$ et $x>1$

- $K_1(z,x) < x^2H^z(x)/\{z(x^2-1)\}$,
- $K_2(z,x) < (x-1)x^2H^z(x)/\{z(x^2-1)\} + (1+2/z)K_1(z,x)$.

D'abord, comme nous avons supposé que $\nu > 1/\sqrt{m}$, nous pouvons appliquer la majoration pour $K_2$ avec $z = 2X\sqrt{m} > 0$ et $x = \nu\sqrt{m} > 1$. Mais cette majoration de $K_2$ fait intervenir la fonction $K_1$. En ajoutant la partie $K_1$ dans les accolades de (2.31), le coefficient devant $K_1$ dans la majoration totale devient positif comme on a supposé être dans le cas où $X \geqslant \frac{m\ln(2\pi)-1}{\sqrt{m}}$.

Ainsi en appliquant les majorations précédentes (pour $K_2$ puis pour $K_1$), nous obtenons

$$\begin{aligned} &K_2(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m}) + \frac{-\sqrt{m}\ln(2\pi)}{X}K_1(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m}) \\ &< \left(\nu + \frac{1-m\ln(2\pi)}{mX}\right)\frac{\nu^2 m}{2X(\nu^2 m-1)}\exp\left\{-X\sqrt{m}\left(\nu\sqrt{m}+\frac{1}{\nu\sqrt{m}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Maintenant, en reprenant (2.17) et (2.25), il vient

$$X\sqrt{m}\left(\nu\sqrt{m}+\frac{1}{\nu\sqrt{m}}\right) = m\nu X + (2X-\nu X+Y),$$

et

$$\begin{aligned} &K_2(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m}) + \frac{-\sqrt{m}\ln(2\pi)}{X}K_1(2X\sqrt{m},\nu\sqrt{m}) \\ &< \frac{m}{2(m-1)}G_1X^{-1}e^{-Y}e^{-2X}(T_2)^{-m+1}. \end{aligned}$$

Ainsi par (2.31),

$$\int_{T_2}^\infty \phi_m(y)\ln\frac{y}{2\pi}\,dy = \frac{G_1}{m-1}e^{-Y}T_2^{-(m-1)}Xe^{-2X}.$$

En combinant (2.28) et (2.26), nous obtenons

$$S_4(m,\delta) < \frac{G_2 G_1 e^{-Y}}{2\pi(m-1)}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m X e^{-2X} T_2^{-(m-1)} + G_2\left(\frac{2}{\delta}\right)^m E_0.$$

Cette majoration de $S_4$ est similaire à l'expression qui suit la numérotation (7.20) p.344 de [18].

□

Certains paramètres seront positionnés à des valeurs permettant de minimiser la somme des majorations $S_3$ and $S_4$.

**Lemme 50.** *Soient* $G_0, G_1, G_2, T_0, T_2$ *définis précédemment et une fonction* $k$ *définie par*

$$k(\nu) = \frac{X}{2\pi}\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2} e^{-2X(1-\nu)} e^{-X(1-\nu)^2/\nu}. \tag{2.32}$$

*S'il existe un réel* $\nu \in ]1/\sqrt{2}, 1]$ *tel que* $k(\nu) = 1$ *et si* $X > \sqrt{2}\ln(2\pi)$ *alors*

$$T_2 = (G_1/G_0)^{1/4}\{2\pi e^Y/G_0\}^{1/2} X^{-1/2} e^X, \tag{2.33}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(G_0 G_1)^{1/4} e^{-Y/2} X^{1/2} e^{-X}, \tag{2.34}$$

*et, de plus, si* $T_2 \geqslant T_0 > 2\pi$,

$$\begin{aligned} &S_3(2,\delta) + S_4(2,\delta) + \delta \\ &\quad < G_2\{G_0 G_1\}^{1/4} e^{-Y/2}\sqrt{\tfrac{8}{\pi}} X^{1/2} e^{-X} + 2G_2\{1 + G_0/G_1\} R(T_2)\phi_0(T_2). \end{aligned} \tag{2.35}$$

*Démonstration.* Par (2.7) and (2.26), nous avons $2 + m\delta < 2R_m(\delta)/2^m < 2G_2$. En regroupant les estimations (2.20 & 2.27) de $S_3$ and $S_4$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) \quad < \quad & \frac{G_2 e^{-Y}}{2\pi} X e^{-2X}\left\{G_0 T_2 + \frac{G_1}{m-1}\left(\frac{2}{\delta}\right)^m T_2^{-(m-1)}\right\} \\ & + 2G_2 R(T_2)\phi_0(T_2)\left\{1 + \left(\frac{2}{\delta T_2}\right)^m\right\}. \end{aligned}$$

Le choix de

$$T_2 = (G_1/G_0)^{1/m} \cdot 2/\delta \tag{2.36}$$

permet de minimiser la première expression entre parenthèses. Nous obtenons

$$\begin{aligned} S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) + \frac{1}{2}m\delta \quad < \quad & \frac{1}{2}m G_2\left\{G_0^{1-1/m} G_1^{1/m}\frac{2e^{-Y}}{(m-1)\pi} X e^{-2X}\delta^{-1} + \delta\right\} \\ & + 2G_2 R(T_2)\phi_0(T_2)\{1 + G_0/G_1\}. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses est minimisée avec le choix de

$$\delta = \left\{G_0^{1-1/m} G_1^{1/m}\frac{2e^{-Y}}{(m-1)\pi}\right\}^{1/2} X^{1/2} e^{-X}. \tag{2.37}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} S_3(m,\delta) + S_4(m,\delta) + \frac{1}{2}m\delta \quad < \quad & G_2\left\{G_0^{1-1/m} G_1^{1/m}\frac{2e^{-Y}}{\pi}\right\}^{1/2}\frac{m}{\sqrt{m-1}} X^{1/2} e^{-X} \\ & + 2G_2\{1 + G_0/G_1\} R(T_2)\phi_0(T_2). \end{aligned}$$

Le coefficient $m/\sqrt{m-1}$ est minimal par le choix de $m = 2$. Pour cette valeur, nous obtenons de (2.33) par (2.36) & (2.37)

$$T_2 = (G_1/G_0)^{1/4}\{2\pi e^Y/G_0\}^{1/2}X^{-1/2}e^X$$

et par (2.25) avec $m = 2$,

$$G_1 = \frac{\nu^2}{2\nu^2-1}\left(\nu + \frac{1-2\ln(2\pi)}{2X}\right). \tag{2.38}$$

Nous avons deux définitions (2.19 et 2.33) de $T_2$. Elles sont compatibles (cohérentes entre elles) si :

$$\exp(\nu X) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{G_1}{G_0^3}\right)^{1/4} e^{Y/2}X^{-1/2}e^X.$$

En élevant au carré (en supposant $\nu > 1/\sqrt{2}$ et $X > \sqrt{2}\ln(2\pi)$), ces définitions sont compatibles s'il existe $\nu$ tel que $k(\nu) = 1$ où

$$k(\nu) = \frac{X}{2\pi}\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2} e^{-2X(1-\nu)}e^{-X(1-\nu)^2/\nu}.$$

C'est la même définition que (7.27) p. 345 de [18]. □

## 2.5 Fonction majorante

**Lemme 51.** *Soit $k(\nu)$ définie par (2.32). Pour $X \geq 8,36$, la solution $\nu$ of $k(\nu) = 1$ est unique et appartient à l'intervalle*

$$0,97 < 1 - \frac{1}{2X}\ln\left(\frac{X}{2\pi}\right) < \nu < 1. \tag{2.39}$$

*Démonstration.* Pour $\nu \in ]1/\sqrt{2}, 1]$, le terme $G_0$, défini par (2.18), est une fonction de variable $\nu$ croissante et positive si $X > \frac{2}{3}\sqrt{2}\ln(2\pi)$ et $G_1$, défini par (2.38), décroît lorsque $X > 2\ln(2\pi) - 1$. Ainsi, pour $X > 2\ln(2\pi) - 1$, $k$ est croissante pour $\nu \in ]1/\sqrt{2}, 1]$.

Comme $\lim_{\nu\to 1^+/\sqrt{2}} k(\nu) = 0$ et

$$\begin{aligned} k(1) &= \frac{X}{2\pi}\left(\frac{(1-\frac{\ln(2\pi)}{X})^3}{1+\frac{1-2\ln(2\pi)}{2X}}\right)^{1/2} \\ k(1) &> 1 \text{ pour } X \geqslant 8.36, \end{aligned}$$

nous avons une solution unique $\nu \in ]1/\sqrt{2}, 1[$ telle que $k(\nu) = 1$. La valeur de validité limite (8.36) peut être calculée exactement : $\frac{\sqrt{3}}{3}(4\pi\cos(\frac{1}{3}\arctan(\sqrt{\frac{(8\pi)^2}{27}-1})) + \sqrt{3}\ln(2\pi))$.

Soit

$$\nu_0 = 1 - \frac{1}{2X}\ln\left(\frac{X}{2\pi}\right). \tag{2.40}$$

Pour $X \geqslant 8.36$, la fonction $X \mapsto 1 - \frac{1}{2X}\ln\left(\frac{X}{2\pi}\right)$ atteint son minimum pour $X = 2\pi e$ avec la valeur 0.97 et admet un maximum asymptotique égal à 1. Montrons maintenant que $k(\nu_0) < 1$. Nous avons par (2.40) et (2.32)

$$k(\nu_0) = \left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{4\nu_0 X}\ln^2(X/(2\pi))\right)$$

avec, par (2.18) et (2.25)

$$\frac{G_0^3}{G_1} = \nu_0^4(2\nu_0^2-1)\left(\nu_0 - \frac{\ln(2\pi)}{X}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2X\nu_0 - 2\ln(2\pi)+1}\right).$$

Pour $\nu_0$ variant dans $]1/\sqrt{2},1]$, nous avons pour $X > \ln(2\pi)$,

$$0 < \frac{G_0^3}{G_1} < 1. \tag{2.41}$$

□

**Lemme 52.** *Soient* $G_0, G_1, G_2$ *définis comme auparavant, avec* $m = 2$. *Pour* $X \geqslant 8.36$ *et* $0.97 < 1 - \frac{1}{2X}\ln\left(\frac{X}{2\pi}\right) < \nu < 1$,*nous obtenons les majorations suivantes :*

$$0.61 < G_0G_1 < 1,$$

$$G_0/G_1 < 1,$$

$$1 \leqslant e^Y < 1.0223,$$

$$G_2 > 1.$$

*Démonstration.* Avec $m = 2$, par (2.18) et (2.25), nous avons

$$G_0G_1 = \frac{\nu^6}{2\nu^2-1}\left(1 + \frac{1-2\ln(2\pi)}{2X\nu}\right)\left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{X\nu}\right).$$

Pour $0.97 < \nu \leqslant 1$, la fonction $\nu \mapsto \frac{\nu^6}{2\nu^2-1}$ est croissante. Alors nous avons pour $X > 0$ et $\nu < 1$, $G_0G_1 < \frac{\nu^6}{2\nu^2-1} < 1$ et, pour $X \geqslant 8.36$ et $\nu > 0.97$, $G_0G_1 > 0.61$.

En spécifiant $m = 2$ dans (2.18) et (2.25), nous avons $G_0/G_1 < 2\nu^2 - 1 < 1$. Comme $1 - \frac{1}{2X}\ln\left(\frac{X}{2\pi}\right) < \nu < 1$ et la fonction $(1-\nu)^2/\nu$ est décroissante pour $\nu \in ]0,1]$, nous avons pour (2.17), $0 \leqslant Y \leqslant \frac{\ln\frac{X}{2\pi}}{4X - 2\ln\frac{X}{2\pi}}$ qui est borné par $0.022\cdots$ pour $X > 2\pi$ (le maximum est atteint pour $X \approx 45.43$).

Par (2.7) et (2.26), nous avons $1 < 1 + m\delta/2 < R_m(\delta)/2^m < G_2$. □

**Lemme 53.** *Soient* $R(T), \phi_0(T)$ *définis respectivement par (2.3) et (2.14),* $T_2 > 2\pi$ *défini par (2.19) avec* $\nu \leqslant 1$. *Alors, avec* $Y$ *défini par (2.17) et* $X \geqslant 8.36$, *nous avons*

$$R(T_2)\phi_0(T_2) < 1.15Xe^{-2X}.$$

*Démonstration.* L'égalité $R(T_2)\phi_0(T_2) = \frac{R(T_2)}{\ln T_2}\ln(T_2)e^{-Y}e^{-2X}$ est obtenue par (2.17). En vertu du lemme 52, $e^{-Y} < 1$. Comme $\nu \leqslant 1$, $\ln T_2 \leqslant X$. Une rapide étude permet de montrer que $\frac{R(y)}{\ln y}$ décroît pour $y \geqslant 1.1$. Ainsi, pour $y \geqslant 2\pi$, $\frac{R(y)}{\ln y} \leqslant \frac{R(2\pi)}{\ln 2\pi} \approx 1.1477\cdots$. □

**Lemme 54.** *Soient* $X$ *et* $R$ *définis respectivement par (2.13) et (2.5). On suppose* $X > 8/R$. *Alors, avec le choix (2.34) de* $\delta$, *nous avons, pour* $X \geqslant 8.36$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\{S_1(2,\delta) + S_2(2,\delta)\} + 1.43/\sqrt{x} + \ln(2\pi)/x \leqslant 0.0033\sqrt{\frac{8}{\pi}}G_2(G_0G_1)^{1/4}Xe^{-2X}. \tag{2.42}$$

*Démonstration.* En prenant $T_1 = 0$ dans (2.8) et (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}}\{S_1(2,\delta)+S_2(2,\delta)\} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{R_2(\delta)}{\delta^2}\sum_{\gamma}\frac{1}{|\gamma|^3} \\
&< \frac{1}{\sqrt{x}}G_2\left(\frac{2}{\delta}\right)^2\sum_{\gamma}\frac{1}{|\gamma|^3} \\
&< \frac{4}{\delta^2\sqrt{x}}G_2\cdot 0.00167 \text{ en appliquant le lemme 17 de [15]} \\
&< C_0\sqrt{\frac{8}{\pi}}G_2(G_0G_1)^{1/4}Xe^{-2X} \text{ par (2.34).}
\end{aligned}$$

avec $C_0 = \frac{0.00167\pi\sqrt{\pi/2}e^{Y}}{(G_0G_1)^{3/4}}e^{4X}/\sqrt{x}$. Comme $X \geqslant 8/R$, $e^{4X}/\sqrt{x} \leqslant 1$ par (2.13). Pour $X \geqslant 8.36$, une application du lemme 52 donne $C_0 < 0.003277$. De la même manière,

$$\frac{1.43}{\sqrt{x}}+\frac{\ln(2\pi)}{x} < C_1\sqrt{\frac{8}{\pi}}G_2(G_0G_1)^{1/4}Xe^{-2X}$$

avec $C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{1.43e^{-2X}+e^{-6X}\ln(2\pi)}{G_2(G_0G_1)^{1/4}X} < 10^{-8}$ par le lemme 52. □

**Lemme 55.** *Soit $G_2$ défini par (2.26) avec $\nu > 1/\sqrt{2}$. Avec les choix de $m = 2$ et de $\delta$ donnés par (2.34), sous l'hypothèse que $k(\nu) = 1$ existe, nous avons pour $X \geqslant 2\pi$,*

$$G_2 < \exp\left(2.64X^{1/2}e^{-X}\right). \tag{2.43}$$

*Démonstration.* Par le lemme 52, $(G_0G_1)^{1/4} < 1$ et $e^{-Y/2} < 1$, il vient $\delta < \sqrt{\frac{2}{\pi}}X^{1/2}e^{-X}$ par (2.34) et pour $X \geqslant 2\pi$, $\delta < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2\pi}e^{-2\pi}$ et $3+3\delta+\delta^2 < 3.01122$.

$$\begin{aligned}
\frac{R_2(\delta)}{2^2} &= \left\{\frac{(1+\delta)^3+1}{2}\right\}^2 = \left\{1+\frac{1}{2}\delta(3+3\delta+\delta^2)\right\}^2 \\
&< \left(1+\frac{3.01122}{2}\delta\right)^2 \\
&< \exp\left(\frac{3.01122}{2}\delta\right)^2 = \exp(3.01122\delta) \\
&< \exp(2.41\cdot X^{1/2}e^{-X}) \text{ par (2.34).}
\end{aligned}$$

Comme $X > 2\pi$, $\nu > 1/\sqrt{2}$ et $T_2 = \exp(\nu X)$ par (2.19), nous avons $T_2 > \exp(2\pi/\sqrt{2})$. Alors

$$\begin{aligned}
\{1+2\pi q(T_2)\} &= 1+\frac{0.137+0.443/\ln T_2}{\ln(T_2/(2\pi))}\cdot\frac{2\pi}{T_2} \quad \text{by (2.16)} \\
&= 1+\frac{0.137+\frac{0.443}{\ln T_2}}{\ln(T_2/(2\pi))}\cdot\sqrt{2\pi}\left(\frac{G_0^3}{G_1}\right)^{1/4}e^{-Y/2}X^{1/2}e^{-X} \text{ par (2.33)} \\
&< 1+0.23X^{1/2}e^{-X} \text{ par (2.41)} \\
\{1+2\pi q(T_2)\} &< \exp(0.23\cdot X^{1/2}e^{-X}).
\end{aligned}$$

□

*Preuve du théorème 45.* Par (2.12) ou selon le lemme 8 de [17] avec $m = 2$, nous avons $\frac{1}{x}|\psi(x) - x| < (S_1(2,\delta) + S_2(2,\delta))/\sqrt{x} + S_3(2,\delta) + S_4(2,\delta) + \delta + \frac{\ln(2\pi)}{x}$, avec $\delta$ défini par (2.34). Le choix pour $\delta$ satisfait à l'ensemble des conditions (2.12) du lemme 8 de [17] pour $X \geqslant \max(8.36, 8/R)$ avec le lemme 52.

Maintenant le théorème 13 de [16] donne

$$\frac{1}{x}|\vartheta(x) - x| < \frac{1}{x}|\psi(x) - x| + 1.43/\sqrt{x}.$$

Choisissons $T_0 = 17.8478\cdots$ tel que $F(T_0) = N(T_0)$. Nous avons $T_0 > 2\pi$ et $T_0$ satisfaisant la condition sur les zéros avec la vérification [7] de l'hypothèse de Riemann jusqu'à $T_0$. Par les lemmes 51, 50 et 52,

$$\begin{aligned}
&S_3(2,\delta) + S_4(2,\delta) + \delta \\
&< G_2(G_0G_1)^{1/4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}X^{1/2}e^{-X} + 4G_2R(T_2)\phi_0(T_2) \\
&< G_2(G_0G_1)^{1/4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}X^{1/2}e^{-X}(1 + 3.2618X^{1/2}e^{-X}) \text{ par les lemmes 53 et 52.}
\end{aligned}$$

En vertu du lemme 54,

$$\begin{aligned}
&(S_1(2,\delta) + S_2(2,\delta))/\sqrt{x} + S_3(2,\delta) + S_4(2,\delta) + \delta + \frac{\ln(2\pi)}{x} + \frac{1.43}{\sqrt{x}} \\
&< G_2(G_0G_1)^{1/4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}X^{1/2}e^{-X}(1 + 3.27X^{1/2}e^{-X}) \\
&< G_2(G_0G_1)^{1/4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}X^{1/2}e^{-X}\exp(3.27X^{1/2}e^{-X}) \\
&< (G_0G_1)^{1/4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}X^{1/2}e^{-X}\exp(5.91X^{1/2}e^{-X}) \text{ par le lemme 55.}
\end{aligned}$$

Soit $G_3 = (G_0G_1)^{1/4}\exp(5.91X^{1/2}e^{-X}) = \left[(\nu^2G_1)\left(\frac{G_0}{\nu^2}\exp(23.64X^{1/2}e^{-X})\right)\right]^{1/4}$.

Par (2.25), nous avons $\nu^2G_1 = \frac{\nu^5}{2\nu^2-1}\left(1 + \frac{1-2\ln(2\pi)}{2X\nu}\right)$. La dérivée de la fonction $\nu \mapsto \nu^2G_1$ est du même signe que l'expression $6X\nu^3 + (2 - 4\ln(2\pi))\nu^2 - 5X\nu + 4\ln(2\pi) - 2$. Pour $X > 0$ et $\nu \in [0.97, 1]$, cette expression est positive. Ainsi $\nu^2G_1 < 1 + \frac{1-2\ln(2\pi)}{2X}$.

Par (2.18) et comme $\nu < 1$, nous avons

$$\frac{G_0}{\nu^2}\exp(\alpha X^{1/2}e^{-X}) = (\nu - \ln(2\pi)/X)\exp(\alpha X^{1/2}e^{-X}) < (1 - \ln(2\pi)/X)\exp(\alpha X^{1/2}e^{-X}).$$

En étudiant la dérivée, si $\frac{\ln(2\pi)}{X^2} > \alpha\sqrt{X}e^{-X}$, la fonction croît et elle est majorée par la valeur 1. Pour $\alpha = 23.64$, la condition est valide pour $X \geqslant 7.64$.

Alors une fonction majorante pour $|\psi(x) - x|/x$ ou $|\vartheta(x) - x|/x$ est

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(1 - \frac{\ln(2\pi) - 1/2}{X}\right)^{1/4}X^{1/2}e^{-X}.$$

□

*Preuve du Corollaire 46.* Nous appliquons le théorème 45 avec la valeur $R = 5.573412$ de [10] (nous aurions pu utiliser $R = 5.69693$ trouvée par Kadiri [9]). Ensuite notre résultat est plus fin que celui de Schoenfeld (2.4) dès lors que $x > \exp(240)$. Nous avons montré que ces résultats conviennent entre $\exp(200)$ et $\exp(400)$ en utilisant [18] (Entrée $b = 200$ de la Table p.358). Nous avons vérifié numériquement les valeurs entre $3 \leqslant x \leqslant 101$. □

## 2.6 Références


[1] Marc Deléglise and Jean-Louis Nicolas. Maximal product of primes whose sum is bounded. *Bull. Proc. of the Steklov Institute*, 17 :82–112, 2013. [page 38]

[2] Pierre Dusart. Estimates of $\psi$, $\theta$ for large values of $x$ without the Riemann hypothesis. *Mathematics of Computation*, 85(298) :875–888, 2016. [page 37]

[3] William John Ellison and Michel Mendès France. *Les nombres premiers*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1975. [page 29]

[4] Laura Faber and Habiba Kadiri. New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 84(293) :1339–1357, 2015. See corrigendum [5]. [page 38, 47]

[5] Laura Faber and Habiba Kadiri. Corrigendum to New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 87(311) :1451–1455, July 2018. See [4]. [page 47]

[6] Daniel Alan Goldston and Kevin S. McCurley. Sieving the positive integers by large primes. *Journal of Number Theory*, 28(1) :94 – 115, 1988. [page 38]

[7] Xavier Gourdon. "the $10^{13}$ first zeros of the Riemann zeta function, and zeros computation at very large height". 2004. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf. [page 46]

[8] A.E. Ingham. *The Distribution of Prime Numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1932. [page 32]

[9] Habiba Kadiri. Une région explicite sans zéros pour la fonction $\zeta$ de Riemann. *Acta Arith.*, 117(4) :303–339, 2005. [page 46]

[10] Michael J. Mossinghoff and Timothy S. Trudgian. Nonnegative trigonometric polynomials and a zero-free region for the Riemann zeta-function. *Journal of Number Theory*, 157 :329–349, 2015. [page 46]

[11] Jean-Louis Nicolas. Small values of the Euler function and the Riemann hypothesis. *Acta Arith.*, 155(3) :311–321, 2012. [page 38]

[12] O. Ramaré. An explicit density estimate for Dirichlet L-series. *Math. Comp.*, 85(297) :325–356, 2016. [page 34]

[13] Olivier Ramaré. Explicit estimates for the summatory function of $\Lambda(n)/n$ from the one of $\Lambda(n)$. *Acta Arith.*, 159(2) :113–122, 2013. [page 38]

[14] Olivier Ramaré and Robert Rumely. Primes in arithmetic progressions. *Mathematics of Computation*, 65(213) :pp. 397–425, 1996. [page 38]

[15] John Barkley Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *Am. J. Math.*, 63 :211–232, 1941. [page 30, 34, 35, 36, 37, 45]

[16] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(1) :64–94, 03 1962. [page 37, 46]

[17] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 29(129) :243–269, January 1975. [page 38, 39, 41, 46]

[18] Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. *Mathematics of Computation*, 30(134) :337–360, April 1976. [page 37, 38, 39, 40, 42, 43, 46]

[19] Timothy S. Trudgian. An improved upper bound for the argument of the riemann zeta-function on the critical line {II}. *Journal of Number Theory*, 134(0) :280 – 292, 2014. [page 34]

# Chapitre 3

# Amélioration des encadrements pour des moyennes valeurs de $x$.

Autant pour le chapitre précédent, pour les grandes valeurs de $x$, il fallait essayer de s'affranchir de paramètres, autant ici pour les moyennes valeurs de $x$, il faut ne rien laisser pour affiner avec le plus de précision possible le terme d'erreur. Nous avons déjà présenté les travaux de Rosser, de Schoenfeld sur ce sujet aussi il est intéressant de voir le travail effectué par Kadiri et Ramaré pour intégrer une découpe entre 1/2 et 1 de la zone sans zéro de $\zeta$ et déclinant les zéros en trois zones : $\sigma \leqslant 1/2$, $\sigma \in ]1/2, \sigma_0]$ et $\sigma \in ]\sigma_0, 1[$.

## 3.1 Le nombre de zéros de zêta détaillé

Des progrès ont été fait sur la zone sans zéro de $\zeta$. D'une part de façon macroscopique (augmentation de la surface de la région sans zéro), mais aussi de microscopique (nous saurons dire qu'il y a au plus certain nombre de zéros d'abscisse élevée qui peuvent être ici).

### 3.1.1 Zone sans zéro classique

Nous utilisons la région sans zéro de type classique (type de la Vallée Poussin), ce qui permet d'homogénéiser les résultats et de pouvoir les comparer plus rapidement.

Dans cette partie, tous les paramètres sont importants. Il faut intégrer le plus d'améliorations possibles sur la zone sans zéro. Déjà sur le paramètre R définissant cette zone. Après les travaux de Kadiri [7, 8] sur ce sujet, Mossinghoff et Trudgian [11, théorème 1] fournissent le meilleur résultat à ce jour avec le paramètre suivant :

**Théorème 56** (Mossinghoff et Trudgian)**.** *Soit* $\mathrm{R} = 5.573412$. *Alors il n'y a pas de zéros de* $\zeta(s)$ *dans la région*

$$\Re\mathrm{e}(s) \geq 1 - \frac{1}{\mathrm{R}\log|\Im\mathrm{m}(s)|} \text{ et } |\Im\mathrm{m}(s)| \geq 2.$$

### 3.1.2 Zone sans zéro par classe

Dans [9], Kadiri détaille le nombre $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ (voir 1.2.4) en coupant la bande critique. Soit $\mathrm{N}(\sigma_0, \mathrm{T})$ le nombre de zéros non triviaux de zêta dans la région $\sigma_0 \leq \beta \leq 1$ et $0 \leq \gamma \leq \mathrm{T}$. Elle a majoré explicitement le nombre $\mathrm{N}(\sigma_0, \mathrm{T})$ et le résultat a été amélioré par Ramaré [14, théorème 1.1] dans certains cas (un facteur 1/2 est requis pour conserver la cohérence entre les définitions des deux auteurs).

**Théorème 57** (Ramaré)**.** *Soit* $\sigma_0 \geqslant 0.52$. *Alors pour* $T \geq 2000$,

$$N(\sigma_0, T) \leq \tilde{F}(\sigma_0, T) = T \log\left(1 + \frac{9.8}{2T}(3T)^{8(1-\sigma_0)/3} \log^{5-2\sigma_0}(T)\right) + \frac{103}{2}(\log T)^2$$

Pour être compatible avec les travaux de Kadiri, nous choisirons $c_2 = c_3 = 0$ et $c_1 = \tilde{F}(\sigma_0, H)/H$ afin d'avoir pour $\sigma_0 > 5/8$,

$$N(\sigma_0, T) \leqslant c_1 T \quad \text{pour tout } T \geqslant H.$$

## 3.2 Méthode de Faber-Kadiri

Les travaux de Rosser&Schoenfeld sont spécifiques au type de zone qu'ils avaient trouvé et ne peuvent pas prendre en compte le découpage en largeur avec l'abscisse $\sigma_0$. La somme sur les zéros de $\zeta$ sera découpée en trois parties au lieu de deux : $\sigma \leq 1/2$, $1/2 < \sigma \leq \sigma_0$ et $\sigma > \sigma_0$.

Faber et Kadiri [4, 5] réécrivent une formule explicite pour $\psi(x)$ qui intègre ces avancées.

### 3.2.1 Introduction d'une densité de lissage $f$.

**Définition 5.** *Soit* $0 < a < b$, $m \in \mathbb{N}$ *et* $m \geq 2$. *Soit* $f$ *la fonction sur* $[a, b]$ *définie par* $f(x) = 1$ *si* $0 \leq x \leq a$, $f(x) = 0$ *si* $x \geq b$, *et* $f(x) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ *si* $a \leq x \leq b$, *où* $g$ *est une fonction définie sur* $[0, 1]$ *satisfaisant les conditions*

*(i)* $0 \leq g(x) \leq 1$ *pour* $0 \leq x \leq 1$,

*(ii)* $g$ *est une fonction* $m$*-fois dérivable sur* $(0, 1)$ *telle que pour tout* $k = 1, \ldots, m$,

$$g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1) = 0,$$

*et il existe des constantes positives* $a_k$ *telles que*

$$|g^{(k)}(x)| \leq a_k \quad \text{pour } 0 < x < 1.$$

Considérons

$$\mathscr{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f\left(\frac{n}{x}\right) \text{ et } E_{\mathscr{S}}(x) = \left|\frac{\mathscr{S}(x) - x}{x}\right|. \tag{3.1}$$

Soit $\delta > 0$. Notons $f^-$ et $f^+$ en lieu et place de la fonction $f$ définie ci-dessus avec les choix $a = 1 - \delta, b = 1$ et $a = 1, b = 1 + \delta$ respectivement. Nous définissons aussi par $\mathscr{S}^-$ et $\mathscr{S}^+$ les sommes $\mathscr{S}$ associées à $f^-$ et $f^+$ respectivement. On remarque que

$$\mathscr{S}^-(x) \leq \psi(x) \leq \mathscr{S}^+(x) \text{ et } E(x) \leq \max(E_{\mathscr{S}^-}(x), E_{\mathscr{S}^+}(x)). \tag{3.2}$$

La transformée de Mellin de $f$ est donnée par

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt. \tag{3.3}$$

Nous rappelons la propriété (voir [13, page 80, (3.1.3)]) : s'il existe $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha < \beta$ et, pour chaque $\epsilon > 0$, $f(x) = \mathscr{O}(x^{-\alpha-\epsilon})$ lorsque $x \to 0$, et $f(x) = \mathscr{O}(x^{-\beta+\epsilon})$ lorsque $x \to +\infty$, alors F est analytique sur le domaine $\alpha < \Re e(s) < \beta$. Il vient que pour le choix de $f$ proposé,

F est analytique sur $\Re\mathrm{e}(s) > 0$. De plus, la formule de l'inverse de la transformée de Mellin est

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \mathrm{F}(s)\, t^{-s}\, ds. \tag{3.4}$$

Observons que

$$\int_a^b |f^{(m+1)}(t)|\, t^{m+1}\, dt = \frac{1}{(b-a)^m}\int_0^1 |g^{(m+1)}(u)|\, ((b-a)u+a)^{m+1}\, du.$$

Soit $k$ un entier strictement positif. Définissons

$$\mathrm{M}(a,b,k) = \int_0^1 |g^{(k+1)}(u)|\, ((b-a)u+a)^{k+1}\, du. \tag{3.5}$$

Nous allons décrire certaines propriétés de F.

**Lemme 58.** *Soit* $0 < a < b, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. *Soient* $f$ *et* $g$ *les fonctions comme dans la définition 5.*

1. *La transformée de Mellin* F *de* $f$ *admet un pôle simple en* $s = 0$ *de résidu 1 et est analytique partout ailleurs.*
2. *Soit* $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re\mathrm{e}(s) \leq 1$. *Alors* F *satisfait les propriétés suivantes :*

$$\mathrm{F}(1) = a + (b-a)\int_0^1 g(u)\, du, \tag{3.6}$$

$$|\mathrm{F}(s)| \leq \frac{\mathrm{M}(a,b,k)}{(b-a)^k |s|^{k+1}}, \quad \textit{pour tout } k = 0,\dots,m. \tag{3.7}$$

*Démonstration.* L'identité (3.6) se déduit immédiatement de la définition de $f$.

Utilisons maintenant les conditions 1 et 2. Nous avons

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^b f(t)\, t^{s-1}\, dt$$

avec $f'(x) = 0$ pour $0 < x < a$. En intégrant par parties, nous obtenons que $\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{G}(s)}{s}$, où

$$\mathrm{G}(s) = -\int_a^b f'(t)\, t^s\, dt \tag{3.8}$$

est une fonction entière. Le résidu de F en $s = 0$ provient de $\mathrm{G}(0) = 1$.
Soit $\Re\mathrm{e}(s) \leq 1$ et $k = 0,\dots,$ ou $m$. L'inégalité (3.7) est obtenue en intégrant F par parties $k+1$ fois :

$$\mathrm{F}(s) = \frac{(-1)^{k+1}}{s(s+1)\dots(s+k)}\int_a^b f^{(k+1)}(t)\, t^{s+k}\, dt. \tag{3.9}$$

Considérons

$$\mathrm{G}_m(s) = \int_a^b t^{s+m} f^{(m+1)}(t)\, dt.$$

Comme $f^{(i)}$ s'annule en $a$ ainsi qu'en $b$ pour tous les $i = k,\dots,m$, nous avons

$$\mathrm{G}_m(-k) = (m-k)!(-1)^{m-k}\int_a^b f^{(k+1)}(t)\, dt = (m-k)!(-1)^{m-k}(f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a)) = 0. \tag{3.10}$$

Ainsi F admet un unique pôle en $s = 0$ et est analytique ailleurs. □

### 3.2.2 La formule explicite pour $\psi(x)$ avec cette forme lissage.

Nous utilisons les techniques classiques (cf Chapitre 1) pour réécrire $\mathscr{S}(x)$ comme une intégrale complexe, décaler le contour d'intégration vers la gauche, et collecter tous les pôles de la fonction à intégrer pour obtenir ainsi une formule analogue de la formule explicite classique

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}), \tag{3.11}$$

mais avec la fonction de lissage définie précédemment.

**Théorème 59.** *Soit* $0 < a < b, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. *Soit* $f$ *une fonction satisfaisant la définition 5 et* F *sa transformée de Mellin. Alors*

$$\mathscr{S}(x) = x\mathrm{F}(1) - \sum_{\rho} x^{\rho}\mathrm{F}(\rho) - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n}\mathrm{F}(-2n),$$

*où* $\rho$ *parcourt tous les zéros non triviaux* $\rho = \beta + i\gamma$ *de la fonction zêta de Riemann.*

*Démonstration.* En insérant (3.4) dans (3.1), nous obtenons :

$$\mathscr{S}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^{s}\mathrm{F}(s)\Big(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\Big)ds.$$

Fixons $k \in \mathbb{R}\backslash 2\mathbb{N}$ et $\mathrm{T} \geq 2$ de telle sorte que T ne soit pas égal à l'ordonnée d'un zéro de $\zeta$.

Remarquons que la fonction à intégrer admet un pôle en $s = 0$ de résidu $-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)$, un pôle en $s = 1$ de résidu $x\mathrm{F}(1)$, des pôles aux zéros non-triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de zêta de résidu $-x^{\rho}\mathrm{F}(\rho)$, et des pôles aux zéros triviaux $s = -2n, n \in \mathbb{N}$ de zêta, de résidu $-x^{-2n}\mathrm{F}(-2n)$. Pour former le contour d'intégration, plaçons les quatre points $2 - i\mathrm{T}$, $2 + i\mathrm{T}$, $-k - i\mathrm{T}$, $-k + i\mathrm{T}$ de façon à former le contour rectangle $\mathscr{R}$ en traçant les segments associés. Ainsi

$$\mathscr{S}(x) = \mathrm{I}_1(\mathrm{T},k) + \mathrm{I}_2(\mathrm{T},k) - \mathrm{I}_3(\mathrm{T},k) - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \mathrm{F}(1)x - \sum_{|\gamma|<\mathrm{T}} x^{\rho}\mathrm{F}(\rho) - \sum_{1\leq n\leq \frac{k}{2}} x^{-2n}\mathrm{F}(-2n),$$

où $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ sont les intégrations le long des segments $[-k+i\mathrm{T}, 2+i\mathrm{T}]$, $[-k+i\mathrm{T}, -k-i\mathrm{T}]$, $[-k-i\mathrm{T}, 2-i\mathrm{T}]$ respectivement. Il reste à prouver que pour chaque $j = 1,2,3$,

$$\lim_{k,\mathrm{T}\to+\infty} |\mathrm{I}_j(\mathrm{T},k)| = 0.$$

En utilisant les majorations classiques (voir [1, page 108])

$$\Big|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\mathrm{T})\Big| \ll \begin{cases} \log^2 \mathrm{T} & \text{si } -1 \leq \sigma \leq 2, \\ \log(|\sigma| + \mathrm{T}) & \text{si } -k \leq \sigma \leq -1, \end{cases}$$

conjointement avec l'inégalité (3.7) pour F, nous obtenons

$$|\mathrm{I}_1(\mathrm{T},k)| \ll \frac{\log^2 \mathrm{T}}{\mathrm{T}^{m+1}}\frac{x^2}{\log x} + \frac{\log \mathrm{T}}{\mathrm{T}^{m+1}}\frac{1}{x\log x} + \frac{x^{-\mathrm{T}}}{\mathrm{T}^{m-1}}.$$

Ce qui permet de conclure que $\lim_{k,\mathrm{T}\to+\infty} |\mathrm{I}_1(\mathrm{T},k)| = 0$.

Remarquons que $\mathrm{I}_3(\mathrm{T},k) = \mathrm{I}_1(-\mathrm{T},k)$ converge vers 0 par un argument similaire.

Pour $\mathrm{I}_2(\mathrm{T},k)$, combinons (3.7) avec [1, inégalité (8)] :

$$|\mathrm{F}(-k+it)|\Big|\frac{-\zeta'}{\zeta}(-k+it)\Big| \ll \begin{cases} \frac{\log k}{k^{m+1}} & \text{si } |t| \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{\log|t|}{|t|^{m+1}} & \text{si } |t| > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ainsi $|\mathrm{I}_2(\mathrm{T},k)| \ll x^{-k}\Big(\frac{\log k}{k^{m+1}} + \frac{\log \mathrm{T}}{\mathrm{T}^{m}}\Big)$, et $\lim_{k,\mathrm{T}\to+\infty} |\mathrm{I}_2(\mathrm{T},k)| = 0$. □

### 3.2.3 Intégration du positionnement dans la formule de calcul sur la somme des zéros.

Nous déduisons de (3.7) que

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n}\mathrm{F}(-2n)\Big| \le \mathrm{M}(a,b,0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n} \le \frac{\mathrm{M}(a,b,0)}{2x^2}.$$

En rassemblant les éléments précédents, (3.6), et $-\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \frac{\log(2\pi)}{2}$, il vient que

$$\mathrm{E}_{\mathscr{S}}(x) \le \Big|a-1+(b-a)\int_0^1 g(u)\,du\Big| + \sum_{\rho} x^{\beta-1}|\mathrm{F}(\rho)| + \frac{\log(2\pi)}{2}x^{-1} + \frac{\mathrm{M}(a,b,0)}{2}x^{-3}. \quad (3.12)$$

Pour étudier la somme sur les zéros, introduisons les notations

- $\mathrm{H} > 0$ est tel que si $\zeta(\beta+i\gamma)=0$ et $0<\gamma<\mathrm{H}$, alors $\beta = 1/2$,
- $\mathrm{T}_0 > 2\pi$ est tel que $\sum_{0<\gamma<\mathrm{T}_0}\gamma^{-1}$ peut être directement calculée,
- $\mathrm{T}_1$ est un paramètre satisfaisant $\mathrm{T}_0 < \mathrm{T}_1 < \mathrm{H}$,
- R est une constante de sorte que $\zeta(\sigma+it)$ ne s'annule pas dans la région $\sigma \ge 1-\frac{1}{\mathrm{R}\log|t|}$ et $|t|\ge 2$, (3.13)
- $\sigma_0$ est un paramètre satisfaisant $5/8 \le \sigma_0 < 1$,
- $c_1 > 0$ dépendent de $\sigma_0$ de sorte que $\mathrm{N}(\sigma_0,\mathrm{T}) \le c_1\mathrm{T}$ pour tout $\mathrm{T}\ge\mathrm{H}$.

En utilisant la symétrie des zéros de zêta ainsi que la notation $\sum^* = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1/2} + \sum_{1/2<\beta<1}$ nous avons :

$$\sum_{\rho} x^{\beta-1}|\mathrm{F}(\rho)| = \sum_{\gamma>0}^{*}\left(x^{\beta-1}+x^{-\beta}\right)\left(|\mathrm{F}(\rho)|+|\mathrm{F}(\overline{\rho})|\right). \quad (3.14)$$

En séparant les zéros verticalement en H :

$$\sum_{\rho} x^{\beta-1}|\mathrm{F}(\rho)| = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (3.15)$$

avec

$$\Sigma_1 = x^{-\frac{1}{2}}\sum_{0<\gamma\le\mathrm{H}}\left(|\mathrm{F}(1/2+i\gamma)|+|\mathrm{F}(1/2-i\gamma)|\right),\ \Sigma_2 = \sum_{\gamma>\mathrm{H}}^{*}\left(x^{\beta-1}+x^{-\beta}\right)\left(|\mathrm{F}(\rho)|+|\mathrm{F}(\overline{\rho})|\right).$$

Découpons $\Sigma_1$ verticalement en $\mathrm{T}_1$ et utilisons (3.7) pour borner $|\mathrm{F}(\rho)|$ avec $k=0$ lorsque $\gamma\le\mathrm{T}_1$, et $k=m$ lorsque $\mathrm{T}_1<\gamma\le\mathrm{H}$ respectivement. Ainsi

$$\Sigma_1 \le 2x^{-\frac{1}{2}}\Big(\mathrm{M}(a,b,0)\sum_{0<\gamma\le\mathrm{T}_1}\frac{1}{\gamma} + \frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m}\sum_{\mathrm{T}_1<\gamma\le\mathrm{H}}\frac{1}{\gamma^{m+1}}\Big). \quad (3.16)$$

De plus, en découpant la première somme à la hauteur $\mathrm{T}_0 \le \mathrm{T}_1$, nous pouvons noter par $s_0$ une majoration très précise de $\sum_{\gamma\le\mathrm{T}_0}\frac{1}{\gamma}$. Dans [17], les auteurs utilisent $s_0 = 0.8113925$ avec $\mathrm{T}_0 = 158.84998$ . En recalculant cette somme à partir de la liste des zéros fournie par Odlyzko [12], on obtient : $s_0 = 11.637732$ avec $\mathrm{T}_0 = 1\,132\,491$.
Nous utilisons (3.7) avec $k=m$ pour $\Sigma_2$ et on coupe horizontalement en $\sigma_0$. Avec la région sans zéro donnée dans le théorème 88 et le fait que $x^{\beta-1}+x^{-\beta}$ croît avec $\beta$, nous obtenons

$$\Sigma_2 \le 2\frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m}\Big(\left(x^{-(1-\sigma_0)}+x^{-\sigma_0}\right)\sum_{\gamma>\mathrm{H}}\frac{1}{\gamma^{m+1}} + \sum_{\gamma>\mathrm{H},\sigma_0<\beta<1}\frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}}+x^{-(1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}})}}{\gamma^{m+1}}\Big). \quad (3.17)$$

On note

$$s_1(\mathrm{T}_1) = \sum_{0<\gamma\le \mathrm{T}_1} \frac{1}{\gamma}, \quad s_2(m,\mathrm{T}_1) = \sum_{\mathrm{T}_1<\gamma\le \mathrm{H}} \frac{1}{\gamma^{m+1}}, \quad s_3(m) = \sum_{\gamma>\mathrm{H}} \frac{1}{\gamma^{m+1}},$$
$$s_4(m,\sigma_0) = \sum_{\gamma>\mathrm{H},\sigma_0<\beta<1} \frac{1}{\gamma^{m+1}}, \quad s_5(x,m,\sigma_0) = \sum_{\gamma>\mathrm{H},\sigma_0<\beta<1} \frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}}}{\gamma^{m+1}}. \tag{3.18}$$

Nous avons

$$\sum_{\rho} x^{\beta-1}|\mathrm{F}(\rho)| \le 2\left(\mathrm{M}(a,b,0)s_1(\mathrm{T}_1) + \frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m} s_2(m,\mathrm{T}_1)\right) x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+2\frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m}\left(\left(x^{-(1-\sigma_0)} + x^{-\sigma_0}\right)s_3(m) + x^{-(1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}})}s_4(m,\sigma_0) + s_5(x,m,\sigma_0)\right). \tag{3.19}$$

On conclut en insérant (3.19) dans (3.12).

**Lemme 60.** *Soit* $0 < a < b, m \in \mathbb{N}$, *avec* $m \ge 2$. *Soit* $f$ *une fonction satisfaisant la définition 5. Soient* $\mathrm{H}, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{R}$, *et* $\sigma_0$ *satisfaisant* (3.13). *Alors pour tout* $x > 0$,

$$\mathrm{E}_{\mathscr{S}}(x) \le \mathrm{K}(x,a,b,m,\sigma_0),$$

*où*

$$\mathrm{K}(x,a,b,m,\sigma_0) = \left|a-1+(b-a)\int_0^1 g(u)\,du\right|$$
$$+2\frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m}\left(\left(x^{-(1-\sigma_0)} + x^{-\sigma_0}\right)s_3(m) + x^{-(1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}})}s_4(m,\sigma_0) + s_5(x,m,\sigma_0)\right)$$
$$+2\left(\mathrm{M}(a,b,0)s_0 + \mathrm{M}(a,b,0)s_1(\mathrm{T}_1) + \frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{(b-a)^m}s_2(m,\mathrm{T}_1)\right)x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{\log(2\pi)}{2}x^{-1} + \frac{\mathrm{M}(a,b,0)}{2}x^{-3}, \tag{3.20}$$

*et* $\mathrm{M}(a,b,m)$ *ainsi que les* $s_i$ *sont définis par* (3.5) *et par* (3.18) *respectivement.*

Notons que pour $a, b, m, \sigma_0$ des constantes fixées, $\mathrm{K}(x,a,b,m,\sigma_0)$ décroît avec $x$. Ainsi, pour tout $x \ge x_0$

$$\mathrm{E}_{\mathscr{S}}(x) \le \mathrm{K}(x_0,a,b,m,\sigma_0). \tag{3.21}$$

## 3.3 Expressions des sommes partielles

### 3.3.1 Majorations de $s_1(\mathrm{T}_1)$, $s_2(m,\mathrm{T}_1)$ et $s_3(m)$.

Nous appliquons ici un résultat de Rosser et Schoenfeld [17]. Il utilise les résultats explicites sur $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ donnés par le théorème 2.2 pour majorer certaines sommes sur les zéros de zêta, en particulier $a_1 = 0.137$ et $a_2 = 0.443$.

**Lemme 61.** *[17, Lemma 7] Soit* $1 < \mathrm{U} \le \mathrm{V}$, *et soit* $\Phi(y)$ *positive ou nulle et différentiable pour* $\mathrm{U} < y < \mathrm{V}$. *Soit* $(\mathrm{W}-y)\Phi'(y) \ge 0$ *pour* $\mathrm{U} < y < \mathrm{V}$, *où* $\mathrm{W}$ *n'appartient pas au segment* $[\mathrm{U},\mathrm{V}]$. *Soit* $\mathrm{Y}$ *le point médian parmi* $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ *c'est-à-dire celui qui n'est pas plus grand ou plus petit que les deux autres. Choisissons* $j = 0$ *ou* $1$ *de telle sorte que* $(-1)^j(\mathrm{V}-\mathrm{W}) \ge 0$. *Alors*

$$\sum_{\mathrm{U}<\gamma\le\mathrm{V}} \Phi(\gamma) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{V}} \Phi(y)\log\frac{y}{2\pi}\,dy + (-1)^j\left(a_1 + \frac{a_2}{\log\mathrm{Y}}\right)\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{V}} \frac{\Phi(y)}{y}\,dy + \mathrm{E}_j(\mathrm{U},\mathrm{V}),$$

*où le terme d'erreur* $E_j(U,V)$ *est donné par*

$$E_j(U,V) = (1+(-1)^j)R(Y)\Phi(Y) + (N(V)-P(V)-(-1)^j R(V))\Phi(V) - (N(U)-P(U)+R(U))\Phi(U).$$

**Corollaire 62.** *[17, Corollary of Lemma 7] Si, de plus,* $2\pi < U$*, alors*

$$\sum_{U<\gamma\le V} \Phi(\gamma) \le \left(\frac{1}{2\pi} + (-1)^j q(Y)\right) \int_U^V \Phi(y) \log \frac{y}{2\pi} dy + E_j(U,V), \quad \textit{où}$$

$$q(y) = \frac{a_1 \log y + a_2}{y \log y \log(y/2\pi)}. \tag{3.22}$$

De plus, si $j = 0$ et $W < U$, alors

$$E_0(U,V) \le 2R(U)\Phi(U). \tag{3.23}$$

*Commentaires sur la monotonie de* $f$ *sur* $[U,V]$. Il y a 3 cas à considérer pour le lemme 61 :

1. $W < U < V \Rightarrow Y = U$ et $j = 0$ comme $V - W \ge 0$. Dans ce cas, $f$ décroît sur $(U,V)$.
2. $U < W < V \Rightarrow Y = W$ et $j = 0$ comme $V - W \ge 0$. Dans ce cas, $f$ croît $(V,W)$ et décroît sur $(W,\infty)$.
3. $U < V < W \Rightarrow Y = V$ et $j = 1$ comme $V - W \le 0$. Dans ce cas, $f$ croît sur $(U,V)$.

Donnons les détails de l'application du corollaire 62 et (3.23) sur $s_1, s_2$, et $s_3$. Prenons respectivement

— $\Phi(y) = y^{-1}$, $U = T_0$, $V = T_1$,
— $\Phi(y) = y^{-m-1}$, $U = T_1$, $V = H$,
— $\Phi(y) = y^{-m-1}$, $U = H$, $V = \infty$.

Dans chaque cas, $\Phi'(y) \le 0$ pour tout $y$, et nous choisissons $W < U$, $Y = U$, et $j = 0$. Comme

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{\log \frac{y}{2\pi}}{y} dy = \log(T_1/T_0) \log(\sqrt{T_1 T_0}/(2\pi)),$$
$$\int_U^V \frac{\log \frac{y}{2\pi}}{y^{m+1}} dy = \frac{1 + m\log(U/2\pi)}{m^2 U^m} - \frac{1 + m\log(V/2\pi)}{m^2 V^m},$$

nous obtenons :

$$s_1(T_1) \le B_1(T_1) = s_0 + \left(\frac{1}{2\pi} + q(T_0)\right)\left(\log(T_1/T_0)\log(\sqrt{T_1T_0}/(2\pi))\right) + \frac{2R(T_0)}{T_0}, \tag{3.24}$$

$$s_2(m,T_1) \le B_2(m,T_1) = \left(\frac{1}{2\pi} + q(T_1)\right)\left(\frac{1 + m\log(T_1/2\pi)}{m^2 T_1^m} - \frac{1 + m\log(H/2\pi)}{m^2 H^m}\right) + \frac{2R(T_1)}{T_1^{m+1}}, \tag{3.25}$$

$$s_3(m) \le B_3(m) = \left(\frac{1}{2\pi} + q(H)\right)\frac{1 + m\log(H/2\pi)}{m^2 H^m} + \frac{2R(H)}{H^{m+1}}. \tag{3.26}$$

### 3.3.2 Majorations $s_4(m,\sigma_0)$ et $s_5(x,m,\sigma_0)$.

Nous supposons ici que $\Phi(y) = o(y)$ lorsque $y \to \infty$, afin de garantir que

$$\lim_{y\to\infty} \Phi(y) N(\sigma_0, y) = 0.$$

Puisque tous les zéros non-triviaux de zêta ont une partie réelle $1/2$ lorsque $\gamma \le H$, alors $N(\sigma_0, H) = 0$ et nous avons l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\gamma\ge H, \beta>\sigma_0} \Phi(\gamma) = -\int_H^\infty N(\sigma_0, y)\Phi'(y) dy.$$

**Lemme 63.** *Soit* $\mathrm{H}, \sigma_0, c_1, c_2, c_3$ *satisfaisant* (3.13). *Soit* $\mathrm{H} < \mathrm{U} \le \mathrm{V}$, *et soit* $\Phi(y)$ *positive ou nulle et différentiable sur* $\mathrm{U} < y < \mathrm{V}$. *Supposons* $\Phi(y) = o(y)$ *lorsque* $y \to \infty$ *et* $(\mathrm{W} - y)\Phi'(y) \ge 0$ *pour tout* $\mathrm{U} < y < \mathrm{V}$, *où* W *n'est pas nécessairement dans l'intervalle* $[\mathrm{U}, \mathrm{V}]$. *Soit* Y *le point parmi* U, V, W *qui n'est pas plus grand que les deux autres et qui n'est pas plus petit que les deux autres. Alors*

$$\sum_{\mathrm{U}<\gamma<\mathrm{V}, \beta>\sigma_0} \Phi(\gamma) \le (c_1\mathrm{Y} + c_2 \log \mathrm{Y} + c_3)\Phi(\mathrm{Y}) - (c_1\mathrm{V} + c_2 \log \mathrm{V} + c_3)\Phi(\mathrm{V}) + \int_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{V}} (c_1 + c_2/y)\Phi(y)\,dy.$$

*Démonstration.* Nous avons $0 \le \mathrm{N}(\sigma_0, y) \le c_1 y + c_2 \log y + c_3$. Nos hypothèses nous assurent que $\Phi'(y) \ge 0$ si $\mathrm{U} \le y \le \mathrm{Y}$ et que $\Phi'(y) \le 0$ si $\mathrm{Y} \le y \le \mathrm{V}$. Ainsi

$$-\int_{\mathrm{U}}^{\mathrm{V}} \mathrm{N}(\sigma_0, y)\Phi'(y)\,dy \le -\int_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{V}} (c_1 y + c_2 \log y + c_3)\Phi'(y)\,dy,$$

et nous intégrons par parties pour compléter la preuve. □

Pour $s_4(m, \sigma_0)$, prenons $\Phi(y) = \frac{1}{y^{m+1}}$, $\Phi'(y) = -\frac{m+1}{y^{m+2}}$, $\mathrm{W} < \mathrm{U} = \mathrm{Y} = \mathrm{H}$, et $\mathrm{V} = \infty$. Alors

$$s_4(m, \sigma_0) \le \mathrm{B}_4(m, \mathrm{H}, \sigma_0) = \left(c_1\Big(1 + \frac{1}{m}\Big) + c_2\frac{\log \mathrm{H}}{\mathrm{H}} + \Big(c_3 + \frac{c_2}{m+1}\Big)\frac{1}{\mathrm{H}}\right)\frac{1}{\mathrm{H}^m}. \tag{3.27}$$

Pour $s_5(x, m, \sigma_0)$, nous appliquons le lemme 63 avec $\mathrm{U} = \mathrm{H}$, $\mathrm{V} = \infty$, $\Phi(y) = \phi_m(y) = \frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log y}}}{y^{m+1}}$, $\phi'_m(y) = \Big(\frac{\log x}{\mathrm{R}(\log y)^2} - (m+1)\Big)\frac{\phi_m(y)}{y}$, et

$$\mathrm{W} = e^{\sqrt{\frac{\log x}{\mathrm{R}(m+1)}}}. \tag{3.28}$$

Soit $\mathrm{J}_m(\mathrm{Y})$ désignant l'intégrale

$$\mathrm{J}_m(\mathrm{Y}) = \int_{\mathrm{Y}}^{\infty} \phi_m(y)\,dy.$$

Nous obtenons

$$s_5(x, m, \sigma_0) \le (c_1\mathrm{Y} + c_2 \log \mathrm{Y} + c_3)\phi_m(\mathrm{Y}) + c_1\mathrm{J}_m(\mathrm{Y}) + c_2\mathrm{J}_{m+1}(\mathrm{Y}), \tag{3.29}$$

Soit $z > 0$, $w \ge 0$. Comme Rosser et Schoenfeld, les auteurs ont relié l'intégrale $\mathrm{J}_m(\mathrm{Y})$ précédente à la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce

$$\mathrm{K}_\nu(z, w) = \frac{1}{2}\int_w^{\infty} t^{\nu-1} \exp\Big(-\frac{z}{2}(t + 1/t)\Big)\,dt.$$

Effectuons le changement de variable $y = e^{\frac{z}{2m}t}$. Prenons $z = 2\sqrt{\frac{m \log x}{\mathrm{R}}}$ et $w = \sqrt{\frac{m\mathrm{R}}{\log x}}\log \mathrm{Y} = \frac{2m}{z}\log \mathrm{Y}$, pour reconnaître l'égalité

$$\mathrm{J}_m(\mathrm{Y}) = \frac{z}{2m}\mathrm{K}_1(z, w).$$

Nous utilisons [17, Lemma 4] qui affirme que si $w > 1$ alors

$$\mathrm{K}_1(z, w) \le \mathrm{Q}_1(z, w) = \frac{w^2}{z(w^2 - 1)} \exp\Big(-\frac{z}{2}(w + 1/w)\Big). \tag{3.30}$$

Nous en déduisons pour $J_m(Y)$ que si $\log x < mR(\log Y)^2$, alors

$$J_m(Y) \leq \frac{R}{2\log x}\frac{(\log Y)^2}{\left(\frac{mR}{\log x}\right)(\log Y)^2 - 1} Y^{-m} e^{-\frac{\log x}{R\log Y}}. \tag{3.31}$$

Dans ce cas, nous avons $W < H$, $Y = H$. Nous insérons (3.31) dans (3.29) et obtenons

$$s_5(x,m,\sigma_0) \leq \left(c_1 + c_2\frac{\log H}{H} + \frac{c_3}{H}\right)\frac{x^{-\frac{1}{R\log H}}}{H^m} + c_1 J_m(H) + c_2 J_{m+1}(H),$$

Nous concluons que si $\log x < mR(\log H)^2$ alors

$$s_5(x,m,\sigma_0) \leq B_5(x,m,\sigma_0) = \left(c_1 + c_2\frac{\log H}{H} + \frac{c_3}{H} + \left(c_1 + \frac{c_2}{H}\right)\frac{R}{2\log x}\frac{(\log H)^2}{\left(\frac{mR}{\log x}\right)(\log H)^2 - 1}\right)\frac{x^{-\frac{1}{R\log H}}}{H^m}.$$

Ainsi, en considérant $c_2 = c_3 = 0$,

$$B_5(x,m,\sigma_0,H) = \begin{cases} c_1\left(1 + \frac{R}{2\log x}\frac{(\log H)^2}{\left(\frac{mR}{\log x}\right)(\log H)^2 - 1}\right)\frac{x^{-\frac{1}{R\log H}}}{H^m} & \text{si } b_0 < mR(\ln H)^2 \\ c_1\frac{x^{-\frac{1}{R\log H}}}{H^m} + c_1 J_m(H) & \text{dans l'autre cas.} \end{cases} \tag{3.32}$$

### 3.3.3 Théorème principal.

Nous déduisons une majoration pour $K(x,a,b,m,\sigma_0)$ à partir de (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), et (3.32). Le lemme 60 devient

**Théorème 64.** *Soit* $0 < a < b$, $m \in \mathbb{N}$, *avec* $m \geq 2$.

*Soient* $f$ *et* $g$ *des fonctions satisfaisant les conditions de la définition 5, et* $M(a,b,m)$ *comme défini dans* (3.5). *Soient* $H, T_0, T_1, R, \sigma_0, c_1, c_2, c_3$ *satisfaisant* (3.13).

*Soit* $x_0$ *une constante positive. Alors pour tout* $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{S}}(x) \leq \left|a-1+(b-a)\int_0^1 g(u)\,du\right| &+ \frac{2M(a,b,m)B_5(x_0,m,\sigma_0)}{(b-a)^m} + \frac{2M(a,b,m)B_3(m)}{(b-a)^m}x_0^{-(1-\sigma_0)} \\ &+ \frac{2M(a,b,m)B_3(m)}{(b-a)^m}x_0^{-\sigma_0} + \frac{2M(a,b,m)B_4(m,H,\sigma_0)}{(b-a)^m}x_0^{-(1-\frac{1}{R\log H})} \\ &+ 2\left(M(a,b,0)B_1(T_1) + \frac{M(a,b,m)B_2(m,T_1)}{(b-a)^m}\right)x_0^{-\frac{1}{2}} + \frac{\log(2\pi)}{2}x_0^{-1} + \frac{M(a,b,0)}{2}x_0^{-3}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

*où les* $B_i$ *sont définis par* (3.24), (3.25), (3.26), (3.27), *et* (3.32).

## 3.4 Bornes explicites pour $\psi(x)$.

### 3.4.1 Choix de la fonction de lissage.

Nous voulons trouver une fonction $g$ qui satisfait la définition 5 et de telle sorte que le quotient $\frac{M(a,b,m)}{\int_0^1 g(u)\,du}$ soit le plus petit possible. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$M(a,b,m) \leq \sqrt{\frac{b^{2m+3} - a^{2m+3}}{(b-a)(2m+3)}}\sqrt{\int_0^1 \left(g^{(m+1)}(u)\right)^2 du}. \tag{3.34}$$

Il s'ensuit par le calcul des variations (voir [6, Chapitre 2, §11]) que la fonction $g$ optimisant le quotient $\frac{\sqrt{\int_0^1 \left(g^{(m+1)}(u)\right)^2 du}}{\int_0^1 g(u)du}$ est donnée par

$$g(x) = 1 - \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^x t^m (1-t)^m dt. \tag{3.35}$$

Nous pouvons remarquer que ce choix correspond à l'une des primitives utilisées dans le contexte de petits intervalles contenant des nombres premiers par Ramaré & Saouter [15]. Ce n'est pas très surprenant car l'objet de cette étude est $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) f(n/x)$ tandis que celle dans l'autre contexte est essentiellement $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) \left(f(n/y) - f(n/x)\right)$. Comme $y$ est proche de $x$, cela est approximativement $\sum_{n\geq 1} \Lambda(n) f'(n/x)$.
Avec la définition (3.35), nous trouvons

$$\int_0^1 g(u)du = 1 - \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 t^m (1-t)^{m+1} dt = \frac{1}{2}, \tag{3.36}$$

et

$$\mathrm{M}(a,b,0) = \frac{a+b}{2}. \tag{3.37}$$

Nous utilisons (3.34) pour fournir une borne simple pour $\mathrm{M}(a,b,m)$.
Comme $g(1) = 0, g(0) = 1$, et $g^{(2m+2)}(x) = 0$ pour tout $0 < x < 1$, en intégrant par parties $m$-fois mène à

$$\int_0^1 (g^{(m+1)}(u))^2 du = (-1)^m \int_0^1 g^{(2m+1)}(u) \cdot g'(u) du = (-1)^{m+1} g^{(2m+1)}(0) = \frac{(2m)!(2m+1)!}{(m!)^2}.$$

Ainsi (3.34) devient

$$\mathrm{M}(a,b,m) \leq \lambda(a,b,m) = \sqrt{\frac{b^{2m+3} - a^{2m+3}}{(b-a)(2m+3)}} \cdot \frac{\sqrt{(2m)!(2m+1)!}}{m!}. \tag{3.38}$$

A partir de (3.35), nous écrivons

$$g^{(m+1)}(u) = -\frac{(2m+1)!}{m!} \mathrm{P}_m(1-2u),$$

où $\mathrm{P}_m$ est le $m^{th}$ polynôme de Legendre donné par la formule de Rodrigues (voir [10, formule (0.4)]) :

$$\mathrm{P}_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left((x^2-1)^m\right).$$

Ils peuvent être écrit explicitement (voir [10, formule (0.2)]) :

$$\mathrm{P}_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^{m-k}.$$

Ces polynômes sont bien connus et sont parmi les fonctions intégrées du logiciel PARI/GP. Comme le signe de $\mathrm{P}_m$ alterne entre ses racines, $\mathrm{M}(a,b,m)$ peut être calculé directement par

$$\mathrm{M}(a,b,m) = \frac{(2m+1)!}{m!} \int_0^1 |\mathrm{P}_m(1-2u)| \left((b-a)u + a\right)^{m+1} du. \tag{3.39}$$

### 3.4.2 Bornes explicites pour $\psi(x)$.

Nous réécrivons le théorème 64 avec $g$ comme choisi dans (3.35) :

**Théorème 65.** *Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\delta > 0$, et la paire $(a,b)$ prend les valeurs $(1, 1+\delta)$ ou $(1-\delta, 1)$. Que $\mathrm{H}, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{R}, \sigma_0, c_1$ satisfassent (3.13). Soit $b_0$ une constante positive. Alors pour tout $x \geqslant e^{b_0}$,*

$$\begin{aligned}\frac{|\psi(x)-x|}{x} \leqslant \max_{(a,b)}\Big\{ & \frac{2\mathrm{M}(a,b,m)}{\delta^m}\Big(\mathrm{B}_5 + \mathrm{B}_3(e^{-(1-\sigma_0)b_0} + e^{-\sigma_0 b_0}) + \mathrm{B}_4 e^{-(1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}})b_0}\Big) \\ & +2\Big(\mathrm{M}(a,b,0)\mathrm{B}_1 + \frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{\delta^m}\mathrm{B}_2\Big)e^{-b_0/2} + \frac{\delta}{2} \qquad (3.40)\\ & +\ln(2\pi)e^{-b_0} + \frac{\mathrm{M}(a,b,0)}{2}e^{-3b_0}\Big\} \qquad (3.41)\end{aligned}$$

*où $\mathrm{M}(a,b,m)$ est donné par (3.39), et les $\mathrm{B}_i$ sont définis respectivement dans (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) et (3.32) ainsi que $q(\mathrm{T}_i)$ par (3.22).*

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_1(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1) &= \sum_{0<\gamma\leq \mathrm{T}_0}\frac{1}{\gamma} + \Big(\frac{1}{2\pi}+q(\mathrm{T}_0)\Big)\Big(\log(\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0)\log(\sqrt{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_0}/(2\pi))\Big) + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{T}_0)}{\mathrm{T}_0},\\
\mathrm{B}_2(m,\mathrm{T}_1,\mathrm{H}) &= \Big(\frac{1}{2\pi}+q(\mathrm{T}_1)\Big)\Big(\frac{1+m\log(\mathrm{T}_1/2\pi)}{m^2\mathrm{T}_1^m} - \frac{1+m\log(\mathrm{H}/2\pi)}{m^2\mathrm{H}^m}\Big) + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{T}_1)}{\mathrm{T}_1^{m+1}},\\
\mathrm{B}_3(m,\mathrm{H}) &= \Big(\frac{1}{2\pi}+q(\mathrm{H})\Big)\frac{1+m\log(\mathrm{H}/2\pi)}{m^2\mathrm{H}^m} + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^{m+1}},\\
\mathrm{B}_4(m,\mathrm{H},\sigma_0) &= c_1\big(1+\frac{1}{m}\big)\frac{1}{\mathrm{H}^m},\\
\mathrm{B}_5(e^{b_0},m,\sigma_0,\mathrm{H}) &= \begin{cases} c_1\Big(1+\frac{\mathrm{R}}{2b_0}\frac{(\log\mathrm{H})^2}{\left(\frac{m\mathrm{R}}{b_0}\right)(\log\mathrm{H})^2-1}\Big)\frac{e^{-b_0\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}}}}{\mathrm{H}^m} & \textit{si } b_0 < m\mathrm{R}(\ln\mathrm{H})^2\\ c_1\frac{e^{-b_0\frac{1}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}}}}{\mathrm{H}^m} + c_1\mathrm{J}_m(\mathrm{H}) & \textit{dans l'autre cas.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Nous obtenons des bornes facilement calculables dont les calculs [3] peuvent être trouvés sous forme de table.

### 3.4.3 Comparaison avec la méthode de Rosser et Schoenfeld.

Deux arguments sont en faveur de la méthode présentée : diminution de la contribution des zéros de forte abscisse avec le découpage en classe et intégration d'une fonction de lissage un peu plus fine si des valeurs élevées de $m$ (degré de lissage) sont utilisées.

#### Argument de lissage

La première étape consiste à étudier $\psi(x)$ en moyenne sur un petit intervalle autour d'une grande valeur de $x$. Soit $x, \delta > 0$ avec $x \notin \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Il vient par le théorème de la moyenne (résultat classique concernant l'intégration des fonctions continues d'une variable réelle) appliqué à $h(z) = \psi(x+z) - (x+z)$ qu'il existe $z \in (0, \delta x)$ tel que :

$$h(z) + z \leq \frac{1}{(\delta/mx)^m}\int_0^{\delta x/m}\cdots\int_0^{\delta x/m}\big(h(y_1+\ldots+y_m) + (y_1+\ldots+y_m)\big)\,dy_1\ldots dy_m.$$

Le calcul de l'équation explicite (3.11) pour $\psi(x)$ conduit à (voir [16, Théorèmes 12 et 14]) :

$$\mathrm{E}(x) \leq \frac{\delta}{2} + \Sigma(m,\delta,x) + \mathcal{O}(x^{-1}), \qquad (3.42)$$

avec

$$\Sigma(m,\delta,x) = \Big|\sum_{\rho} x^{\rho-1}\mathrm{I}_{m,\delta}(\rho)\Big|, \text{ et } \mathrm{I}_{m,\delta}(\rho) = \frac{\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m+1}\binom{m}{j}(1+j\delta/m)^{m+\rho}}{(\delta/m)^m\rho(\rho+1)\dots(\rho+m)}.$$

Nous rappelons que nous avons obtenu (3.42) avec

$$\Sigma(m,\delta,x) = \Big|\sum_{\rho} x^{\rho-1}\mathrm{F}(\rho)\Big|.$$

Nous reconnaissons que $\mathrm{I}_{m,\delta}$ est en effet la transformation de Mellin de

$$\nu(t) = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+m}\binom{m}{j}\Big(\frac{(1+j\delta/m)-t}{\delta/m}\Big)^m \mathbb{1}\Big(\frac{t}{1+j\delta/m}\Big),$$

où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice sur $(0,1)$. Au lieu de cela, nous utilisons la fonction $f$ donnée par les définitions 5 et (3.35) :

$$f(x) = 1 - \frac{(2m+1)!}{(m!)^2}\int_0^{\frac{x-1}{\delta}} t^m(1-t)^m\,dt.$$

Maintenant nous comparons la taille de chaque transformation de Mellin. Rosser a établi que (voir [16, Théorème 15])

$$|\mathrm{I}_{m,\delta}(\rho)| \le \frac{((1+\delta/m)^{m+1}+1)^m}{(\delta/m)^m|\gamma|^{m+1}} = \frac{2^m m^m}{\delta^m|\gamma|^{m+1}}(1+o(1)),$$

alors que par (3.7) et (3.38) nous avons

$$|\mathrm{F}(\rho)| \le \frac{\mathrm{M}(1,1+\delta,m)}{\delta^m|\gamma|^{m+1}} \le \frac{\sqrt{(2m)!(2m+1)!}}{m!\delta^m|\gamma|^{m+1}}(1+o(1)).$$

La formule de Stirling permet de conclure que le quotient $\frac{|\mathrm{F}(\rho)|}{|\mathrm{I}_{m,\delta}(\rho)|} = \frac{\sqrt{(2m)!(2m+1)!}}{(2m)^m(m!)}$ décroît rapidement vers 0 lorsque $m$ grandit.

**Argument pour la zone sans zéros avec découpe**

Lorsque $x$ est suffisamment grand, la plus grande contribution dans $\Sigma(m,\delta,x)$ provient de

$$\sum_{\gamma>\mathrm{H},\sigma_0<\beta<1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}} \frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}}}{\gamma^{m+1}}. \tag{3.43}$$

Rosser et les auteurs suivants prennent $\sigma_0 = 1/2$ car seules les bornes pour $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ sont disponibles. Rosser et Schoenfeld trouvent (cf. [17, équations (3.4), (3.16) et (2.4)]) que si $b_0 \le 2\mathrm{R}\log^2\mathrm{H}$ et $x \ge e^{b_0}$ alors

$$e^{\frac{b_0}{\mathrm{R}\log\mathrm{H}}}\mathrm{H}^m \sum_{\gamma>\mathrm{H},1/2<\beta<1-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}} \frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log\gamma}}}{\gamma^{m+1}} \le \frac{\mathrm{R}(\log\mathrm{H})^3}{2\pi b_0\Big(\frac{m\mathrm{R}(\log\mathrm{H})^2}{b_0}-1\Big)}(1+o(1)). \tag{3.44}$$

Nous sommes capable de réduire significativement la contribution de cette somme en utilisant une valeur $\sigma_0$ plus proche de la limite de la région sans zéro. Nous avons établi que si $b_0 \le 3\mathrm{R}\log^2\mathrm{H}$ et $x \ge e^{b_0}$ alors la borne précédente peut être remplacée par

$$\Big(c_1 + c_2\frac{\log\mathrm{H}}{\mathrm{H}} + \frac{c_3}{\mathrm{H}}\Big) + \Big(\Big(c_1+\frac{c_2}{\mathrm{H}}\Big)\frac{\mathrm{R}}{2b_0}\frac{(\log\mathrm{H})^2}{\big(\frac{m\mathrm{R}}{b_0}\big)(\log\mathrm{H})^2-1}\Big).$$

Lorsque $\left(\frac{m\mathrm{R}}{b_0}\right)(\log \mathrm{H})^2 - 1$ est suffisamment grand (par exemple pour $45 \leq b_0 \leq 2000$ et $m \geq 10$), la contribution principale provient de l'expression étudiée. Il suffit de calculer des $c_i$ optimisés pour que $c_1\mathrm{H}+c_2\log\mathrm{H}+c_3$ soit petit ou simplement prendre la plus petite valeur pour $c_1$.

## 3.5 En pratique

Dans le théorème 65, beaucoup de paramètres entre en jeu : pour chaque valeur $b_0$, il faut calculer pour chaque degré de lissage $m$ (limité entre 2 et 35) la meilleure zone de découpe $\sigma_0$ (variant entre 0.8 et 0.99) pour enfin minimiser selon les paramètres $\delta$ et T.

**Proposition 66.** *Soit $b_0 \geq 0$ une constante positive fixe. Soit $x \geq e^{b_0}$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $|\psi(x) - x| \leq \varepsilon_0 x$, où $\varepsilon_0$ est donné explicitement par (3.41) et est calculé dans le tableau 3.1 pour $\mathrm{H}_2 = 2\,445\,999\,556\,030$.*

**Théorème 67** (Dusart [3])**.** *Nous avons*

$$|\psi(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x} \qquad \textit{pour } x \geqslant 2$$

*avec*

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_k$ | 0.77 | 0.85 | 1.66 | 8.16 | 59.18 |

*Démonstration.* Nous calculons la borne supérieure $\eta_k$ étape par étape jusqu'à la fin du tableau 3.1. Par exemple, si $\varepsilon_{b_i}$ est la valeur obtenue pour $x = e^{b_i}$ nous devons avoir $\eta_k \geqslant \varepsilon_{b_i} \cdot b_{i+1}^k$ pour $e^{b_i} \leqslant x \leqslant e^{b_{i+1}}$ (nous devons calculer quelques valeurs intermédiaires de $\varepsilon(x)$ entre $e^{1500}$ et $e^{2000}$). Pour les grandes valeurs hors tableau, nous utilisons le théorème 1.1 de [2]. Nous concluons par inspection directe pour les petites valeurs de $x$. Le maximum de $|\psi(x) - x|\frac{\ln^k x}{x}$ est

— Pour $x \geqslant 2$, $\eta_0 < (3 - \psi(3^-))/3 \approx 0.7689509398$,

— Pour $x \geqslant 2$, $\eta_1 < (3 - \psi(3^-))/3 \cdot \ln(3) \approx 0.8447789518618$,

— Pour $x \geqslant 2$, $\eta_2 < (17 - \psi(17^-))/17 \cdot \ln^2(17) \approx 1.6583011509743$,

— Pour $x \geqslant 2$, $\eta_3 < (223 - \psi(223^-))/223 \cdot \ln^3(223) \approx 8.15435775451$,

— Pour $x \geqslant 2$, $\eta_4 < (1423 - \psi(1423^-))/1423 \cdot \ln^4(1423) \approx 59.1713704$.

□

TABLE 3.1 – Valeurs de $\varepsilon(x)$ pour $\psi$

| $b$ | $\sigma_0$ | $m$ | $\delta$ | $T_1$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0.86 | 5 | 1.595 E-5 | 1 132 492 | 1.067 E-3 |
| 21 | 0.86 | 5 | 1.468 E-5 | 1 132 492 | 6.498 E-4 |
| 22 | 0.86 | 4 | 1.282 E-5 | 1 132 492 | 3.968 E-4 |
| 23 | 0.86 | 4 | 1.160 E-5 | 1 132 492 | 2.431 E-4 |
| 24 | 0.85 | 3 | 9.778 E-6 | 1 132 492 | 1.496 E-4 |
| 25 | 0.86 | 3 | 8.629 E-6 | 1 132 492 | 9.250 E-5 |
| 30 | 0.86 | 2 | 2.554 E-6 | 1 882 244 | 9.647 E-6 |
| 35 | 0.86 | 2 | 2.458 E-7 | 19 612 863 | 1.078 E-6 |
| 40 | 0.87 | 2 | 2.756 E-8 | 161 338 534 | 1.161 E-7 |
| 45 | 0.87 | 3 | 2.721 E-9 | 2 228 096 512 | 1.225 E-8 |
| 50 | 0.88 | 5 | 2.572 E-10 | 37 754 757 543 | 1.275 E-9 |
| 55 | 0.89 | 15 | 4.374 E-11 | 568 871 547 031 | 1.388 E-10 |
| 60 | 0.90 | 23 | 3.812 E-11 | 973 812 914 637 | 2.978 E-11 |
| 65 | 0.90 | 23 | 3.751 E-11 | 989 645 080 596 | 2.039 E-11 |
| 70 | 0.90 | 22 | 3.697 E-11 | 963 148 272 814 | 1.940 E-11 |
| 75 | 0.90 | 22 | 3.658 E-11 | 973 564 683 528 | 1.913 E-11 |
| 80 | 0.91 | 22 | 3.621 E-11 | 987 265 077 216 | 1.893 E-11 |
| 85 | 0.91 | 22 | 3.573 E-11 | 996 465 239 887 | 1.868 E-11 |
| 90 | 0.91 | 22 | 3.533 E-11 | 1 007 775 601 523 | 1.847 E-11 |
| 95 | 0.91 | 21 | 3.492 E-11 | 976 821 063 390 | 1.830 E-11 |
| 100 | 0.91 | 21 | 3.464 E-11 | 987 265 077 216 | 1.815 E-11 |
| 200 | 0.94 | 18 | 2.951 E-11 | 1 003 417 649 160 | 1.557 E-11 |
| 300 | 0.95 | 16 | 2.642 E-11 | 1 006 421 703 556 | 1.404 E-11 |
| 400 | 0.96 | 14 | 2.403 E-11 | 980 285 487 059 | 1.288 E-11 |
| 500 | 0.96 | 13 | 2.255 E-11 | 977 429 125 922 | 1.215 E-11 |
| 600 | 0.97 | 12 | 2.058 E-11 | 997 132 955 137 | 1.115 E-11 |
| 700 | 0.97 | 11 | 1.904 E-11 | 998 061 945 822 | 1.039 E-11 |
| 800 | 0.97 | 11 | 1.801 E-11 | 1 019 509 030 546 | 9.826 E-12 |
| 900 | 0.97 | 10 | 1.688 E-11 | 1 019 509 030 546 | 9.281 E-12 |
| 1000 | 0.97 | 9 | 1.574 E-11 | 1 012 519 261 279 | 8.743 E-12 |
| 1500 | 0.98 | 5 | 8.852 E-12 | 1 019 509 030 546 | 5.311 E-12 |
| 2000 | 0.98 | 2 | 3.381 E-12 | 1 364 832 983 117 | 2.536 E-12 |
| 2500 | 0.98 | 2 | 1.193 E-12 | 2 445 999 556 029 | 8.941 E-13 |
| 3000 | 0.98 | 2 | 4.209 E-13 | 2 445 999 556 030 | 3.156 E-13 |
| 3500 | 0.98 | 2 | 1.487 E-13 | 2 445 999 556 030 | 1.116 E-13 |
| 4000 | 0.98 | 2 | 5.262 E-14 | 2 445 999 556 030 | 3.946 E-14 |
| 4500 | 0.99 | 2 | 1.699 E-14 | 2 445 999 556 030 | 1.274 E-14 |
| 5000 | 0.99 | 2 | 5.274 E-15 | 2 445 999 556 030 | 3.956 E-15 |
| 6000 | 0.99 | 2 | 6.524 E-16 | 2 445 999 556 030 | 4.893 E-16 |
| 7000 | 0.99 | 2 | 8.524 E-17 | 2 445 999 556 030 | 6.393 E-17 |
| 8000 | 0.99 | 2 | 1.196 E-17 | 2 445 999 556 030 | 8.969 E-18 |
| 9000 | 0.99 | 2 | 3.236 E-18 | 2 445 999 556 030 | 2.427 E-18 |
| 10000 | 0.99 | 3 | 1.222 E-17 | 2 445 999 556 030 | 8.144 E-18 |
| 13900 | 0.99 | 2 | 3.144 E-20 | 2 445 999 556 030 | 2.358 E-20 |

## 3.6 Références


[1] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory*, volume 74 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1980. [page 52]

[2] Pierre Dusart. Estimates of $\psi$, $\theta$ for large values of $x$ without the Riemann hypothesis. *Mathematics of Computation*, 85(298) :875–888, 2016. [page 61]

[3] Pierre Dusart. Estimates of some functions over primes. *Ramanujan Journal*, 45 :227–251, 2018. [page 59, 61]

[4] Laura Faber and Habiba Kadiri. New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 84(293) :1339–1357, 2015. See corrigendum [5]. [page 50, 63]

[5] Laura Faber and Habiba Kadiri. Corrigendum to New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 87(311) :1451–1455, July 2018. See [4]. [page 50, 63]

[6] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, and R.A. Silverman. *Calculus of Variations*. Raymond F. Boyer Library Collection. Prentice-Hall, 1963. [page 58]

[7] Habiba Kadiri. Une région explicite sans zéro pour la fonction zeta de Riemann. 2004. [page 49]

[8] Habiba Kadiri. Une région explicite sans zéros pour la fonction $\zeta$ de Riemann. *Acta Arith.*, 117(4) :303–339, 2005. [page 49]

[9] Habiba Kadiri. A zero density result for the Riemann zeta function. *Acta Arith.*, 160(2) :185–200, 2013. [page 49]

[10] Wolfram Koepf. *Hypergeometric summation : an algorithmic approach to summation and special function identities; 2nd ed.* Universitext. Springer, London, 2014. [page 58]

[11] Michael J. Mossinghoff and Timothy S. Trudgian. Nonnegative trigonometric polynomials and a zero-free region for the Riemann zeta-function. *Journal of Number Theory*, 157 :329–349, 2015. [page 49]

[12] Andrew M. Odlyzko. Tables of zeros of the Riemann zeta function. http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/. [page 53]

[13] R. B. Paris and D. Kaminski. *Frontmatter*, pages i–vi. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2001. [page 50]

[14] O. Ramaré. An explicit density estimate for Dirichlet L-series. *Math. Comp.*, 85(297) :325–356, 2016. [page 49]

[15] Olivier Ramaré and Yannick Saouter. Short effective intervals containing primes. *Journal of Number Theory*, 98(1) :10 – 33, 2003. [page 58]

[16] John Barkley Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *Am. J. Math.*, 63 :211–232, 1941. [page 59, 60]

[17] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 29(129) :243–269, January 1975. [page 53, 54, 55, 56, 60]

# Chapitre 4

# Estimations explicites de $\psi(x)$ sous l'hypothèse de Riemann

## 4.1 Introduction

Pour étudier la distribution des nombres premiers, Riemann a étendu la fonction zêta d'Euler (définie juste pour $s$ avec une partie réelle supérieure à un)

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

au plan complexe entier (sauf le pôle simple à $s = 1$ avec le résidu un). Riemann a noté que sa fonction zêta avait des zéros triviaux à -2, -4, -6, ..., que tous les zéros non triviaux étaient symétriques autour de la droite $\Re e\, s = 1/2$ et que les quelques zéros qu'il a calculés étaient sur cette droite. L'hypothèse de Riemann est que tous les zéros non triviaux sont sur cette droite. Prouver l'hypothèse de Riemann nous permettrait d'affiner considérablement de nombreux résultats théoriques numériques. Ainsi, deux types de résultats coexistent en supposant ou non l'hypothèse de Riemann (RH). En 1901, von Koch [25] a montré que l'hypothèse de Riemann équivaut à

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{1/2} \ln x) \tag{4.1}$$

où $\pi(x)$ est la fonction qui compte les nombres premiers et $\mathrm{li}(x)$ est la fonction logarithme intégral. Sans s'appuyer sur l'hypothèse de Riemann, des résultats explicites sont montrés quarante ans plus tard avec Rosser [19]. Schoenfeld [23] a continué à travailler en ajoutant une section sous RH. Il a montré que pour $x \geq 2657$,

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| < \frac{1}{8\pi} x^{1/2} \ln x.$$

Nous donnons des bornes légèrement plus précises en montrant dans la proposition 73 que, pour $x \geq 5639$,

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| < \frac{1}{8\pi} x^{1/2} \ln(x/\ln x).$$

Un résultat équivalent sur le $k^{\text{ième}}$ prime $p_k$ semble ne jamais être publié avant un résultat explicite donné dans [1], contrairement à des résultats plus prolifiques sur $p_k$ sans RH qui ont commencé avec Rosser [18], mis à jour par Rosser et Schoenfeld [20, 21], Robin [15], Massias [12] et Dusart [5, 6, 7, 8]. Robin [15, Théorème 3] a exprimé une formulation équivalente de (4.1) avec

$$p_k = \mathrm{li}^{-1}(k) + O(k^{1/2}\ln^{5/2} k). \tag{4.2}$$

La constante impliquée dans la notation en grand O a été estimée [1] en 2013 par Arias de Reyna et Toulisse, avec le résultat suivant

$$|p_k - \mathrm{li}^{-1}(k)| \le \frac{1}{\pi} k^{1/2}\ln^{5/2} k.$$

Nous mettons à jour ce résultat avec le Corollaire 75 en gardant la constante $1/(8\pi)$ de Schoenfeld :

$$|p_k - \mathrm{li}^{-1}(k)| < \frac{1}{8\pi} k^{1/2}\ln^{5/2}(k\ln k) \quad \text{pour } k \ge 230.$$

Nous concluons cette partie en donnant les bornes inférieure et supérieure de $p_k$ par rapport à son développement asymptotique (Théorème 77). Dans la section 4.4, nous donnons des bornes sur les sommes sur les réciproques premiers (Théorèmes 80 et 82) et sur certains produits principaux (Théorème 84). Ces résultats ont été publiés dans [9].

## 4.2 Borne supérieure de la différence entre $\pi(x)$ et $\mathrm{li}(x)$.

### 4.2.1 Fonction Logarithme intégral versus $\frac{x}{\ln x}$

Le logarithme intégral est défini pour tous les nombres réels positifs $x > 1$ par $\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right)$.

**Lemme 68.** *Nous avons respectivement pour $x \ge 3.85$ et $x > 1$,*

$$\frac{x}{\ln x} \le \mathrm{li}(x) \le 1.4841\frac{x}{\ln x}.$$

*Démonstration.* Nous comparons les dérivées. La borne inférieure est valide à partir de $x_0 = 3.84646$, solution de l'équation $\mathrm{li}(x_0) = \frac{x_0}{\ln x_0}$. Le maximum de $\mathrm{li}(x)/(x/\ln(x))$ est atteint pour $x \approx 21.451$ avec la valeur $1.4840808\cdots$.

□

### 4.2.2 Petites valeurs de $x$ : utilisation de $R(x)$

Nous introduisons $\pi_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi(x-\varepsilon)+\pi(x+\varepsilon)}{2}$ et $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{li}(x^{1/n})$ où $\mu(n)$ est la fonction de Möbius. L'amplitude de la différence entre ces fonctions est heuristiquement d'environ $\sqrt{x}/\ln x$, donc les fluctuations de la distribution des nombres premiers peuvent être clairement représentées avec la fonction $\Delta$ :

$$\Delta(x) = \left(\pi_0(x) - R(x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\ln x}\right)\frac{\ln x}{\sqrt{x}}. \tag{4.3}$$

Les valeurs minimales et maximales de $\Delta(x)$ sont données [11] par intervalles jusqu'à $10^{20}$.

**Lemme 69.** *Nous avons pour $2 \le x \le 10^{20}$,*

$$\mathrm{li}(x) - 3\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \le \pi(x) \le \mathrm{li}(x).$$

*Démonstration.* En étudiant les dérivées, nous montrons que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{li}(x^{1/n})$$

est une fonction croissante pour $x \geq 3$, supérieure à $f(3) > 0$ mais inférieure à $\frac{1}{5}\mathrm{li}(x^{1/5})$ pour $x \geq 8$ (cf. Annexe A de [24]). Par (4.3), nous avons pour $x \geq 8$

$$\begin{aligned}
\pi(x) - \mathrm{li}(x) &\leq -\frac{1}{2}\mathrm{li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\mathrm{li}(x^{1/3}) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right)\mathrm{li}(x^{1/5}) + \max_{x\in[2..10^{20}]} \Delta(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \\
&\leq \frac{\max \Delta(x)}{2} \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} - \frac{1}{2}\mathrm{li}(\sqrt{x}) \\
&\leq \left(\frac{\max \Delta(x)}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} \text{ par le lemme 68} \\
&\leq \left(\frac{0.734}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} \leq 0 \text{ par [11]}.
\end{aligned}$$

Ce résultat est aussi prouvé par [14] sous une forme analytique jusqu'à $1.39 \cdot 10^{17}$.

Nous produisons la borne inférieure de la même manière :

$$\begin{aligned}
\pi(x) - \mathrm{li}(x) &\geq -\frac{1}{2}\mathrm{li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\mathrm{li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\mathrm{li}(x^{1/5}) + \min_{x\in[2..10^{20}]} \Delta(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \\
&\geq -1.4841\left(\frac{1}{2} \cdot 2\frac{\sqrt{x}}{\ln x} + \frac{x^{1/3}}{\ln x} + \frac{x^{1/5}}{\ln x}\right) - 0.84\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \text{ par le lemme 68} \\
&\geq -3\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \text{ pour } x \geq 900.
\end{aligned}$$

Nous terminons la preuve par un test informatique (le minimum est atteint pour $x_0 = 223^-$). □

**Lemme 70.** *Nous avons pour* $2 \leq x \leq 10^{20}$,

$$|\theta(x) - x| \leq 3\sqrt{x}.$$

*Démonstration.* Par [20, (2.26)],

$$\theta(x) = x - 2 + \mathrm{li}(2)\ln 2 + (\pi(x) - \mathrm{li}(x))\ln x - \int_2^x \frac{\pi(y) - \mathrm{li}(y)}{y} \mathrm{d}y.$$

Ainsi par le lemme 69, $\theta(x) \leq x + \int_2^x \frac{3}{\sqrt{y}\ln y}\mathrm{d}y \leq x + \int_2^x \frac{3}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ pour $x \geq 30$. Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\theta(x) &\geq x - 2 + \mathrm{li}(2)\ln 2 + (\pi(x) - \mathrm{li}(x))\ln x - \int_2^9 \frac{\pi(y) - \mathrm{li}(y)}{y} \mathrm{d}y \text{ pour } x \geq 9. \\
&\geq x - 3\sqrt{x} \text{ par le lemme 69.}
\end{aligned}$$

Grâce au Théorème 18 de [20], nous en déduisons que cet encadrement est encore valable pour les petites valeurs de $x$. □

**Lemme 71.** *[13, Lemme 2.4] Sous l'hypothèse de Riemann, pour* $x \geq 0$,

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) < \sqrt{x} + \frac{4}{3}x^{1/3}.$$

*Démonstration.* En combinant la relation

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x^{1/n}) = \sum_{n=1}^{\lceil \log_2 x \rceil} \theta(x^{1/n})$$

avec les bornes [23, (6.3) duThéorème 10] pour $\theta$, nous obtenons

$$\psi(x) - \theta(x) = \sqrt{x} + x^{1/3} + S(x) \quad \text{avec } S(x) = O(x^{1/4} \ln^2 x).$$

Une étude rigoureuse de $S(x)$ nous montre que $S(x) < x^{1/3}/3$ avec un maximum pour $x = 80089$. La différence $\psi(x) - \theta(x)$ est trivialement supérieure à zéro, et même supérieure à $\sqrt{x}$ par [13]. □

### 4.2.3 Méthode de Schoenfeld pour $\vartheta(x)$

Cette partie nous permet d'améliorer légèrement les résultats [23] de Schoenfeld en incorporant un terme secondaire. Il faut également signaler le travail [2] de Büthe qui montre que ce type d'inégalités est valide jusqu'à une certaine borne en vérifiant l'hypothèse de Riemann jusqu'à une certaine hauteur H.

**Proposition 72.** *Sous l'hypothèse de Riemann, nous avons les inégalités suivantes :*

$$|\theta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2\left(\frac{x}{\ln x}\right) \text{ pour } 7477 \leq x \leq 10^{20} \text{ et } x \geq e^{78}, \tag{4.4}$$

$$|\theta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}(\ln x - \ln\ln x - 2)\ln x \text{ pour } x \geq 11777. \tag{4.5}$$

*Démonstration.* Par le lemme 8 p.257 de [21], nous avons sous R.H.

$$\frac{1}{x}|\psi(x) - (x - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(1 - x^{-2}))| \leq (S_1 + S_2)/\sqrt{x} + m\delta/2,$$

où les sommes $S_1$ et $S_2$ courent sur les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta$

$$S_1 = 2\sum_{0<\gamma\leq T_1} \frac{2 + m\delta}{2|\rho|} \tag{4.6}$$

$$S_2 = 2\sum_{\gamma>T_1} \frac{R_m(\delta)}{\delta^m|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} \tag{4.7}$$

avec $R_m(\delta) = ((1+\delta)^{m+1} + 1)^m$.

Comme [23], nous choisissons $T_1 = \frac{1}{\delta}\left(\frac{2R_m(\delta)}{2+m\delta}\right)^{1/m}$, $m = 1$. Nous ajustons la valeur de $\delta$ en choisissant $\delta = \frac{\ln(x/2)}{\pi\sqrt{x}}$. Par le lemme 9 of [21], nous avons

$$S1 + S2 < \frac{2+\delta}{4\pi}\left((\ln\frac{T_1}{2\pi} + 1)^2 + 1.04\right)$$

avec $\ln\frac{T_1}{2\pi} + 1 = \frac{1}{2}\ln x - \ln\ln x + \ln\left(1 + \frac{\delta+\delta^2}{2+\delta}\right) + 1$. Il vient que $(S_1+S_2)/\sqrt{x} + \delta/2$ peut être borné par une fonction d'une variable unique $x$. Il est alors facile de l'étudier. Nous ajoutons une fonction majorant la différence entre $\psi$ et $\theta$ (Lemme 71) pour obtenir une fonction désignée par $\varepsilon(x)$ telle que $|\theta(x) - x| \leqslant x\varepsilon(x)$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x)\cdot\sqrt{x} &= \frac{1}{8\pi}\left(\ln^2 x - 4(\ln x)(\ln\ln x)\right) + O(\ln x) \\
&\leq \frac{1}{8\pi}\ln^2\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \text{pour } x \geq e^{78} \text{ ou,} \\
&\leq \frac{1}{8\pi}(\ln x - \ln\ln x - 2)\ln x \quad \text{pour } x \geq e^{44.2}.
\end{aligned}$$

Nous concluons la preuve pour les petites valeurs par l'utilisation du lemme 70. □

**Proposition 73.** *Si l'hypothèse de Riemann est valide, alors*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \ln\left(\frac{x}{\ln x}\right) \text{ si } 5639 \leq x.$$

*Démonstration.* Soit $x \geq a > 1$ tel que $|\theta(x) - x| \leq x\varepsilon(x)$ pour $x \geq a$. Nous avons

$$\pi(x) - \pi(a) = \frac{\theta(x)}{\ln x} - \frac{\theta(a)}{\ln a} + \int_a^x \frac{\theta(t) - t}{t \ln^2 t} \mathrm{d}t + \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t}.$$

Soit $\mathrm{C}(a) = \{\mathrm{li}(a) - \pi(a)\} - \{a - \theta(a)\}/\ln a$. Ensuite, par intégration [20, (7.6)] par parties,

$$\begin{aligned} |\pi(x) - \mathrm{li}(x)| &= \left| \frac{\theta(x) - x}{\ln x} + \int_a^x \frac{\theta(t) - t}{t \ln^2 t} \mathrm{d}t - \mathrm{C}(a) \right| \\ &\leq x\varepsilon(x)/\ln x + \int_a^x \frac{\varepsilon(t)}{\ln^2 t} \mathrm{d}t + |\mathrm{C}(a)| \end{aligned}$$

Avec $a = 11777$ et $\varepsilon(x)$ donnés par (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} |\pi(x) - \mathrm{li}(x)| &\leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\left(\ln\left(\frac{x}{\ln x}\right) - 2\right) + \frac{1}{8\pi}\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{8\pi}\int_a^x \frac{\ln\ln t + 2}{\sqrt{t}\ln t} \mathrm{d}t + |\mathrm{C}(a)| \\ &\leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \frac{1}{4\pi}\sqrt{a} + |\mathrm{C}(a)| \end{aligned}$$

Nous avons $|\mathrm{C}(a)| - \frac{1}{4\pi}\sqrt{a} \leq 0$. Nous complétons la preuve par le lemme 69. □

## 4.3 Fonction réciproque du logarithme intégral

### 4.3.1 Développement asymptotique du $k^{\text{ième}}$ nombre premier

Désignons $\ln\ln x$ par $\ln_2 x$. Le développement asymptotique de $p_k$ est bien connu; sous R.H., l'expression de $p_k$ est $\mathrm{li}^{-1}(k) + \mathrm{O}(\sqrt{k}\ln^{5/2} k)$ by [15, Theorem 3]. Cesaro [3] puis Cipolla [4] donnent les premiers termes du développement en 1902 :

$$p_k = k\left\{\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\ln_2^2 k - 6\ln_2 k + 11}{2\ln^2 k} + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\ln_2 k}{\ln k}\right)^3\right)\right\}. \tag{4.8}$$

Une étude plus approfondie sur ce développement explicite peut être trouvée dans [17, 22].

**Théorème 74.** *Sous l'hypothèse de Riemann, nous avons l'encadrement*

$$|p_k - \mathrm{li}^{-1}(k)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{k\ln k}\ln^2(k\ln k) \text{ pour } k \geq 464.$$

**Corollaire 75.** *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors*

$$|p_k - \mathrm{li}^{-1}(k)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{k}\ln^{5/2}(k\ln k) \text{ pour } k \geq 230.$$

**Lemme 76.** *Respectivement pour $x > 40.23$ et $x > 3.28$, nous avons*

$$x\ln x < \mathrm{li}^{-1}(x) < x\ln(x\ln x).$$

*Démonstration.* L'inégalité sur la borne inférieure est équivalente à

$$\mathrm{li}(x\ln x) < x.$$

Par dérivation de la fonction $f(x) := \mathrm{li}(x\ln x) - x$, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{1-\ln\ln x}{\ln(x\ln(x))}.$$

Nous avons $f'(x) < 0$ for $x > e^e$ et $f(x) < 0$ pour $x > 40.23$.

De façon similaire, $\mathrm{li}(x\ln(x\ln x)) > x$ pour $x > 3.28$. □

Pour la preuve du théorème 74, nous utiliserons les mêmes idées que celles de [1, Théorème 6.1].

*Preuve du Théorème 74.* Soit $\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\ln\left(\frac{x}{\ln x}\right)$, $\mathrm{M}(x) = \mathrm{li}(x) + \varepsilon(x)$, $m(x) = \mathrm{li}(x) - \varepsilon(x)$ et $r(k) = \frac{1}{8\pi}\sqrt{k\ln k}\ln^2(k\ln k)$. Nous supposons l'hypothèse de Riemann vraie. De la proposition 73 pour $p_k \geq 5639$, nous avons $\mathrm{M}^{-1}(k) < p_k < m^{-1}(k)$. Il vient que $|p_k - \mathrm{li}^{-1}(k)| \leq \max\left(m^{-1}(k) - \mathrm{li}^{-1}(k), \mathrm{li}^{-1}(k) - \mathrm{M}^{-1}(k)\right)$. Soit $(\alpha, k)$ deux paramètres liés par $\alpha = \mathrm{li}^{-1}(k)$ (ou $\mathrm{li}(\alpha) = k$). Soit $\Delta_1(x) = m(x) - \mathrm{li}(\alpha)$. Nous avons $\Delta_1(\alpha) < 0$ et

$$\begin{aligned}\Delta_1(\alpha + r(k)) &= \int_\alpha^{\alpha+r(k)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \varepsilon(\alpha + r(k)) \\ &> \frac{r(k)}{\ln(\alpha + r(k))} - \varepsilon(\alpha + r(k)).\end{aligned}$$

Comme $\alpha = \mathrm{li}^{-1}(k) < k\ln(k\ln k)$ par le lemme 76, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta_1(\alpha + r(k)) &> \frac{r(k)}{\ln(k\ln(k\ln k) + r(k))} - \varepsilon(k\ln(k\ln k) + r(k)) \\ &= \frac{1}{16\pi}\sqrt{k\ln k}\ln\ln k + o(\sqrt{k\ln k}\ln\ln k) \\ &> 0 \text{ pour } k > 3.09.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons trouvé un point $\beta = \alpha + r(k)$ pour lequel $\Delta_1(\beta) > 0$ et tel que $\Delta_1(m^{-1}(k)) = m(m^{-1}(k)) - \mathrm{li}(\alpha) = k - \mathrm{li}(\alpha) = 0$, ainsi $\alpha < m^{-1}(k) < \beta$. Il vient que $m^{-1}(k) - \mathrm{li}^{-1}(k) < r(k)$.

Ensuite prenons $\Delta_2(x) = \mathrm{M}(x) - \mathrm{li}(\alpha)$. Nous avons $\Delta_2(\alpha) > 0$ pour $\alpha > 1$ et

$$\begin{aligned}\Delta_2(\alpha - r(k)) &= \varepsilon(\alpha - r(k)) - \int_{\alpha-r(k)}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \\ &< \varepsilon(\alpha) - \frac{r(k)}{\ln(\alpha)}.\end{aligned}$$

Comme $\alpha = \mathrm{li}^{-1}(k) < k\ln(k\ln k)$ par le lemme 76, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta_2(\alpha - r(k)) &< \varepsilon(k\ln(k\ln k)) - \frac{r(k)}{\ln(k\ln(k\ln k))} \\ &= -\frac{1}{16\pi}\sqrt{k\ln k}\ln\ln(k) + o(\sqrt{k\ln k}\ln\ln k) \\ &< 0 \text{ pour } k > e.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons trouvé un point $\beta = \alpha - r(k)$ pour lequel $\Delta_2(\beta) < 0$ et comme

$$\Delta_2(\mathrm{M}^{-1}(k)) = \mathrm{M}(\mathrm{M}^{-1}(k)) - \mathrm{li}(\alpha) = k - \mathrm{li}(\alpha) = 0,$$

nous avons $\beta < \mathrm{M}^{-1}(k) < \alpha$. Il vient que $|\mathrm{li}^{-1}(k) - \mathrm{M}^{-1}(k)| < r(k)$. □

### 4.3.2 Bornes sur $p_k$

**Théorème 77.** *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors*

$$k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln_2 k-2}{\ln k}-\frac{\ln_2^2 k}{2\ln^2 k}\right) \leq p_k \quad \textit{pour } k\geq 2, \tag{4.9}$$

$$p_k \leq k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln_2 k-2}{\ln k}-\frac{\ln_2^2 k-6\ln_2 k}{2\ln^2 k}\right) \textit{ for } k\geq 3468. \tag{4.10}$$

*Démonstration.* On suppose que la différence entre $\pi(x)$ et $\mathrm{li}(x)$ est encadrée par une fonction $\varepsilon(x)$ : nous avons $-\varepsilon(p_k)\leq \pi(p_k)-\mathrm{li}(p_k)\leq \varepsilon(p_k)$. Comme la fonction inverse de $\mathrm{li}(x)$ est une fonction croissante, nous avons les encadrements suivants pour $p_k$ : $\mathrm{li}^{-1}(k-\varepsilon(p_k))\leq p_k\leq \mathrm{li}^{-1}(k+\varepsilon(p_k))$. De plus, en utilisant une borne supérieure [20] pour $p_k$, on cherche deux fonctions $m(k)$ et $\mathrm{M}(k)$ telles que $m(k)\leq \mathrm{li}^{-1}(k-\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k)))$ et $\mathrm{li}^{-1}(k+\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k)))\leq \mathrm{M}(k)$. Soit $m(k)$ le côté gauche de (4.9), $\mathrm{M}(k)$ le côté droit de (4.10) et $\varepsilon(x)$ la fonction de la borne supérieure de la proposition 73. Pour simplifier, nous étudions si $\mathrm{li}(m(k))\leq k-\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k))$ et $k+\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k))\leq \mathrm{li}(\mathrm{M}(k))$. Avec Maple, un système de calcul formel, nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(\mathrm{M}(k)) &= k+\frac{11}{2}\frac{k}{\ln^3 k}+o(k/\ln^3 k)\\ &\geq k+\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k))\text{pour} k\geq e^{14.8}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(m(k)) &= k-3k\frac{\ln\ln k}{\ln^3 k}+o(k\ln\ln k/\ln^3 k)\\ &\leq k-\varepsilon(k(\ln k+\ln_2 k))\text{pour} k\geq e^{17,75}.\end{aligned}$$

On obtient le théorème avec une vérification informatique sur les petites valeurs. □

On peut penser que l'expansion asymptotique partielle de $\mathrm{li}^{-1}(k)$ pour la borne inférieure de $p_k$ est toujours valide à partir de $k=2$. Dans [1], les auteurs montrent que la borne inférieure basée sur le développement asymptotique mentionné dans (4.8) arrêté après le terme $\frac{11k}{2\ln^2 k}$ est valide pour $k\geq r_3\sim 3,9\cdot 10^{30}$. En fait, l'intervalle de validité de cette borne inférieure semble être quelque chose comme $[2,1910806]\cup\{...\}\cup[r_3,\infty[$. Donc (4.9) est la borne inférieure la plus précise modélisée sur le développement asymptotique et valable pour $k\geq 2$.

## 4.4 Applications

Dans cette section, nous mettons à jour les résultats [23, Corollaires 2 & 3] de Schoenfeld. Ici et dans tout la suite, $f(x)=\mathcal{O}^*\left(g(x)\right)$ signifie $|f(x)|\leqslant g(x)$.

Commençons par deux résultats dûs à Guy Robin :

**Lemme 78** (Lemme 1 [16])**.** *Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\rho\in\mathbb{C}$,*

$$\mathrm{F}_{\rho,n}(x)=\int_x^\infty \frac{x^\rho}{t^{n+1}}\frac{n(\ln t+1)}{\ln^2(t)}\mathrm{d}t.$$

*Si* $\Re\mathrm{e}(\rho) = 1/2$ *alors*

$$\mathrm{F}_{\rho,n}(x) = \frac{n}{n-\rho}\frac{x^{\rho-n}}{\ln n} + r_{\rho,n}(x)$$

*avec*

$$|r_{\rho,n}(x)| \leqslant \frac{1}{|\rho|}\frac{1}{x^{n-1/2}\ln^2 x}\left(1+\frac{4}{(2n-1)\ln x}\right).$$

*Démonstration.* Par intégration par parties,

$$\int_x^\infty \frac{x^\rho}{t^{n+1}}\frac{n(\ln t+1)}{\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{n}{n-\rho}\frac{x^{\rho-n}}{\ln n} + \frac{\rho}{(\rho-n)^2}\left(-\frac{x^{\rho-n}}{\ln^2 x} + 2\int_x^\infty \frac{t^{\rho-n-1}}{\ln^3 t}\mathrm{d}t\right)$$

□

**Proposition 79** (Lemme 4 [16])**.** *Sous l'hypothèse de Riemann,*

$$\begin{aligned}\int_x^\infty \frac{(\theta(t)-t)(\ln t+1)}{(t\ln t)^2}\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad & \frac{0.0462}{x^{1/2}\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{4}{\ln^2 x}\right)+\frac{\ln 2\pi}{x\ln x} \\ & +\frac{2}{\sqrt{x}\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}+\frac{4}{\ln^2(x)}+\frac{1}{x^{1/6}}\right).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons $\theta(x) = x+\varepsilon_1(x)$ et $\psi(x) = x+\varepsilon_2(x)$. Comme $\varepsilon_1(x) = \theta(x)-x = \theta(x)-(\psi(x)-\varepsilon_2(x))$, cette dernière intégrale peut s'exprimer par

$$\int_x^\infty \frac{\varepsilon_1(t)(\ln t+1)}{(t\ln t)^2}\mathrm{d}t = \mathrm{I}_1(x)-\mathrm{I}_2(x)$$

où

$$\mathrm{I}_1(x) = \int_x^\infty \frac{\varepsilon_2(t)(\ln t+1)}{(t\ln t)^2}\mathrm{d}t,$$

et

$$\mathrm{I}_2(x) = \int_x^\infty \frac{(\psi(t)-\theta(t))(\ln t+1)}{(t\ln t)^2}\mathrm{d}t.$$

Pour majorer $\mathrm{I}_1$, on reprend une formule explicite classique en théorie des nombres $\psi(x) = x-\ln 2\pi-\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}-\frac{1}{2}\ln(1-1/x^2)$ sous la forme

$$\int_x^\infty f_n(t)(\psi(t)-t+\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t = -\int_x^\infty \sum_\rho f_n(t)\frac{t^\rho}{\rho}\mathrm{d}t$$

et en prenant $f_n(t) = \frac{n(\ln t+1)}{t^{n+1}\ln^2 t}$ (dérivée de $-1/(t^n\ln t)$), on a $f_n'(t) = \mathrm{O}(\frac{1}{t^3\ln t})$ pour $n \geqslant 1$ et ainsi inverser les signes somme et intégrale par le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$\mathrm{I}_1(x) = -\left(\sum_\rho \int_x^\infty f_1(t)\frac{t^\rho}{\rho}\mathrm{d}t\right)-\int_x^\infty f_1(t)(\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t.$$

$\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2) < 0$ et $|\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2)| < \ln 2\pi$ ainsi

$$-\int_x^\infty f_n(t)(\ln 2\pi)\mathrm{d}t < -\int_x^\infty f_n(t)(\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t < 0$$

Ainsi

$$0 < \int_x^\infty f_n(t)(\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln 2\pi}{x^n\ln x}.$$

D'autre part, d'après le lemme 78,

$$-\left(\sum_{\rho}\int_{x}^{\infty} f_n(t)\frac{t^{\rho}}{\rho}\mathrm{d}t\right)=\sum_{\rho}\frac{n}{\rho(\rho-n)}\frac{x^{\rho-n}}{\ln x}-\sum_{\rho}\frac{r_{\rho}(x)}{\rho}$$

Soit

$$\frac{n}{x^{n-1/2}\ln x}\sum_{\rho}\frac{x^{i\,\Im\mathrm{m}(\rho)}}{\rho(\rho-n)}-\sum_{\rho}\frac{r_{\rho}(x)}{\rho}$$

et $|\sum_{\rho}\frac{x^{i\,\Im\mathrm{m}(\rho)}}{\rho(\rho-n)}|\leqslant\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}=\gamma+2-\ln 4\pi\leqslant 0.0462$. Ainsi, la formule appliquée pour $n=1$,

$$|\mathrm{I}_1(x)|\leqslant\frac{0.0462}{x^{1/2}\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{4}{\ln^2 x}\right)+\frac{\ln 2\pi}{x\ln x}.$$

Pour majorer $\mathrm{I}_2$, un encadrement de la différence $\psi-\theta$ est utilisé : d'après le lemme 3 de [16], sous l'hypothèse de Riemann, pour $x\geqslant 121$,

$$\sqrt{x}<\psi(x)-\theta(x)<\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{1/3}.$$

Ainsi, avec les notations du lemme 78,

$$\mathrm{I}_2(x)\leqslant\mathrm{F}_{1/2,1}(x)+\frac{4}{3}\mathrm{F}_{1/3,1}(x).$$

De plus, $\mathrm{F}_{1/2,1}(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}\ln x}-\frac{2}{\sqrt{x}\ln^2 x}+\frac{8}{\sqrt{x}\ln^3 x}$ et $\mathrm{F}_{1/3,1}(x)\leqslant\frac{3}{2x^{2/3}\ln x}$. Par suite,

$$\mathrm{I}_2(x)\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}+\frac{4}{\ln^2(x)}+\frac{1}{x^{1/6}}\right).$$

□

### 4.4.1 Somme des inverses des nombres premiers

**Théorème 80.** *Soit* $\mathrm{M}=0.261497\cdots$, *la constante de Meissel-Mertens (séquence A077761 de OEIS). Si l'hypothèse de Riemann est vraie, alors nous avons pour* $x\geqslant 1628.6$,

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+\mathrm{M}+\mathcal{O}^*\left(\frac{\ln(x/\ln x)}{8\pi\sqrt{x}}\right).$$

*Démonstration.* La somme des inverses des nombres premiers est reliée à $\theta(x)$ par (4.20) de [20],

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln_2 x+\mathrm{M}+\frac{\theta(x)-x}{x\ln x}-\int_x^{\infty}\frac{(\theta(y)-y)(1+\ln y)}{y^2\ln^2 y}\mathrm{d}y.$$

Définissons $\mathrm{Z}_1$ par

$$\mathrm{Z}_1=\left|\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}-\ln_2 x-\mathrm{M}\right|. \tag{4.11}$$

Comme

$$\mathrm{Z}_1\leqslant\frac{|\theta(x)-x|}{x\ln x}+\int_x^{\infty}\frac{|\theta(y)-y|(1+\ln y)}{y^2\ln^2 y}\mathrm{d}y. \tag{4.12}$$

nous avons pour $x \geq 10^{11}$ par la proposition 72 et la proposition 79,

$$\begin{aligned} Z_1 &\leq \frac{1}{8\pi}\frac{\ln x - \ln\ln x - 2}{\sqrt{x}} + I_1(x) + I_2(x) \\ &\leq \frac{1}{8\pi}\frac{\ln(x/\ln x)}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

avec $I_1(x)$ et $I_2(x)$ définies dans la preuve de la proposition 79. On vérifie par calcul direct jusqu'à $10^{11}$ que les bornes restent valides pour $Z_1$. □

**Proposition 81.** *Sous l'hypothèse de Riemann,*

$$\int_x^\infty \frac{\theta(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{0.0462}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} + \frac{\ln 2\pi}{x}.$$

*Démonstration.* Nous cherchons à évaluer

$$\int_x^\infty \frac{\theta(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_x^\infty \frac{\theta(t)-\psi(t)+\psi(t)-t}{t^2}\mathrm{d}t = I_1(x) - I_2(x)$$

où

$$I_1(x) = \int_x^\infty \frac{\theta(t)-\psi(t)}{t^2}\mathrm{d}t,$$

et

$$I_2(x) = \int_x^\infty \frac{\psi(t)-\theta(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Pour majorer $I_1$, on reprend une formule explicite classique en théorie des nombres $\psi(x) = x - \ln 2\pi - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\ln(1-1/x^2)$ sous la forme

$$\int_x^\infty f(t)(\psi(t) - t + \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t = -\int_x^\infty \sum_\rho f(t)\frac{t^\rho}{\rho}\mathrm{d}t$$

et en prenant $f(t) = \frac{1}{t^2}$, on a $f'(t) = O(\frac{1}{t^3})$ pour $n \geqslant 1$ et ainsi inverser les signes somme et intégrale par le théorème de convergence dominée. Ainsi

$$I_1(x) = -\left(\sum_\rho \int_x^\infty f(t)\frac{t^\rho}{\rho}\mathrm{d}t\right) - \int_x^\infty f(t)(\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t.$$

Pour $t \geqslant 2$, $0 < -\frac{1}{2}\ln(1-1/t^2) < \ln 2\pi$ ainsi pour $x \geqslant 2$,

$$-\int_x^\infty f(t)(\ln 2\pi)\mathrm{d}t < -\int_x^\infty f(t)(\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t < 0$$

Ainsi

$$0 < \int_x^\infty f(t)(\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln(1-1/t^2))\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln 2\pi}{x}.$$

D'autre part,

$$-\left(\sum_\rho \int_x^\infty f(t)\frac{t^\rho}{\rho}\mathrm{d}t\right) = \sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)}$$

Soit, sous l'hypothèse de Riemann

$$\frac{1}{x^{1/2}}\sum_\rho \frac{x^{i\,\Im\mathrm{m}(\rho)}}{\rho(\rho-1)}$$

et $|\sum_\rho \frac{x^{i\,\Im m(\rho)}}{\rho(\rho-1)}| \leqslant \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} = \gamma + 2 - \ln 4\pi \leqslant 0.0462$. Ainsi nous avons,

$$|I_1(x)| \leqslant \frac{0.0462}{x^{1/2}} + \frac{\ln 2\pi}{x}.$$

Pour majorer $I_2$, un encadrement de la différence $\psi - \theta$ est utilisé : d'après le lemme 3 de [16], sous l'hypothèse de Riemann, pour $x \geqslant 121$,

$$\sqrt{x} < \psi(x) - \theta(x) < \sqrt{x} + \frac{4}{3}x^{1/3}.$$

Ainsi,

$$\int_x^\infty \frac{\sqrt{t} + 4/3\sqrt[3]{t}}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t^{2/3}}\right]_x^\infty.$$

Par suite,

$$I_2(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^{2/3}}.$$

□

**Théorème 82.** *Soit* $B_3$ *(séquence A083343 dans OEIS) la constante donnée par la somme infinie*

$$B_3 = \gamma + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_p (\ln p)/p^n \approx 1.332582275733221.$$

*En supposant l'hypothèse de Riemann, nous avons pour* $x \geqslant 1674,5$,

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} = \ln x - B_3 + \mathcal{O}^*\left(\frac{\ln(x/\ln x)}{8\pi\sqrt{x}}\ln x\right). \tag{4.13}$$

*Démonstration.* Par [20, (4.21)],

$$\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p} = \ln x - B_3 + \frac{\theta(x)-x}{x} - \int_x^\infty \frac{\theta(y)-y}{y^2}\mathrm{d}y.$$

Définissons $Z_2$ par

$$Z_2 = |\sum_{p\leq x}\frac{\ln p}{p} - \ln x + B_3|. \tag{4.14}$$

Donc nous obtenons par la proposition 81,

$$\begin{aligned} Z_2 &\leqslant \frac{|\theta(x)-x|}{x} + \int_x^\infty \frac{\theta(y)-y}{y^2}\mathrm{d}y \leqslant \frac{\ln x}{8\pi\sqrt{x}}(\ln(x/\ln x)-2) + \int_x^\infty \frac{\theta(y)-y}{y^2}\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\ln x}{8\pi\sqrt{x}}(\ln(x/\ln x)-2) + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{0.0462}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} + \frac{\ln 2\pi}{x} \leq \frac{\ln x}{8\pi\sqrt{x}}\ln(x/\ln x), \end{aligned}$$

dernière inégalité valable pour $x \geq 2.04\cdot 10^{11}$. Nous vérifions (4.13) pour $x \leq 2.1\cdot 10^{11}$ par ordinateur. □

### 4.4.2 Produits de nombres premiers

**Lemme 83.** *Pour* $x \geq 2$, *nous avons*

$$\frac{1}{\zeta(2)} \leq \prod_{p\leq x}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) < \frac{1}{\zeta(2)}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

*Démonstration.* Nous avons par [10, Preuve du Théorème 280],

$$\left|\zeta(s) - \prod_{p\le q}\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)\right| < \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}},$$

où $\sigma = \Re\mathrm{e}(s)$. D'où

$$\frac{1}{\zeta(2)+\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}} < \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) < \frac{1}{\zeta(2)-\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{1-\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}}.$$

Prenons

$$u = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}. \tag{4.15}$$

Pour $x \ge 2$, nous avons $u < \frac{1}{\zeta(2)}(\zeta(2)-1-1/4) < 0.25$ et

$$\frac{1}{1-u} < 1+u+\frac{4}{3}u^2 \quad \text{for } u < 0.25. \tag{4.16}$$

Nous avons aussi $\sum_{n>x}\frac{1}{n^2} < \int_{x-1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x-1}$. En combinant la définition (4.15) avec l'inéquation (4.16),

$$\frac{1}{1-u} < 1+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{x-1}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\zeta(2)}\frac{1}{x-1}\right)^2 < 1+\frac{1}{x} \text{ for } x \ge 5.$$

□

**Théorème 84.** *Si l'hypothèse de Riemann est vérifiée, nous avons*

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{\ln(x/\ln x)}{8\pi\sqrt{x}}\right)\right) \quad \textit{pour } x \ge 1628.0, \tag{4.17}$$

$$\prod_{p\le x}\left(\frac{p}{p-1}\right) = e^{\gamma}\ln x\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{\ln(x/\ln x)}{8\pi\sqrt{x}}\right)\right) \quad \textit{pour } x \ge 1628.4, \tag{4.18}$$

$$\prod_{p\le x}\frac{p+1}{p} = \frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}\ln x\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{\ln(x/\ln x)}{8\pi\sqrt{x}}\right)\right) \quad \textit{pour } x \ge 1629.2. \tag{4.19}$$

*Démonstration.* Soit $\mathrm{S} = \sum_{p>x}\big(\ln(1-1/p)+1/p\big)$. Par [20, (8.10)], nous avons

$$0 > \mathrm{S} > \mathrm{S}_0 = \frac{-1.02}{(x-1)\ln x} \text{ si } x > 1. \tag{4.20}$$

Puis

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1 = \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right) &= \exp\left(\sum_{p\le x}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\\ &= \exp\left(\mathrm{M}-\gamma-\sum_{p\le x}\frac{1}{p}-\mathrm{S}\right)\end{aligned}$$

En procédant de la même manière que dans la preuve du Théorème 80 nous pouvons obtenir

$$\mathrm{Z}_1 \le t(x) = \frac{1}{8\pi\sqrt{x}}\ln(x/\ln x) - \frac{2\ln\ln x}{8\pi\sqrt{x}\ln x} \tag{4.21}$$

Soit $z(x) = \frac{1}{8\pi\sqrt{x}}\ln(x/\ln x)$. Nous avons $\exp(t(x)+\frac{1.02}{(x-1)\ln x}) \le 1+z(x)$ et $(1+1/x)\exp(t(x)) \le 1+z(x)$ pour $x \ge 10^{11}$.

En combinant (4.21) et (4.20) avec le résultat précédent, on obtient pour $x \geq 10^{11}$,

$$P_1 \leq \frac{e^{-\Upsilon}}{\ln x} \exp(Z_1 - S) \leq \frac{e^{-\Upsilon}}{\ln x} \exp(t(x) - S_0) \leq \frac{e^{-\Upsilon}}{\ln x}(1 + z(x)).$$

De même, $P_2 = \frac{1}{P_1} = \prod_{p \leq x} \left(\frac{p}{p-1}\right) \leq e^{\Upsilon}(\ln x) \exp t(x) \leq e^{\Upsilon} \ln x\,(1 + z(x))$.
De plus, $P_1 \geq \frac{1}{e^{\Upsilon} \ln x\,(1+z(x))} = \frac{e^{-\Upsilon}}{\ln x} \frac{1}{1+z(x)} \geq \frac{e^{-\Upsilon}}{\ln x}(1 - z(x))$. Nous avons également $P_2 = 1/P_1 \geq \frac{1}{e^{-\Upsilon}(1+z(x))/\ln x} \geq e^{\Upsilon} \ln x \frac{1}{1+z(x)} > e^{\Upsilon} \ln x(1 - z(x))$.

Le dernier produit est étroitement lié aux autres. Comme $1 + 1/p = (1 - 1/p^2)/(1 - 1/p)$, nous écrivons

$$P_3 = \prod_{p \leq x} \frac{p+1}{p} = P_2 \cdot \prod_{p \leq x} \left(1 - 1/p^2\right).$$

D'où, par le lemme 83, $P_3 < P_2 \cdot \frac{1}{\zeta(2)}(1 + 1/x) < \frac{e^{\Upsilon} \ln x}{\zeta(2)}(1 + 1/x) \exp t(x) < \frac{e^{\Upsilon} \ln x}{\zeta(2)}(1 + z(x))$ et $P_3 > P_2/\zeta(2) > \frac{e^{\Upsilon} \ln x}{\zeta(2)}(1 - z(x))$.

Nous vérifions par ordinateur pour $x \leq 10^{11}$ que les inégalités sont encore valables.

□

## 4.5 Références


[1] Juan Arias de Reyna and Jérémy Toulisse. The $n$-th prime asymptotically. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 25(3) :521–555, Nov. 2013. [page 65, 66, 70, 71]

[2] Jan Büthe. Estimating $\pi(x)$ and related functions under partial RH assumptions. *Math. Comput.*, 85(301) :2483–2498, 2016. [page 68]

[3] Ernest Cesaro. Sur une formule empirique de M. Pervouchine. *Comptes Rendus hebdo. des Séances de l'Académie des Sciences*, CXIX :848–849, 1894. [page 69]

[4] M. Cipolla. La determinazione assintotica dell'$n^{imo}$ numero primo. *Rendiconti Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, 8 :132–166, 1902. [page 69]

[5] Pierre Dusart. Inégalités explicites pour $\psi(x)$, $\theta(x)$, $\pi(x)$ et les nombres premiers. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 21 :53–59, 1999. [page 65]

[6] Pierre Dusart. The $k^{\text{th}}$ prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation*, 68(225) :411–415, 1999. [page 65]

[7] Pierre Dusart. Estimates of $\psi$, $\theta$ for large values of $x$ without the Riemann hypothesis. *Mathematics of Computation*, 85(298) :875–888, 2016. [page 65]

[8] Pierre Dusart. Estimates of some functions over primes. *Ramanujan Journal*, 45 :227–251, 2018. [page 65]

[9] Pierre Dusart. Estimates of the $k$-th prime under the riemann hypothesis. *The Ramanujan Journal*, 47(1) :141–154, 7 2018. [page 66]

[10] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, fourth edition, 1975. [page 76]

[11] Andrey V. Kulsha. Values of $\pi(x)$ and $\Delta(x)$ for various $x$'s. http://www.primefan.ru/stuff/primes/table.html. [page 66, 67]

[12] Robin Guy Massias, Jean-Pierre. Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 8(1) :215–242, 1996. [page 65]

[13] Jean-Louis Nicolas. Small values of the Euler function and the Riemann hypothesis. *Acta Arith.*, 155(3) :311–321, 2012. [page 67, 68]

[14] David J. Platt and Tim S. Trudgian. On the first sign change of $\theta(x) - x$. *Mathematics of Computation*, 85 :1539–1547, 2016. [page 67]

[15] Guy Robin. Estimation de la fonction de Tchebychef $\theta$ sur le $k$-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de $n$. *Acta Arithmetica*, 42(4) :367–389, 1983. [page 65, 69]

[16] Guy Robin. Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 63 :187–213, 1984. [page 71, 72, 73, 75]

[17] Guy Robin. Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques. *Publications de l'Institut Mathématique*, 43(57)(63) :17–25, 1988. [page 69]

[18] John Barkley Rosser. The $n$-th prime is greater than $n \log n$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 45 :21–44, 1939. [page 65]

[19] John Barkley Rosser. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *Am. J. Math.*, 63 :211–232, 1941. [page 65]

[20] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(1) :64–94, 03 1962. [page 65, 67, 69, 71, 73, 75, 76]

[21] John Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Mathematics of Computation*, 29(129) :243–269, January 1975. [page 65, 68]

[22] Bruno Salvy. Fast computation of some asymptotic functional inverses. *Journal of Symbolic Computation*, 17(3) :227–236, 1994. [page 69]

[23] Lowell Schoenfeld. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. *Mathematics of Computation*, 30(134) :337–360, April 1976. [page 65, 68, 71]

[24] Douglas A. Stoll and Patrick Demichel. The impact of $\zeta(s)$ complex zeros on $\pi(x)$ for $x < 10^{10^{13}}$. *Mathematics of Computation*, 80(276) :2381–2394, 2011. [page 67]

[25] Helge von Koch. Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica*, 24(1) :159–182, 1901. [page 65]

# Chapitre 5

# Encadrements explicites de quelques fonctions de sommation de nombres premiers

## 5.1 Introduction

Dans beaucoup d'applications, il est utile d'avoir des estimations explicites du terme d'erreur du théorème des nombres premiers. Rosser [35, 36] a développé une méthode analytique qui combine la vérification numérique de l'hypothèse de Riemann sur la région sans zéro et en a déduit des encadrements explicites pour quelques fonctions de sommation de nombres premiers. Le but de cette partie est d'affiner les encadrements en réduisant le terme d'erreur des fonctions de Chebyshev $\psi(x)$, le logarithme du plus petit commun multiple des entiers de 1 à $x$, et $\theta(x)$, le logarithme des produits des nombres premiers ne dépassant pas $x$ :

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \qquad \psi(x) = \sum_{\substack{p,\alpha \\ p^\alpha \leqslant x}} \ln p.$$

Le théorème des nombres premiers peut être rédigé de la façon suivante :

$$\psi(x) = x + o(x), \ \ x \to +\infty.$$

Une formulation équivalente du théorème précédent est : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que

$$|\psi(x) - x| < \varepsilon\, x \qquad \text{pour } x \geqslant x_0$$

or

$$|\theta(x) - x| < \varepsilon\, x \qquad \text{pour } x \geqslant x_0.$$

Cette partie est mise à jour d'anciens résultats bien connus : les plus importants travaux concernant des résultats effectifs ont été conduits par Rosser & Schoenfeld [37, 38, 40], Costa Pereira [27], Robin [33], Robin & Massias [21], Dusart [8], Faber & Kadiri [13] and Trudgian [42].

Les preuves des encadrements sur $\psi(x)$ dans [38, 13] sont basés sur la vérification de l'hypothèse de Riemann jusqu'à une certaine hauteur et sur une région sans zéro [18, 22] pour $\zeta$ explicite dont la forme très classique correspond essentiellement à celle donnée par de la Vallée Poussin. Rosser & Schoenfeld [38] ont montré que les 3 502 500 premiers zéros de $\zeta(s)$ sont positionnés sur une verticale de partie réelle $1/2$.

Van de Lune *et al* [43] sont allés plus loin en montrant que le premier milliard et demi (1 500 000 000) zéros sont sur cette droite critique. Wedeniwski [44] puis Gourdon [15] sont parvenus à déterminer les zéros avec du calcul parallèle et ont prouvé que l'hypothèse de Riemann est vraie au moins pour les $10^{13}$ zéros non triviaux. Ramaré [30] et Kadiri [19] ont ensuite introduit des estimations basées sur une densité explicite qui améliore la prise en compte de la position des zéros dans la bande critique.

Tout ce travail améliore grandement les bornes [10] pour $\psi(x)$ et $\theta(x)$ pour les valeurs moyennes de $x$.

Nous utiliserons la notation suivante : $f(x) = \mathcal{O}^*\big(g(x)\big)$ signifie $|f(x)| \leqslant g(x)$. Nous allons prouver les résultats suivants (Théorèmes 91 & 93 respectivement) :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x + \mathcal{O}^*\left(59.2x/\ln^4 x\right) \quad \text{pour } x \geqslant 2, \\ \theta(x) &= x + \mathcal{O}^*\left(151.3x/\ln^4 x\right) \quad \text{pour } x \geqslant 2. \end{aligned}$$

Nous appliquerons également ces résultats sur $p_k$, le $k^{\text{ième}}$ nombre premier, avec la notation $\ln\ln x$ pour $\ln_2 x$ pour plus de lisibilité. L'expansion asymptotique de $p_k$ est bien connue ; Cesaro [4] puis Cipolla [5] l'ont exprimé en 1902 :

$$p_k = k\left\{\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} - \frac{\ln_2^2 k - 6\ln_2 k + 11}{2\ln^2 k} + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\ln_2 k}{\ln k}\right)^3\right)\right\}.$$

Un travail plus précis sur ce type de résultat peut être trouvé dans [34, 39]. Les résultats concernant $p_k$ sont (Lemme 110 et Proposition 112) :

$$p_k = k\left(\ln k + \ln_2 k - 1 + \frac{\ln_2 k - 2}{\ln k} + \mathcal{O}^*\left(0.1/\ln k\right)\right) \quad \text{pour } k \geqslant 178\,974.$$

Nous utiliserons les résultats précédents pour montrer (Corollaire 101) que, pour $x \geqslant 468\,991\,632$, l'intervalle

$$\left[x, x + x/(5000\ln^2 x)\right]$$

contient au moins un nombre premier. Notons le nombre de nombres premiers n'excédant pas $x$ par $\pi(x)$. Nous allons montrer (Corollaire 98) que

$$\frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) \underset{x \geqslant 599}{\leqslant} \pi(x) \underset{x>1}{\leqslant} \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1.2762}{\ln x}\right).$$

Un résultat plus précis sur $\pi(x)$ sera également montré :

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x} + \mathcal{O}^*\left(0.53816/\ln^2 x\right)\right) \quad \text{pour } x \geqslant 11\,813.$$

Dans cette partie nous donnerons également des résultats sur la différence entre $\psi$ et $\theta$ (Corollaire 96), également pour $\theta(p_k)$ (Propositions 107 & 108), et pour certaines sommes sur les nombres premiers (Théorème 102 pour $\sum_p \frac{1}{p}$, Théorème 103 pour $\sum_p \frac{\ln p}{p}$) et pour le produit sur les nombres premiers (Théorème 105).

## 5.2 Estimations des fonctions reliées aux nombres premiers en utilisant la théorie de la fonction de zêta de Riemann

### 5.2.1 Relation entre $\psi$ et $\zeta$.

La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est une fonction à variable complexe $s$ qui peut être définie pour $\Re\mathrm{e}(s) > 1$ par l'intégrale

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

Les zéros de $\zeta$ sont de deux types différents. Ceux appelés “zéros triviaux" qui apparaissent à tous les entiers négatifs pairs $s$=-2, -4, -6, ..., et les “zéros non-triviaux" à certains $s = \sigma + it$ lorsque $s$ appartient à la bande critique $0 < \sigma < 1$.

Une formule classique explicite la relation entre les nombres premiers et les zéros non-triviaux de $\zeta$. Elle est donnée par [12, §3.8, p.66] :

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}), \tag{5.1}$$

lorsque $x > 1$ n'est pas une puissance d'un nombre premier. Aux valeurs $x = p^n$, la fonction fonction fait un saut et la valeur $\psi$ est définie, comme d'habitude, par la moyenne entre la nouvelle et l'ancienne valeur $\psi(x) = \frac{1}{2}(\psi(x-\varepsilon) + \psi(x+\varepsilon))$.

### 5.2.2 Zéros de la fonction zêta de Riemann

**Position des zéros.**

Comme les zéros de $\zeta$ sont utilisés pour une sommation sur les nombres premiers (3.11), la difficulté est reportée sur le positionnement des zéros de la fonction zêta de Riemann. Cette étude est donc d'une grande importance en théorie des nombres, en particulier pour estimer $\psi(x)$ et $\theta(x)$. En 1859, Riemann pense que les zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann sont tous de partie réelle $\sigma = \Re\mathrm{e}(s) = 1/2$, droite appelée «ligne critique» ou «droite critique» . Cette conjecture est connue sous le nom d'Hypothèse de Riemann.

L'hypothèse de Riemann a été testée numériquement jusqu'à une certaine hauteur, notée H pour le reste du chapitre, et s'est révélée exacte pour les zéros $\sigma + it$ dans la région $0 < t < \mathrm{H}$. L'histoire de la vérification de l'hypothèse de Riemann débute en 1903 avec Gram [16], qui calcule les quinze premiers zéros. La plus grande hauteur a été annoncée par Gourdon [15] en 2004 en utilisant la méthode d'Odlyzko et Schönhage pour vérifier que les dix premiers trillions ($10^{13}$) de zéros non-triviaux de la fonction $\zeta$ se trouvent sur la droite critique. Ce dernier calcul implique que l'hypothèse de Riemann est vraie jusqu'à au moins $\mathrm{H}_2 = 2\ 445\ 999\ 556\ 030$ mais reste non publié (annonce sur site Web uniquement). Le résultat le plus récent est celui de Platt mentionné par les auteurs [13] qui utilise une autre méthode pour vérifier l'hypothèse de Riemann jusqu'à $\mathrm{H}_1 = 30\ 610\ 046\ 000$. Nous utiliserons la valeur $\mathrm{H}_2$ pour obtenir des résultats comparables avec [13].

Classiquement les méthodes de test de l'hypothèse de Riemann ne calculent pas exactement la valeur des zéros de $\zeta$, mais pour aller plus vite, elles se contentent de vérifier que le nombre de zéros attendus par intervalle est correct. Pourtant pour le calcul des sommes sur les zéros non-triviaux, la détermination avec exactitude de la valeur des ordonnées des zéros reste nécessaire même si la portée peut être réduite aux premiers zéros.

Odlyzko [25] calcule les 2 001 052 premiers zéros de la fonction zêta de Riemann sur la ligne critique, avec une précision de $4 \cdot 10^{-9}$. Ainsi nous sommes en mesure de calculer la somme partielle des inverses des modules de $\varrho = 1/2 + i\gamma$ à partir de cette liste de zéros. Il vient que,

**Lemme 85.** *Soit* $\mathrm{T}_0 = 1\,132\,490.982$. *Alors* $\displaystyle\sum_{0<\gamma\le \mathrm{T}_0} \frac{1}{\gamma} \le 11.6377324.$

**Nombre de zéros.**

Pour calculer des sommes sur les zéros comme (3.11), nous devons introduire le nombre de zéros non-triviaux jusqu'à une certaine hauteur. Soit $\mathrm{T} \ge 2$ et $\mathrm{N}(\mathrm{T})$ le nombre de

zéros non-triviaux $\varrho = \beta + i\gamma$ dans la bande $0 \le \gamma \le T$ et $0 \le \beta \le 1$. En 1941, Rosser [36, Théorème 19] a prouvé

**Théorème 86** (Rosser)**.** *Soit* $T \ge 2$,

$$F(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}, \quad R(T) = a_1 \log T + a_2 \log\log T + a_3,$$

*avec* $a_1 = 0.137$, $a_2 = 0.443$, $a_3 = 1.588$. *Alors*

$$|N(T) - F(T)| \le R(T).$$

La fonction majorante $R(T)$ et

$$q(y) = R'(y)/\ln(y/(2\pi)) = \frac{a_1 \ln y + a_2}{y \ln y \ln(y/(2\pi))}. \tag{5.2}$$

seront utilisés par la suite. Un travail récent [41] de Trudgian raffine ces fonctions, mais avec une influence très réduite sur nos calculs. Dans [19], Kadiri détaille le nombre $N(T)$ en partitionnant la bande critique. Soit $N(\sigma_0, T)$ est défini comme le nombre de zéros non-triviaux de zêta dans la région $\sigma_0 \le \beta \le 1$ et $0 \le \gamma \le T$. Elle a trouvé des fonctions majorantes pour $N(\sigma_0, T)$ et ses résultats sont améliorés par Ramaré [30, Théorème 1.1] dans certains cas (un facteur de $1/2$ est nécessaire pour établir la correspondance entre les deux définitions des auteurs).

**Théorème 87** (Ramaré)**.** *Soit* $\sigma_0 \geqslant 0.52$. *Alors pour* $T \ge 2000$,

$$N(\sigma_0, T) \le \tilde{F}(\sigma_0, T) = T\log\left(1 + \frac{9.8}{2T}(3T)^{8(1-\sigma_0)/3}\log^{5-2\sigma_0}(T)\right) + \frac{103}{2}(\log T)^2$$

Pour être compatible avec les travaux de Kadiri nous choisissons $c_2 = c_3 = 0$ et $c_1 = \tilde{F}(\sigma_0, H)/H$ pour avoir pour $\sigma_0 > 5/8$,

$$N(\sigma_0, T) \leqslant c_1 T \quad \text{pour tout } T \geqslant H.$$

**Région sans zéro**

Nous utiliserons la forme classique (celle présentée par de la Vallée Poussin) de région sans zéro. En parcourant les travaux de Kadiri [18], le résultat le plus précis est dû à Mossinghoff et Trudgian [22, Théorème 1], que nous rappelons ici :

**Théorème 88** (Mossinghoff and Trudgian)**.** *Soit* $R = 5.573412$. *Alors il n'y a pas de zéros de* $\zeta(s)$ *dans la région*

$$\Re e(s) \ge 1 - \frac{1}{R\log|\Im m(s)|} \quad et\ |\Im m(s)| \ge 2.$$

## 5.3 Bornes pour $\psi$.

Nous utiliserons la méthode proposée par Faber et Kadiri [13] qui introduit une formule explicite de fonction majorante lissant le comportement de $\psi(x)$. Présentons ici leurs notations :

- $H > 0$ tel que si $\zeta(\beta + i\gamma) = 0$ et $0 < \gamma < H$, alors $\beta = 1/2$,
- $T_0 > 2\pi$ tel que $\sum_{0<\gamma<T_0} \gamma^{-1}$ peut être calculé directement,
- $T_1$ est un paramètre satisfaisant $T_0 < T_1 < H$,
- $R$ est une constante telle que $\zeta(\sigma + it)$ ne s'annule pas dans la région $\sigma \ge 1 - \frac{1}{R\log|t|}$ et $|t| \ge 2$, (5.3)
- $\sigma_0$ est un paramètre vérifiant $5/8 \le \sigma_0 < 1$,
- $c_1 > 0$ dépend de $\sigma_0$ tel que $N(\sigma_0, T) \le c_1 T$ pour tout $T \ge H$.

Comme Rosser et Schoenfeld, les auteurs utilisent les intégrales liées aux fonctions de Bessel modifiées du second ordre suivantes :

$$\mathrm{K}_\nu(z,w) = \frac{1}{2}\int_w^\infty t^{\nu-1}\exp\left(-\frac{z}{2}(t+1/t)\right)dt,$$

pour exprimer plus facilement les intégrales issues de leur méthode et données par

$$\mathrm{J}_m(\mathrm{Y}) = \frac{z}{2m}\mathrm{K}_1\left(z, \frac{2m}{z}\ln \mathrm{Y}\right)$$

avec $z = 2\sqrt{\frac{m\log x}{\mathrm{R}}}$. Soit

$$\mathrm{M}(a,b,m) = \frac{(2m+1)!}{m!}\int_0^1 |\mathrm{P}_m(1-2u)|\,((b-a)u+a)^{m+1}\,du, \tag{5.4}$$

où $\mathrm{P}_m$ est le $m^{ième}$ polynôme de Legendre, défini par

$$\mathrm{P}_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^{m-k}.$$

Nous reprenons ici le théorème principal de Faber-Kadiri [13] :

**Théorème 89.** *Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\delta > 0$, et la paire $(a,b)$ prenant les valeurs $(1, 1+\delta)$ ou $(1-\delta, 1)$. Soit $\mathrm{H}, \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{R}, \sigma_0, c_1$ vérifiant (3.13). Soit $b_0$ une constante positive. Alors pour tout $x \geqslant e^{b_0}$,*

$$\begin{aligned}\frac{|\psi(x)-x|}{x} \leqslant \max_{(a,b)}\Big\{&\frac{2\mathrm{M}(a,b,m)}{\delta^m}\left(\mathrm{B}_5 + \mathrm{B}_3(e^{-(1-\sigma_0)} + e^{-\sigma_0 b_0}) + \mathrm{B}_4 e^{-(1-\frac{1}{\mathrm{R}\log \mathrm{H}}b_0)}\right)\\ &+2\left(\mathrm{M}(a,b,0)\mathrm{B}_1 + \frac{\mathrm{M}(a,b,m)}{\delta^m}\mathrm{B}_2\right)e^{-b_0/2} + \frac{\delta}{2}\\ &+\ln(2\pi)e^{-b_0} + \frac{\mathrm{M}(a,b,0)}{2}e^{-3b_0}\Big\}\end{aligned} \tag{5.5}$$

*où $\mathrm{M}(a,b,m)$ est donné par (3.39), et les $\mathrm{B}_i$ sont définis respectivement par (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) et (3.32).*

$$\mathrm{B}_1(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1) = \sum_{0<\gamma\leq \mathrm{T}_0}\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{1}{2\pi} + q(\mathrm{T}_0)\right)\left(\log(\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0)\log(\sqrt{\mathrm{T}_1\mathrm{T}_0}/(2\pi))\right) + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{T}_0)}{\mathrm{T}_0}, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{B}_2(m,\mathrm{T}_1,\mathrm{H}) = \left(\frac{1}{2\pi} + q(\mathrm{T}_1)\right)\left(\frac{1+m\log(\mathrm{T}_1/2\pi)}{m^2\mathrm{T}_1^m} - \frac{1+m\log(\mathrm{H}/2\pi)}{m^2\mathrm{H}^m}\right) + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{T}_1)}{\mathrm{T}_1^{m+1}}, \tag{5.7}$$

$$\mathrm{B}_3(m,\mathrm{H}) = \left(\frac{1}{2\pi} + q(\mathrm{H})\right)\frac{1+m\log(\mathrm{H}/2\pi)}{m^2\mathrm{H}^m} + \frac{2\mathrm{R}(\mathrm{H})}{\mathrm{H}^{m+1}}. \tag{5.8}$$

$$\mathrm{B}_4(m,\mathrm{H},\sigma_0) = c_1\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{\mathrm{H}^m}. \tag{5.9}$$

$$\mathrm{B}_5(x,m,\sigma_0,\mathrm{H}) \tag{5.10}$$

$$= \begin{cases} c_1\left(1+\frac{\mathrm{R}}{2\log x}\frac{(\log \mathrm{H})^2}{\left(\frac{m\mathrm{R}}{\log x}\right)(\log \mathrm{H})^2-1}\right)\frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log \mathrm{H}}}}{\mathrm{H}^m} & \text{if } b_0 < m\mathrm{R}(\ln \mathrm{H})^2\\ c_1\frac{x^{-\frac{1}{\mathrm{R}\log \mathrm{H}}}}{\mathrm{H}^m} + c_1\mathrm{J}_m(\mathrm{H}) & \text{dans les autres cas.}\end{cases}$$

*Démonstration.* À partir de [13], nous utilisons l'expression (2.19) du lemme 2.4. nous supprimons le terme $s_0$ qui est déjà inclus dans le terme $s_1$. Ensuite nous substituons respectivement les termes $s_1, s_2, s_3, s_4$ par $B_1, B_2, B_3, B_4$ (2.22–2.25 de [13]). Le terme $s_5$ est majoré par (2.27) et peut être borné par (2.30) lorsque $w > 1$ (i.e. $\ln x < m R \ln^2 H$). La fonction de Bessel modifiée $K_1(z, w)$ peut être calculée pour $0 \leqslant w \leq 1$ par (2.30) et (2.35) de [38]. Ainsi, pour les deux choix de la paire $(a, b)$, il vient par (3.3) que $\left| a - 1 + (b - a) \int_0^1 g(u)\,du \right| = \delta/2$. □

**Proposition 90.** *Soit $b_0 \geq 0$ une constante fixée, strictement positive. Soit $x \geq e^{b_0}$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $|\psi(x) - x| \leq \varepsilon_0 x$, où $\varepsilon_0$ est donné explicitement par (3.41) et dont la valeur calculée est disponible dans la table 3.1 pour* $H_2 = 2\,445\,999\,556\,030$.

**Théorème 91.** *Nous avons*

$$|\psi(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x} \quad \textit{pour } x \geqslant 2$$

*avec*

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_k$ | 0.77 | 0.85 | 1.66 | 8.16 | 59.18 |

*Démonstration.* Nous calculons la borne supérieure $\eta_k$ étape par étape jusqu'à la fin de la table 3.1. Par exemple, si $\varepsilon_{b_i}$ est la valeur obtenue pour $x = e^{b_i}$ nous avons besoin d'intervalles du type $\eta_k \geqslant \varepsilon_{b_i} \cdot b_{i+1}^k$ pour $e^{b_i} \leqslant x \leqslant e^{b_{i+1}}$ (nous avons besoin de calculer quelques valeurs intermédiaires de$\varepsilon(x)$ entre $e^{1500}$ et $e^{2000}$). Pour les grandes valeurs non proposées dans la table, nous utilisons le Théorème 1.1 de [10]. Nous terminons la preuve par une rapide inspection pour les petites valeurs de $x$. Le maximum de $|\psi(x) - x| \frac{\ln^k x}{x}$ vaut

- for $x \geqslant 2$, $\eta_0 < (3 - \psi(3^-))/3 \approx 0.7689509398$,
- for $x \geqslant 2$, $\eta_1 < (3 - \psi(3^-))/3 \cdot \ln(3) \approx 0.8447789518618$,
- for $x \geqslant 2$, $\eta_2 < (17 - \psi(17^-))/17 \cdot \ln^2(17) \approx 1.6583011509743$,
- for $x \geqslant 2$, $\eta_3 < (223 - \psi(223^-))/223 \cdot \ln^3(223) \approx 8.15435775451$,
- for $x \geqslant 2$, $\eta_4 < (1423 - \psi(1423^-))/1423 \cdot \ln^4(1423) \approx 59.1713704$.

□

## 5.4 Encadrements pour $\theta$.

### 5.4.1 Calcul exact de $\theta$.

**Lemme 92.** *Nous avons*

$$\vartheta(10^{15}) = 999\,999\,965\,752\,660.939839805291048\cdots.$$

*Démonstration.* De l'identité bien connue

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k}), \tag{5.11}$$

nous avons

$$\theta(x) = \psi(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \theta(x^{1/k}).$$

A partir de quelques valeurs exactes de $\psi(x)$ calculées par [7], on obtient la table 5.1 (Valeurs exactes de $\theta(x)$) □

### 5.4.2 Sur la différence entre $\theta$ et la fonction identité

**Théorème 93.** *Nous avons*

$$|\theta(x) - x| < \eta_k \frac{x}{\ln^k x} \quad \textit{for } x \geqslant x_k$$

*avec*

| $k$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_k$ | 1 | 1.2323 | 0.001 | 3.965 | 0.2 | 0.05 | 0.01 |
| $x_k$ | 1 | 2 | 908 994 923 | 2 | 3 594 641 | 122 568 683 | 7 713 133 853 |

*et*

| $k$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta_k$ | 20.83 | 10 | 1 | 0.78 | 0.5 | 151.3 |
| $x_k$ | 2 | 32 321 | 89 967 803 | 158 822 621 | 767 135 587 | 2 |

*Démonstration.* Nous combinons les estimations de $|\psi(x) - x|$ données dans la proposition 90 avec la limite supérieure de $|\psi(x) - \theta(x)| < 1.4262\sqrt{x}$ donnée dans [37, théorème 13]. Nous procédons étape par étape jusqu'à la fin du tableau. Par exemple, si $\varepsilon_{b_i}$ est la valeur obtenue pour $x = e^{b_i}$ nous avons $\eta_k \geqslant (\varepsilon_{b_i} + 1.43/\sqrt{e^{b_i}}) \cdot b_{i+1}^k$ pour $e^{b_i} \leqslant x \leqslant e^{b_{i+1}}$. Pour les grandes valeurs en dehors du tableau, nous utilisons le théorème 1.1 de [10] avec R défini dans le théorème 88 et nous avons $\eta_k \geqslant \sqrt{8/\pi}(\sqrt{\ln(x_0)/\mathrm{R}})^{1/2} \cdot e^{-\sqrt{\ln(x_0)/\mathrm{R}}} \cdot \ln^k(x_0)$ pour $x \geqslant x_0$. Le maximum de $|\theta(x) - x|\frac{\ln^k x}{x}$ est

— pour $x \geqslant 1$, $\eta_0 < (1 - \theta(1^-))/1 = (2 - \theta(2^-))/2 = 1$,

— pour $x \geqslant 2$, $\eta_1 < (11 - \theta(11^-))/11 \cdot \ln(11) \approx 1.23227674$,

— pour $x \geqslant 2$, $\eta_2 < (59 - \theta(59^-))/59 \cdot \ln^2(59) \approx 3.964809$,

— pour $x \geqslant 2$, $\eta_3 < (1423 - \theta(1423^-))/1423 \cdot \ln^3(1423) \approx 20.8281933$,

— pour $x \geqslant 2$, $\eta_4 < (1423 - \theta(1423^-))/1423 \cdot \ln^4(1423) \approx 151.2235681$.

□

### 5.4.3 Sur la différence entre $\psi$ et $\theta$

Comme $\theta(2^-) = 0$, la somme (5.11) se termine :

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} \theta(x^{1/k}) = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} \theta(x^{1/k}).$$

**Borne inférieure**

**Proposition 94.** *Pour $x \geqslant 121$, nous avons*

$$0.9999\sqrt{x} < \psi(x) - \theta(x) \tag{5.12}$$

$$\left(1 - \frac{4}{\ln^3 x}\right)\sqrt{x} < \psi(x) - \theta(x) \tag{5.13}$$

*Démonstration.* En utilisant le théorème 93, nous avons

$$\psi(x) - \theta(x) \geqslant \theta(\sqrt{x}) \geqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{2^k \eta_k}{\ln^k x}\right)$$

qui peut être appliqué avec $k = 3$, $\eta_k = 0.5$ pour $\sqrt{x} > 767\,135\,587$. Maintenant par [27] p. 211,

$$\psi(x) - \theta(x) = \psi(\sqrt{x}) + \sum_{k \geqslant 1} \theta(x^{\frac{1}{2k+1}}),$$

d'où

$$\psi(x) - \theta(x) \geqslant \psi(\sqrt{x}) + \theta(x^{1/3}).$$

Par le théorème 19 de [37] p.72, nous avons

$$\theta(x^{1/3}) > \sqrt[3]{x} - 2x^{1/6} \text{ for } (1423)^3 \leqslant x \leqslant (10^8)^3,$$

et par (7.2) de [40, Théorème 11], nous avons pour $x \geqslant e^{2b}$,

$$\psi(\sqrt{x}) > \sqrt{x} - \varepsilon_b \sqrt{x}$$

où $\varepsilon_b$ peut être trouvé dans le tableau p.358 de [40] (ou dans le tableau 3.1). Nous vérifions que

$$\left(\frac{4}{\ln^3 x} - \varepsilon_b\right)\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2x^{1/6} > 0$$

pour $10^{16} \leqslant x \leqslant e^{46}$ par intervalles (nous utilisons $b = 18, 42, 20, 22$). Par le théorème 24 de [37] p.73, nous concluons que (5.12) est vérifié pour $121 \leqslant x \leqslant 10^{16}$. □

**Borne supérieure**

**Proposition 95.** *Pour $x > 0$, nous avons*

$$\psi(x) - \theta(x) - \theta(\sqrt{x}) < 1.777745 x^{1/3}. \tag{5.14}$$

*Démonstration.* Pour $x > 0$, nous avons $\theta(x) < 1.000081x$ par [40] p.360. D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} \theta(x^{1/k}) &< 1.000081 \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor} x^{1/k} \\
&< 1.000081 \left(x^{1/3} + \left(\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor - 3\right) x^{1/4}\right) \\
&< 1.2\, x^{1/3} \text{ for } x > (10^{11})^3.
\end{aligned}$$

Pour les petites valeurs, en utilisant le résultat $\theta(x) < x$ pour $x \leqslant 10^{11}$ paru dans [40] p.360, nous procédons par intervalles tels que $2^n \leqslant x < 2^{n+1}$ où $\sum_{k=3}^{n} \theta(x^{1/k}) < \sum_{k=3}^{n} x^{1/k} < \sum_{k=3}^{n} 2^{\frac{n+1}{k}}$. La différence maximale de (5.14) est trouvée par calcul direct (le maximum est atteint pour $x$=2401). Avec ce résultat, nous mettons à jour la partie (3.38) du théorème 14 de [37]. □

**Corollaire 96.** *Pour $x > 0$,*

$$\psi(x) - \theta(x) < (1 + 1.47 \cdot 10^{-7})\sqrt{x} + 1.78 x^{1/3}.$$

*Démonstration.* Le résultat découle de $\theta(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$ pour $\sqrt{x} < 1.39 \cdot 10^{17}$ d'un résultat de calcul [28] de Platt et Trudgian. Ensuite, nous calculons la valeur de $\varepsilon$ pour $b = \ln(1.39 \cdot 10^{17})$ en utilisant le théorème 89 et la proposition 5.14 ($\sigma_0 = 0.87, m = 2, \delta = 3.048\text{E}{-8}, \text{T}_1 = 157\,682\,321, \varepsilon = 1.467\text{E}-7$). □

## 5.5 Estimations des fonctions liées aux nombres premiers grâce à la fonction θ.

### 5.5.1 Estimation de la fonction π

La fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$ est la fonction qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre réel $x$. Soit $\mathrm{li}(x)$, le logarithme intégral défini pour tous les nombres réels positifs

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right).$$

Un résultat classique [17, Théorème 23] fait un lien entre ces deux quantités :

$$\text{Si } x\to\infty,\quad \pi(x)=\mathrm{li}(x)+\mathrm{O}\big(xe^{-\mathrm{C}\sqrt{\ln x}}\big) \tag{5.15}$$

avec une certaine constante $\mathrm{C}>0$. L'estimation (5.15) est meilleure que toute estimation de la forme

$$\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\mathrm{O}\big(x/\ln^m x\big).$$

Ainsi, le développement asymptotique de $\pi(x)$ est

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(\ln x)^k}+\mathrm{O}\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right).$$

**Théorème 97.** *Pour* $x\geqslant 4\cdot 10^9$,

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{\ln^2 x}+\mathrm{O}^*\left(\frac{7.32}{\ln^3 x}\right)\right).$$

*Pour* $x>1$,

$$\pi(x)\leqslant\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{\ln^2 x}+\frac{7.59}{\ln^3 x}\right).$$

*Démonstration.* Nous substituons une borne supérieure à $\theta(x)$ de la forme $|\theta(x)-x|\leqslant \eta_k\frac{x}{\ln^k x}$ à $x\geqslant x_0$, dans le théorème 4.3 de [1]

$$\pi(x)=\pi(x_0)-\frac{\theta(x_0)}{\ln x_0}+\frac{\theta(x)}{\ln x}+\int_{x_0}^{x}\frac{\theta(y)dy}{y\ln^2 y}$$

pour introduire

$$\mathrm{J}(x;\eta_k)=\mathrm{K}+\frac{x}{\ln x}+\eta_k\frac{x}{\ln^{k+1}x}+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{\ln^2 y}+\frac{\eta_k}{\ln^{k+2}y}\right)dy$$

avec

$$\mathrm{K}=\pi(x_0)-\frac{\theta(x_0)}{\ln x_0}.$$

de sorte que, pour $x\geqslant x_0$,

$$\mathrm{J}(x;-\eta_k)\leqslant\pi(x)\leqslant\mathrm{J}(x;\eta_k).$$

Soit $\mathrm{M}_k(x;c)=\dfrac{x}{\ln x}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\frac{n!}{\ln^n x}+\frac{c}{\ln^k x}\right)$ inspiré du début du développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$. Écrivons les dérivés de $\mathrm{J}(x;\eta_k)$ et de $\mathrm{M}(x;c)$ avec par rapport à $x$ :

$$\mathrm{J}'(x;\eta_k)=\frac{1}{\ln x}+\frac{\eta_k}{\ln^{k+1}x}-k\frac{\eta_k}{\ln^{k+2}x},$$

$$\mathrm{M}'_k(x;c) = \frac{1}{\ln x} + \frac{c-k!}{\ln^{k+1} x} - \frac{c(k+1)}{\ln^{k+2} x}.$$

Pour la borne supérieure de $\pi(x)$, il faut choisir $c \geqslant (k! + \eta_k - k\eta_k/\ln x_0)/(1-(k+1)/\ln x_0)$ pour avoir $\mathrm{J}' < \mathrm{M}'$ pour $x \geqslant x_0$. La borne est valable si $\mathrm{J}(x_0;\eta_k) \leqslant \mathrm{M}_k(x_0;c)$. Avec $\eta_3 = 0,5$ et $x_0 = 10^{15}$, nous devons choisir $c \geqslant 7.303$. Nous vérifions que $\mathrm{J}(10^{15};0.5) < \mathrm{M}_3(10^{15};7.32)$ en utilisant le tableau 3 de [32] et le tableau 5.1. Nous utilisons le résultat de [28, Corollary 1] pour limiter la vérification informatique : comme $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$ pour $x < 1.39 \cdot 10^{17}$, le résultat est valable car $\mathrm{li}(x)$ est inférieur à la limite supérieure pour $x > 1.62 \cdot 10^{10}$. La constante $7,5893$, qui apparaît dans le terme $\ln^3 x$, est atteinte pour $p = 110\,102\,617$. Pour la borne inférieure, pour avoir $\mathrm{J}'(x;-\eta_k) > \mathrm{M}'_k(x;c)$ il faut choisir $c < (k!-\eta_k+k\eta_k/\ln x)/(1-\frac{k+1}{\ln x})$. Avec $k = 3$, nous choisissons $c = 0$, $x_0 = 10^{11}$ et $\eta_3(1-3/\ln x) < 6$. Comme $\mathrm{M}(x_0;0) < \mathrm{J}(x_0;-1)$ et par calcul direct pour les petites valeurs, on obtient

$$\pi(x) > \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right) \quad \text{for } x \geqslant 88\,789. \qquad \square$$

Nous utilisons le résultat précédent pour donner des limites à $\pi(x)$. Les limites inférieures sont les premiers termes et les limites supérieures sont les meilleures limites (meilleures en termes de dernière constante) pour $x > 1$ de premier ordre du développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$.

**Corollaire 98.**

$$\underset{x\geqslant 17}{\frac{x}{\ln x} \leqslant} \pi(x) \underset{x>1}{\leqslant} 1.2551\frac{x}{\ln x} \tag{5.16}$$

$$\underset{x\geqslant 599}{\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right) \leqslant} \pi(x) \underset{x>1}{\leqslant} \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1.2762}{\ln x}\right) \tag{5.17}$$

$$\underset{x\geqslant 88\,789}{\frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{\ln^2 x}\right) \leqslant} \pi(x) \underset{x>1}{\leqslant} \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2.53816}{\ln^2 x}\right) \tag{5.18}$$

*Démonstration.* Les limites supérieures sont atteintes respectivement pour $p_{30} = 113$, $p_{258} = 1\,627$ et $p_{30392} = 355\,111$. Nous vérifions également que

$$\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{2-0.53816}{\ln^2 x}\right)$$

pour $x \geq 11\,813$ complètent un résultat annoncé dans l'introduction. $\square$

En utilisant le développement asymptotique de $1/\mathrm{li}(x)$, Panaitopol [26] a montré une autre formule pour $\pi(x)$ en prouvant que

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1 - f(x)}$$

où $f(x) = k_1/\ln(x) + k_2/\ln^2(x) + \cdots + \mathrm{O}(1/\ln^m(x))$ avec $k_i$ donné par la relation de récurrence

$$k_n + 1!\,k_{n-1} + 2!\,k_{n-2} + \cdots + (n-1)!\,k_1 = n \cdot n!.$$

On obtient ce genre de développement asymptotique

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1 - 1/\ln(x) - 3\ln^2(x) - 13/\ln^3(x) - \cdots}$$

ce qui est utile [2, 3] pour les bornes pour $1/\pi(x)$.

**Corollaire 99.**

$$\underset{x\geqslant 5393}{\frac{x}{\ln x-1}} \leqslant \pi(x) \underset{x>e^{1.112}}{\leqslant} \frac{x}{\ln x-1.112} \tag{5.19}$$

$$\underset{x\geqslant 468049}{\frac{x}{\ln x-1-1/\ln(x)}} \leqslant \pi(x) \underset{x>5.6}{\leqslant} \frac{x}{\ln(x)-1-1.2311/\ln(x)} \tag{5.20}$$

*Démonstration.* Les limites supérieures sont atteintes respectivement pour $p_{2688} = 24\,137$ et $p_{246651} = 3\,445\,943$. □

### 5.5.2 Plus petit intervalle contenant des nombres premiers

Le problème du plus petit intervalle contenant des nombres premiers est lié au problème des écarts entre nombres premiers (c'est-à-dire la différence entre deux nombres premiers successifs) et peut être utile pour la vérification de la conjecture ternaire de Goldbach [20] ou pour la recherche de nombres premiers [42] entre cubes. Un résultat de Schoenfeld [40] le montre, pour $x \geqslant 2\,010\,759.9$, l'intervalle $]x, x+x/16597[$ contient au moins un nombre premier, a été amélioré par [31], [42] et récemment par [20].

**Proposition 100.** *Pour tous les $x \geqslant 89\,693$, il existe un premier $p$ tel que*

$$x < p \leqslant x\left(1+\frac{1}{\ln^3 x}\right).$$

**Corollaire 101.** *Pour tous les $x \geqslant 468\,991\,632$, il existe un premier $p$ tel que*

$$x < p \leqslant x\left(1+\frac{1/5000}{\ln^2 x}\right).$$

Ce résultat est meilleur que celui de Trudgian. La méthode spécifique utilisée dans [31] donne de meilleurs résultats (si l'on compare avec le même ordre de $k$, c'est-à-dire $k = 0$) et a été mise à jour par [20].

*Démonstration.* Soit $0 < f(x) < 1$ pour $x \geqslant x_0$,

$$\begin{aligned}\theta\big(x(1+f(x))\big)-\theta(x) &\geqslant x(1+f(x)) - \eta_k\frac{x(1+f(x))}{\ln^k\big(x(1+f(x))\big)} - \left(x+\eta_k\frac{x}{\ln^k x}\right)\\ &> x\left(f(x)-\frac{2\eta_k}{\ln^k x}-\frac{\eta_k f(x)}{\ln^k x}\right).\end{aligned}$$

Choisissez $f(x) = \frac{\beta}{\ln^k x}$ avec $\beta \geqslant \frac{2\eta_k}{1+\eta_k/\ln^k x_0}$ pour avoir

$$\theta\left(\left(1+\frac{\beta}{\ln^k x}\right)x\right)-\theta(x) > 0.$$

Pour $k = 3$ et $x_0 = 4\cdot 10^{18}$, $n_3 = 0.499$ (Théorème 93 avec un peu plus de précision) nous avons $\beta \geqslant 0.998$. En utilisant les travaux sur les écarts maximaux entre les nombres premiers [23, 24] (ou repris dans le tableau 8 de [11]), nous procédons comme suit. Supposons que l'écart maximal de tous les nombres premiers entre $x_1$ et $x_2$ est de $\Delta$. Donc $p_{n+1} \leqslant p_n + \Delta$ qui est plus petit que notre borne aussi longtemps que $\frac{x_1}{\ln^k x_1} \geqslant \Delta/\beta$. Nous constatons donc facilement que le résultat est correct entre 360 653 et $4\cdot 10^{18}$. Nous vérifions par ordinateur la limite inférieure de la plage de validité. □

### 5.5.3 Estimation des sommes sur les nombres premiers.

Soit $\gamma$ la constante d'Euler ($\gamma \approx 0.5772157$). Pour plus de précision, on peut trouver d'autres décimales et une bibliographie sur l'Encyclopédie en ligne des séquences d'entiers (OEIS). La constante d'Euler est référencée comme la séquence A001620.

**Théorème 102.** *Soit* M, *la constante de Meissel-Mertens (séquence A077761 dans OEIS) donnée par la somme infinie*

$$\mathrm{M} = \gamma + \sum_p \big(\ln(1-1/p) + 1/p\big) \approx 0.26149\,72128\,47643.$$

*Nous avons pour* $x \geqslant 2\,278\,383$,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + \mathrm{M} + \mathcal{O}^*\left(\frac{0.2}{\ln^3 x}\right).$$

*Démonstration.* La somme des réciproques de premier ordre est liée à $\theta(x)$ par (4.20) de [37],

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \ln_2 x + \mathrm{M} + \frac{\theta(x)-x}{x\ln x} - \int_x^\infty \frac{(\theta(y)-y)(1+\ln y)}{y^2\ln^2 y}\,dy.$$

D'où

$$\Big|\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} - \ln_2 x - \mathrm{M}\Big| \leqslant \frac{|\theta(x)-x|}{x\ln x} + \int_x^\infty \frac{|\theta(y)-y|(1+\ln y)}{y^2\ln^2 y}\,dy.$$

Avec une forme de borne supérieure comme $|\theta(x)-x| \leqslant \eta_k x/\ln^k x$ (voir le théorème 93) et comme

$$\int_x^\infty \frac{1+\ln y}{y\ln^{k+2} y}\,dy = \frac{1}{k\ln^k x} + \frac{1}{(k+1)\ln^{k+1} x},$$

nous avons le résultat

$$\left|\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} - \ln_2 x - \mathrm{M}\right| \leqslant \frac{\eta_k/k}{\ln^k x} + \frac{\eta_k(1+\frac{1}{k+1})}{\ln^{k+1} x}. \tag{5.21}$$

Pour $k=3$ et $\eta_3 = 0,5$, le résultat est valable pour $x \geqslant 767\,135\,587$ par le théorème 93. Nous vérifions par ordinateur que le résultat reste valable pour des valeurs de $2\,278\,383 \leqslant x \leqslant 767\,135\,587$. □

**Théorème 103.** *Soit* $\mathrm{B}_3$ *(séquence A083343 dans OEIS) la constante donnée par la somme infinie*

$$\mathrm{B}_3 = \gamma + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_p (\ln p)/p^n \approx 1.33258\,22757\,33221.$$

*Nous avons pour* $x \geqslant 912\,560$,

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x - \mathrm{B}_3 + \mathcal{O}^*\left(\frac{0.3}{\ln^2 x}\right).$$

*Démonstration.* Par (4.21) de [37],

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x - \mathrm{B}_3 + \frac{\theta(x)-x}{x} - \int_x^\infty \frac{\theta(y)-y}{y^2}\,dy.$$

D'où

$$|\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-\ln x+\mathrm{B}_3|\leqslant\frac{|\theta(x)-x|}{x}+\int_x^\infty\frac{|\theta(y)-y|}{y^2}dy.$$

Comme

$$\int_x^\infty\frac{dy}{y\ln^k y}=\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x},$$

nous obtenons

$$|\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}-\ln x+\mathrm{B}_3|\leqslant\left(\frac{\eta_k}{k-1}+\frac{\eta_k}{\ln x}\right)/\ln^{k-1}x.$$

Le théorème 93 donne le résultat pour $x\geqslant 767\,135\,587$ avec $k=3$ et $\eta_k=0,5$. Nous avons étendu la plage de validité par ordinateur. □

*Remarque* 104. Compte tenu de la définition de $\tilde{\psi}(x)$ de [29], le théorème précédent établit des bornes pour $\tilde{\theta}(x)=\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p}$. On peut trouver des constantes améliorées pour $\tilde{\psi}(x)$ si le théorème 91, améliorant les résultats sur $\psi(x)$ , est utilisé dans la preuve de Ramaré.

### 5.5.4 Estimations des produits sur les premiers

**Théorème 105.** *Nous avons pour $x\geqslant 2\,278\,382$,*

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{0.2}{\ln^3 x}\right)\right)$$

*Nous avons pour $x\geqslant 2278382$, et*

$$\prod_{p\leqslant x}\frac{p}{p-1}=e^{\gamma}\ln x\left(1+\mathcal{O}^*\left(\frac{0.2}{\ln^3 x}\right)\right).$$

*Démonstration.* Par définition de M (voir Théorème 102) et (5.21), nous avons

$$\left|-\gamma-\ln_2 x-\sum_{p>x}\frac{1}{p}-\sum_p\ln(1-1/p)\right|\leqslant\frac{\eta_k/k}{\ln^k x}+\frac{\eta_k(1+\frac{1}{k+1})}{\ln^{k+1}x}.$$

Soit $\mathrm{S}=\sum_{p>x}\left(\ln(1-1/p)+1/p\right)=-\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n}\sum_{p>x}\frac{1}{p^n}$. Nous avons

$$-\gamma-\ln_2 x-\sum_{p\leqslant x}\ln(1-1/p)-\mathrm{S}\geqslant-\frac{\eta_k}{k\ln^k x}-\frac{(k+2)\eta_k}{(k+1)\ln^{k+1}x}.$$

Prenons l'exponentielle de chaque côté pour obtenir

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leqslant\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\exp\left(-\mathrm{S}+\frac{\eta_k}{k\ln^k x}+\frac{(k+2)\eta_k}{(k+1)\ln^{k+1}x}\right).$$

Nous utilisons la limite inférieure de S donnée dans [37] p. 87 :

$$-\mathrm{S}<\frac{1.02}{(x-1)\ln x}.$$

Donc, pour $k=3$, $\eta_3=0,5$ et $x\geqslant 767\,135\,587$,

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leqslant\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\exp(0.1973/\ln^3 x)\leqslant\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}(1+0,2/\ln^3 x).$$

Nous avons également

$$\prod_{p\leqslant x}\frac{p-1}{p}\geqslant e^{\gamma}\ln x\exp(-0.1973/\ln^3 x).$$

De la même manière, comme

$$-\gamma-\ln_2 x-\sum_{p\leqslant x}\ln(1-1/p)-S\leqslant\frac{\eta_k}{k\ln^k x}+\frac{(k+2)\eta_k}{(k+1)\ln^{k+1}x},$$

on obtient les autres inégalités comme $S<0$. □

### 5.5.5 Encadrements pour le $k^{\text{ième}}$ nombre premier

### 5.5.6 Encadrements de base

**Lemme 106.**

$$p_k\leqslant k\ln p_k \quad \textit{pour} \quad k\geqslant 4, \tag{5.22}$$

$$\ln p_k\leqslant \ln k+\ln\ln k+1 \quad \textit{pour} \quad k\geqslant 2. \tag{5.23}$$

*Démonstration.* Nous déduisons (5.22) de $\pi(x)>\frac{x}{\ln x}$ (Corollaire 1 de [37]). Par le théorème 3 de [37], nous avons $p_k<k(\ln k+\ln\ln k-1/2)$ d'où $p_k<ek\ln k$ pour $k\geqslant 2$. □

### 5.5.7 Estimation de $\theta(p_k)$

Nous avons un développement asymptotique de $\theta(p_k)$. dont les premiers termes par [5] sont

$$\theta(p_k)=k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln\ln k-2}{\ln k}-\frac{\ln\ln^2 k-6\ln\ln k+11}{2\ln^2 k}+O\left(\frac{\ln\ln^3 k}{\ln^3 k}\right)\right).$$

Massias et Robin [21, Th. B(v)] ont obtenu une borne supérieure qui correspond aux premiers termes du développement asymptotique

$$\theta(p_k)\leqslant k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln\ln k-2}{\ln k}\right) \quad \text{for } k\geqslant 198. \tag{5.24}$$

Nous obtenons ici les limites inférieures suivantes :

**Proposition 107.**

$$\theta(p_k)\geqslant k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln\ln k-2.050735}{\ln k}\right) \quad \textit{for } p_k\geqslant 10^{11},$$

$$\theta(p_k)\geqslant k\left(\ln k+\ln\ln k-1+\frac{\ln\ln k-2.04}{\ln k}\right) \quad \textit{for } p_k\geqslant 10^{15}.$$

*Démonstration.* Nous procédons de la même manière que pour [21]. Soit $f_\beta$ défini par

$$n\mapsto n\left(\ln n+\ln\ln n-1+\frac{\ln\ln n-\beta}{\ln n}\right).$$

Nous voulons prouver que $\theta(p_n)\geqslant f_\beta(n)$. Définissez la fonction $h_a$ par

$$h_a(n)=n\left(\ln n+\ln\ln n-a\right).$$

Supposons qu'il existe $a$ tel que $p_k \geqslant h_a(k)$ pour $k \geqslant k_0$. D'où

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) = \sum_{n=k_0+1}^{k} \ln p_n \geqslant \sum_{n=k_0+1}^{k} \ln h_a(n).$$

Nous avons $f'_\beta \leqslant \ln h_a$ si

$$\frac{\ln\ln n - \beta + 1}{\ln n} - \frac{\ln\ln n - \beta - 1}{\ln^2 n} \leqslant \ln\left(1 + \frac{\ln\ln n - a}{\ln n}\right). \tag{5.25}$$

Nous pouvons réécrire (5.25) comme

$$\beta(1 - 1/\ln n) \geqslant 1 + \ln\ln n - \ln\left(1 + \frac{\ln\ln n - a}{\ln n}\right)\ln n - \frac{\ln\ln n - 1}{\ln n}. \tag{5.26}$$

Pour $a \in [0,95,1]$ et $t \geqslant 22$, la fonction $t \mapsto (\ln t + 1 - t\ln\left(1 + \frac{\ln t - a}{t}\right) - \frac{\ln t - 1}{t})/(1 - 1/t)$ est décroissante. Par [9], on peut choisir $a = a_0 = 1$. Pour $k \geqslant e^{100}$, la valeur $\beta = 2,048$ satisfait (5.26). Pour $\pi(10^{11}) \leqslant k \leqslant e^{100}$, la valeur $\beta_0 = 2.094$ satisfait (5.26). D'où

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - \beta_0}{\ln k}\right).$$

Puis $p_k \geqslant \theta(p_k) - \eta_2 \frac{k}{\ln k}$ par le théorème 93 & (5.22)), il vient $p_k \geqslant h_{a_1}(k)$ avec $a_1 = 1 - \frac{\ln\ln k - (\beta_0 + \eta_2)}{\ln k}$. En divisant l'intervalle de $k$, nous utilisons différentes valeurs de $a$ avec des valeurs adaptées de $\eta_2$. En itérant le processus, on obtient $\beta = 2.050735$ pour $k \geqslant k_0 = \pi(10^{11})$. Cette valeur de $\beta$ permet de vérifier $\theta(p_{k_0}) \geqslant f_\beta(k_0)$.

De la même manière, on obtient $\beta = 2.038$ pour $k \geqslant \pi(10^{15})$ grâce au lemme 92. □

**Proposition 108.** *Pour $k \geqslant 781$,*

$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2}{\ln k} - \frac{0.782}{\ln^2 k}\right)$$

*Démonstration.* La proposition vient de l'utilisation des lemmes 110 et 109. □

**Lemme 109.** *Soient deux entiers $k_0, k$ et un réel $\gamma > 0$. Supposons que pour $k_0 \leqslant n \leqslant k$,*

$$p_n \leqslant n\left(\ln n + \ln\ln n - 1 + \frac{\ln\ln n - 1.95}{\ln n}\right).$$

*Soit $s(k) = k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2}{\ln k} - \frac{\gamma}{\ln^2 k}\right)$. Soit $f(k) = s(k) - (\ln k + \ln\ln k + 1)$.*

*Si $\theta(p_{k_0 - 1}) \leqslant f(k_0)$ alors $\theta(p_k) \leqslant s(k)$ pour tous les $k \geqslant k_0$.*

*Démonstration.* Soit $S_a(n)$ une borne supérieure pour $p_n$ pour $k_0 \leqslant n \leqslant k$ où

$$S_a(n) = n\left(\ln n + \ln\ln n - 1 + \frac{\ln\ln n - a}{\ln n}\right).$$

Maintenant, pour $2 \leqslant k_0 \leqslant k$, on écrit

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0} - 1) = \sum_{n=k_0}^{k-1} \ln p_n \leqslant \sum_{n=k_0}^{k-1} \ln S_a(n) \leqslant \int_{k_0}^{k} \ln S_a(n)\,dn.$$

Ensuite, nous allons prouver que $\ln S_a(n) \leqslant f'(n)$. Nous avons

$$\ln S_a(n) = \ln n + \ln\ln n + \ln(1 + u(n))$$

avec $u(n) = \frac{\ln\ln n - 1}{\ln n} + \frac{\ln\ln n - a}{\ln^2 n}$ et

$$f'(n) = \ln n + \ln n + \frac{\ln\ln n - 1}{\ln n} - \frac{\ln\ln n + \gamma - 3}{\ln^2 n} + \frac{2\gamma}{\ln^3 n} - \frac{1}{n}(1 + 1/\ln n).$$

Soit $\beta < 1/2$ tel que $\ln(1 + u(n)) \leqslant u(n) - \beta u^2(n)$ pour $n \geqslant k_0$. Puis $\ln S_a(n) \leqslant f'(n)$ si

$$\beta\left(\frac{\ln\ln n - 1}{\ln n} + \frac{\ln\ln n - a}{\ln^2 n}\right)^2 - \frac{2\ln\ln n + \gamma - 3 - a}{\ln^2 n} + 2\gamma/\ln^3 n - 1/n - 1/(n\ln n) \geqslant 0,$$

que nous pouvons simplifier en

$$\frac{A}{\ln^2 n} + 2\frac{B}{\ln^3 n} + \beta\frac{(\ln\ln n - a)^2}{\ln^4 n} - 1/n - 1/(n\ln n) \geqslant 0$$

où

$$A = \beta\ln\ln^2 n - 2(\beta+1)\ln\ln n + 3 + a + \beta - \gamma$$
$$B = \beta\ln\ln^2 n - \beta(a+1)\ln\ln n + a\beta + \gamma$$

Nous avons $1/n + 1/(n\ln n) \leqslant 0,02/\ln^3 n$ pour $n \geq 10^5$.

Nous étudions chaque partie, en substituant $\ln\ln n$ par X :

- $\beta X^2 - 2(\beta+1)X + 3 + a + \beta - \gamma \geqslant 0$ pour tout X si $\gamma - a - 1 + 1/\beta \leqslant 0$,
- $X^2 - (a+1)X + (a + \gamma/\beta + 0,01/\beta) \geqslant 0$ pour tout X si $a^2 - 2a + 1 - 4(\gamma/\beta + 0,01/\beta) \leqslant 0$,
- $X^2 - 2aX + a^2 = (X-a)^2 \geqslant 0$.

Nous choisissons $\gamma$ de telle sorte que $\gamma - a - 1 + 1/\beta = 0$.

Nous choisissons $\beta = \frac{u(k_0) - \ln(1+u(k_0))}{u^2(k_0)}$. Avec $a = 1.95$ et $k_0 = 178974$, nous avons $\beta = 0.461291475\cdots$ et $\gamma = 0.78217325\cdots$. D'où $\theta(p_{k-1}) - f(k) \leqslant \theta(p_{k_0} - 1) - f(k_0)$.

Comme $\theta(p_{k_0} - 1) \leqslant f(k_0)$, nous avons $\theta(p_{k-1}) - f(k) \leqslant 0$. Nous obtenons la limite supérieure $\theta(p_k) = \theta(p_{k-1}) + \ln p_k \leqslant f(k) + \ln p_k < s(k)$ par (5.23).

□

**Estimations sur $p_k$**

**Lemme 110.** *Pour $k \geqslant 178974$,*

$$p_k \leqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 1.95}{\ln k}\right).$$

*Démonstration.* En remplaçant $x$ par $p_k$ dans $|\theta(x) - x| \leqslant \eta_2 \frac{x}{\ln^2 x}$, nous obtenons

$$|p_k - \theta(p_k)| \leqslant \eta_2 \frac{p_k}{\ln^2 p_k}.$$

Par (5.22), nous avons $\frac{p_k}{\ln^2 p_k} \leqslant \frac{k}{\ln k}$ et

$$|p_k - \theta(p_k)| \leqslant \eta_2 \frac{k}{\ln k}. \tag{5.27}$$

En utilisant la limite supérieure (5.24) de $\theta(p_k)$, nous avons

$$p_k \leqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2 + \eta_2}{\ln k}\right).$$

Nous utilisons $\eta_2 = 0.05$ pour $p_k \geqslant 122\,568\,683$ par le théorème 93. □

**Proposition 111.** *Pour* $k \geqslant 688\,383$,

$$p_k \leqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2}{\ln k}\right).$$

*Démonstration.* Nous utilisons la proposition 108 avec $\eta_3 = 0,78$ du théorème 93 pour $\ln p_k > 27$. Une vérification informatique permet de vérifier la validité de l'inégalité sur les petites valeurs et de conclure la preuve. □

**Proposition 112.** *Pour* $k \geqslant 3$,

$$p_k \geqslant k\left(\ln k + \ln\ln k - 1 + \frac{\ln\ln k - 2.1}{\ln k}\right).$$

*Démonstration.* En utilisant (5.27), nous avons

$$p_k \geqslant \theta(p_k) - \eta_2 \frac{k}{\ln k}.$$

Puis par la proposition 107 avec $\eta_2 = 0.04913$, nous concluons la preuve. □

TABLE 5.1 – Valeurs de $\theta(x)$ pour $10^{10} \leqslant x \leqslant 10^{15}$

| $x$ | $\theta(x)$ | $\psi(x)-\theta(x)$ |
|---|---|---|
| 1E + 10 | 9999939830.657757 | 102289.175716 |
| 2E + 10 | 19999821762.768212 | 144339.622582 |
| 3E + 10 | 29999772119.815419 | 176300.955450 |
| 4E + 10 | 39999808348.775748 | 203538.541084 |
| 5E + 10 | 49999728380.731899 | 227474.729168 |
| 6E + 10 | 59999772577.550769 | 249003.320704 |
| 7E + 10 | 69999769944.203933 | 268660.720820 |
| 8E + 10 | 79999718357.195652 | 287365.266118 |
| 9E + 10 | 89999644656.090911 | 304250.688854 |
| 1E + 11 | 99999737653.107445 | 320803.322857 |
| 2E + 11 | 199999695484.246439 | 453289.609568 |
| 3E + 11 | 299999423179.995211 | 554528.646163 |
| 4E + 11 | 399999101196.308601 | 640000.361434 |
| 5E + 11 | 499999105742.583455 | 715211.001138 |
| 6E + 11 | 599999250571.436655 | 783167.715577 |
| 7E + 11 | 699998999499.845475 | 845911.916175 |
| 8E + 11 | 799999133776.084743 | 904203.190001 |
| 9E + 11 | 899998818628.952024 | 958602.924046 |
| 1E + 12 | 999999030333.096225 | 1009803.669232 |
| 2E + 12 | 1999998755521.470649 | 1427105.865316 |
| 3E + 12 | 2999997819758.987859 | 1746299.820370 |
| 4E + 12 | 3999998370195.717561 | 2016279.693623 |
| 5E + 12 | 4999998073643.711478 | 2253672.042145 |
| 6E + 12 | 5999997276726.877147 | 2467566.593710 |
| 7E + 12 | 6999996936360.165729 | 2665065.541181 |
| 8E + 12 | 7999997864671.383505 | 2848858.049155 |
| 9E + 12 | 8999996425300.244577 | 3021079.319393 |
| 1E + 13 | 9999996988293.034200 | 3183704.089025 |
| 2E + 13 | 19999995126082.228688 | 4499685.436490 |
| 3E + 13 | 29999995531389.845427 | 5509328.368277 |
| 4E + 13 | 39999993533724.316829 | 6359550.652121 |
| 5E + 13 | 49999992543194.263655 | 7109130.001413 |
| 6E + 13 | 59999990297033.626198 | 7785491.725387 |
| 7E + 13 | 69999994316409.871731 | 8407960.376833 |
| 8E + 13 | 79999990160858.304239 | 8988688.375101 |
| 9E + 13 | 89999989501395.073897 | 9531798.550749 |
| 1E + 14 | 99999990573246.978538 | 10045400.569463 |
| 2E + 14 | 199999983475767.543204 | 14201359.711421 |
| 3E + 14 | 299999986702246.281944 | 17388356.540338 |
| 4E + 14 | 399999982296901.085038 | 20074942.600622 |
| 5E + 14 | 499999974019856.236519 | 22439658.012185 |
| 6E + 14 | 599999983610646.997632 | 24580138.242324 |
| 7E + 14 | 699999971887332.157455 | 26545816.027402 |
| 8E + 14 | 799999964680836.091645 | 28378339.693784 |
| 9E + 14 | 899999961386694.231242 | 30098146.961102 |
| 1E + 15 | 999999965752660.939840 | 31724269.567843 |

## 5.6 Références


[1] APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag, 1976. [page 87]

[2] AXLER, C. New bounds for the prime counting function $\pi(x)$. *arXiv* (2014). [page 88]

[3] BERKANE, D., AND DUSART, P. On a constant related to the prime counting function. *Mediterranean Journal of Mathematics* (2015), 1–10. [page 88]

[4] CESARO, E. Sur une formule empirique de M. Pervouchine. *Comptes Rendus hebdo. des Séances de l'Académie des Sciences CXIX* (1894), 848–849. [page 80]

[5] CIPOLLA, M. La determinazione assintotica dell'$n^{imo}$ numero primo. *Rendiconti Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli 8* (1902), 132–166. [page 80, 92]

[6] COSTA PEREIRA, N. Corrigendum : "Estimates for the Chebyshev function $\psi(x) - \theta(x)$" [Math. Comp. **44** (1985), no. 169, 211–221, MR 86k :11005]. *Mathematics of Computation 48*, 177 (Jan. 1987), 447–447. See [27]. [page 98]

[7] DELÉGLISE, M., AND RIVAT, J. Computing psi(x). *Mathematics of Computation* (1998), 1691–1696. [page 84]

[8] DUSART, P. Inégalités explicites pour $\psi(x)$, $\theta(x)$, $\pi(x)$ et les nombres premiers. *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. 21* (1999), 53–59. [page 79]

[9] DUSART, P. The $k^{\text{th}}$ prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Mathematics of Computation 68*, 225 (1999), 411–415. [page 93]

[10] DUSART, P. Estimates of $\psi$, $\theta$ for large values of $x$ without the Riemann hypothesis. *Mathematics of Computation 85*, 298 (2016), 875–888. [page 80, 84, 85]

[11] E SILVA, T. O., HERZOG, S., AND PARDI, S. Empirical verification of the even goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4{\cdot}10^{18}$. *Math. Comput. 83*, 288 (2014). [page 89]

[12] EDWARDS, H. M. *Riemann's Zeta Function.* Academic Press,, New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Reprinted by Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2001. [page 81]

[13] FABER, L., AND KADIRI, H. New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation 84*, 293 (2015), 1339–1357. See corrigendum [14]. [page 79, 81, 82, 83, 84, 97]

[14] FABER, L., AND KADIRI, H. Corrigendum to New bounds for $\psi(x)$. *Mathematics of Computation 87*, 311 (July 2018), 1451–1455. See [13]. [page 97]

[15] GOURDON, X. "the $10^{13}$ first zeros of the Riemann zeta function, and zeros computation at very large height". `http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf`. [page 80, 81]

[16] GRAM, J. P. Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Acta Mathematica 27*, 1 (1903), 289–304. [page 81]

[17] INGHAM, A. *The Distribution of Prime Numbers.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1932. [page 87]

[18] KADIRI, H. Une région explicite sans zéros pour la fonction $\zeta$ de Riemann. *Acta Arith. 117*, 4 (2005), 303–339. [page 79, 82]

[19] KADIRI, H. A zero density result for the Riemann zeta function. *Acta Arith. 160*, 2 (2013), 185–200. [page 80, 82]

[20] KADIRI, H., AND LUMLEY, A. Short effective intervals containing primes. *Integers 14*, Paper No. A61 (2014), 18 pp. [page 89]

[21] MASSIAS, JEAN-PIERRE, R. G. Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux 8*, 1 (1996), 215–242. [page 79, 92]

[22] MOSSINGHOFF, M. J., AND TRUDGIAN, T. S. Nonnegative trigonometric polynomials and a zero-free region for the Riemann zeta-function. *Journal of Number Theory 157* (2015), 329–349. [page 79, 82]

[23] NICELY, T. R. New maximal prime gaps and first occurrences. *Math. Comp. 68*, 227 (1999), 1311–1315. [page 89]

[24] NYMAN, B., AND NICELY, T. R. New prime gaps between $10^{15}$ and $5 \times 10^{16}$. *J. Integer Seq. 6*, 3 (2003), Article 03.3.1, 6. [page 89]

[25] ODLYZKO, A. M. Tables of zeros of the Riemann zeta function. http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/. [page 81]

[26] PANAITOPOL, L. A formula for $\pi(x)$ applied to a result of Koninck-Ivić. *Nieuw Arch. Wiskd. (5) 1*, 1 (2000), 55–56. [page 88]

[27] PEREIRA, N. C. Estimates for the Chebyshev function $\psi(x) - \theta(x)$. *Mathematics of Computation 44*, 169 (Jan. 1985), 211–221. See corrigendum [6]. [page 79, 86, 97]

[28] PLATT, D. J., AND TRUDGIAN, T. S. On the first sign change of $\theta(x) - x$. *Mathematics of Computation 85* (2016), 1539–1547. [page 86, 88]

[29] RAMARÉ, O. Explicit estimates for the summatory function of $\Lambda(n)/n$ from the one of $\Lambda(n)$. *Acta Arith. 159*, 2 (2013), 113–122. [page 91]

[30] RAMARÉ, O. An explicit density estimate for Dirichlet L-series. *Math. Comp. 85*, 297 (2016), 325–356. [page 80, 82]

[31] RAMARÉ, O., AND SAOUTER, Y. Short effective intervals containing primes. *Journal of Number Theory 98*, 1 (2003), 10 – 33. [page 89]

[32] RIESEL, H. *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1985. [page 88]

[33] ROBIN, G. Estimation de la fonction de Tchebychef $\theta$ sur le $k$-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de $n$. *Acta Arithmetica 42*, 4 (1983), 367–389. [page 79]

[34] ROBIN, G. Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques. *Publications de l'Institut Mathématique 43(57)*, 63 (1988), 17–25. [page 80]

[35] ROSSER, J. B. The $n$-th prime is greater than $n \log n$. *Proceedings of the London Mathematical Society 45* (1939), 21–44. [page 79]

[36] ROSSER, J. B. Explicit bounds for some functions of prime numbers. *Am. J. Math. 63* (1941), 211–232. [page 79, 82]

[37] ROSSER, J. B., AND SCHOENFELD, L. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics 6*, 1 (03 1962), 64–94. [page 79, 85, 86, 90, 91, 92]

[38] ROSSER, J. B., AND SCHOENFELD, L. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. *Mathematics of Computation 29*, 129 (Jan. 1975), 243–269. [page 79, 84]

[39] SALVY, B. Fast computation of some asymptotic functional inverses. *Journal of Symbolic Computation 17*, 3 (1994), 227–236. [page 80]

[40] SCHOENFELD, L. Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II. *Mathematics of Computation 30*, 134 (Apr. 1976), 337–360. [page 79, 86, 89]

[41] TRUDGIAN, T. An improved upper bound for the error in the zero-counting formulae for Dirichlet L-functions and Dedekind zeta-functions. *Math. Comput. 84*, 293 (2015), 1439–1450. [page 82]

[42] TRUDGIAN, T. Updating the error term in the prime number theorem. *The Ramanujan Journal* (2015), 1–10. [page 79, 89]

[43] VAN DE LUNE, J., TE RIELE, H. J. J., AND WINTER, D. T. On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, iv. 667–681. [page 80]

[44] WEDENIWSKI, S. Zetagrid. In *Peer-to-Peer : Ökonomische, technische und juristische Perspektiven*. 2002, pp. 173–188. [page 80]

# Chapitre 6

# Dans les progressions arithmétiques

## 6.1 Introduction

**Définition 6.** *Soit* G *un groupe arbitraire. Une fonction $f$ définie sur* G *et à valeurs complexes est appelée* ***caractère*** *de* G *si $f$ admet la propriété d'être multiplicative*

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

*pour tous $a, b$ de* G *et si $f(c) \neq 0$ pour certains $c$ de* G.

**Théorème 113** (Th 6.7 Apostol [1])**.** *Si $f$ est un caractère d'un groupe fini* G *d'élément neutre $e$, alors $f(e) = 1$ et pour chaque valeur $f(a)$ de la fonction est une racine de l'unité. En fait, si $a^n = e$ alors $f(a)^n = 1$. (ou encore : tout caractère de* G *prend ses valeurs dans le sous-groupe $\mathbb{U}_g$ des racines $g$-ièmes de l'unité.)*

On note $\chi$ un caractère de G et $\hat{G}$ l'ensemble des caractères de G. On munit cet ensemble d'une structure de groupe multiplicatif :

- L'élément neutre de $\hat{G}$ (l'identité sur G), appelé **caractère principal** de G, sera noté $f_1$.
- Loi de composition interne : pour $f_1$ et $f_2$ deux caractères de G, la multiplication $f_1 \cdot f_2$ est l'homomorphisme $a \to f_1(a)f_2(a)$
- Symétrique : l'inverse du caractère $f$ est $\overline{f} : a \to \overline{f(a)}$, le conjugué de la valeur complexe de la fonction.

Ainsi $(\hat{G}, \cdot)$ aura donc une structure de groupe multiplicatif.

Note : Pour chaque caractère $f$, nous avons $|f(a)| = 1$. Ainsi $1/f(a)$ est égal au conjugué complexe $\overline{f(a)}$. Ainsi, la fonction $\overline{f}$ définie par $\overline{f}(a) = \overline{f(a)}$ est aussi un caractère de G. De plus, nous avons $\overline{f}(a) = \frac{1}{f(a)} = f(a^{-1})$.

**Théorème 114** (Th 6.8 Apostol [1])**.** *Un groupe abélien fini* G *d'ordre $n$ admet exactement $n$ caractères distincts.*

Il existe un caractère principal $(f_1)$, les autres sont non-principaux et ont la propriété que $f(a) \neq 1$ pour certains $a$ de G.

**Théorème 115** (Th 7.2 Ellison [7])**.** *Tout groupe abélien fini est isomorphe au produit direct d'un nombre fini de groupes cycliques.*

### 6.1.1 Caractère de Dirichlet

Le groupe G précédent est spécialisé pour être le groupe des classes des résidus modulo $k$. Une représentation de ce groupe est un ensemble de $\varphi(k)$ entiers, chacun étant relativement premier avec $k$. Pour chaque entier $a$, la classe correspondante $\hat{a}$ est l'ensemble de tous les entiers congruents à $a$ modulo $k$ :

$$\hat{a} = \{n : n \equiv a \pmod{k}\}.$$

La multiplication des classes de résidus est définie par la relation

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}.$$

(le produit des deux classes de résidus $\hat{a}$ par $\hat{b}$ est la classe du résidu de $ab$)

**Définition 7.** *Pour chaque caractère $f$ de* G*, on définit une fonction arithmétique $\chi$ correspondant à $f$ par*

$$\begin{cases} \chi(a) = f(\hat{a}) \text{ lorsque } (a,k) = 1 \\ \chi(a) = 0 \text{ lorsque } (a,k) > 1 \end{cases}$$

*Le caractère principal $\chi_1$ correspondant à $f_1$ est celui qui admet les propriétés suivantes :*

$$\chi_1(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } (a,k) = 1 \\ 0 \text{ si } (a,k) > 1 \end{cases}$$

**Définition 8.** *Un caractère de Dirichlet modulo $k$ est une fonction arithmétique $\chi$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui est :*

— *complètement multiplicative : $\chi(1) = 1$ et $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ ;*

— *$k$-périodique $\chi(a+k) = \chi(a)$ ;*

— *nulle sur les entiers non premiers avec $k$.*

### 6.1.2 Représentation explicite des caractères de Dirichlet

L'étude des caractères modulo $k$ nous montre que l'on peut réduire l'étude aux valeurs $k$ puissances d'un nombre premier $p$. Nous sommes amenés à distinguer deux cas suivant que $p = 2$ ou non.

• Soit $k = p^\alpha$ avec $p > 2$. Soit $g$ une racine primitive modulo $p^\alpha$. Si $a$ n'est pas un multiple de $p$ alors il existe un entier $n$ unique tel que $a = g^n \pmod{p}^\alpha$ avec $1 \leq n \leq \varphi(p^\alpha)$.

A chaque entier $m \in [1, \varphi(p^\alpha)]$, on fait correspondre la fonction $\chi_m$ définie par

$$\chi_m(a) = \begin{cases} \exp\left(\frac{2i\pi n(m-1)}{\varphi(p^\alpha)}\right) & \text{si} \quad (a,k) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad (a,k) \neq 1. \end{cases}$$

• Soit $k = 2^\alpha$, avec trois cas à considérer $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ ou $\alpha \geq 3$. Si $\alpha = 1$, le seul caractère est le caractère principal $\chi_1$. Si $\alpha = 2$ (soit $k = 4$), il existe deux caractères : le caractère principal $\chi_1$ et un autre caractère défini par :

$$\chi_2(a) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad a \equiv -1 \pmod{4} \\ 1 & \text{si} \quad a \equiv 1 \pmod{4} \\ 0 & \text{si} \quad a \equiv 0 \text{ ou } 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Si $\alpha \geq 3$, les puissances de $3 \pmod{2^\alpha}$ génèrent les entiers $n \equiv 3 \pmod 4$. Pour obtenir les entiers $n \equiv 1 \pmod 4$, il suffit de prendre les opposés c'est-à-dire les valeurs de $-3^\nu \pmod{2^\alpha}$. Ainsi les entiers $n \equiv \pm 1 \pmod 4$ peuvent être représentés par un unique couple $(\delta, \nu)$ avec $\delta \in \{0,1\}$ et $\nu \in \{0,1,\cdots 2^{\alpha-2}-1\}$ tel que l'entier $a = (-1)^\delta 3^\nu$. C'est une description explicite de l'isomorphisme $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^* \sim (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z})$. A chaque entier $m \in [1, \varphi(2^\alpha)]$, on fait correspondre la fonction $\chi_m$ définie par

$$\chi_m(a) = \begin{cases} (-1)^{(m-1)\delta} \exp\left(\frac{2i\pi\nu(m-1)}{\varphi(2^\alpha)}\right) & \text{si} \quad (a,k)=1 \\ 0 & \text{si} \quad (a,k) \neq 1, \text{ c'est-à-dire } a \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Exemple : Lorsque $k = 1$ ou $k = 2$, le seul caractère de Dirichlet est le caractère principal $\chi_1$.

Pour $k = 5$, les valeurs possibles pour $\chi(n)$ sont $\pm 1$ et $\pm i$. De plus, le caractère multiplicatif de $\chi$ donne $\chi(2)\chi(3) = \chi(6) = \chi(1) = 1$. Nous remarquons également que $\chi(4) = \chi(2)^2$. Ces informations permettent de compléter les valeurs de la fonction.

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | $-1$ | 0 |

$k = 3, \varphi(k) = 2$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |

$k = 4, \varphi(k) = 2$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 0 |
| $\chi_3(n)$ | 1 | $i$ | $-i$ | $-1$ | 0 |
| $\chi_4(n)$ | 1 | $-i$ | $i$ | $-1$ | 0 |

$k = 5, \varphi(k) = 4$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 |

$k = 6, \varphi(k) = 2$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 0 |
| $\chi_3(n)$ | 1 | $\omega^2$ | $\omega$ | $-\omega$ | $-\omega^2$ | $-1$ | 0 |
| $\chi_4(n)$ | 1 | $\omega^2$ | $-\omega$ | $-\omega$ | $\omega^2$ | 1 | 0 |
| $\chi_5(n)$ | 1 | $-\omega$ | $\omega^2$ | $\omega^2$ | $-\omega$ | 1 | 0 |
| $\chi_6(n)$ | 1 | $-\omega$ | $-\omega^2$ | $\omega^2$ | $\omega$ | $-1$ | 0 |

$k = 7, \varphi(k) = 6,\ \omega = e^{i\pi/3}$

Pour $k = 12$, $\chi(5)\chi(11) = \chi(7)$. La table peut se résumer ainsi (avec des valeurs nulles pour les $\chi_i(n)$ non décrites explicitement)

| $n$ | 1 | 5 | 7 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(n)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\chi_2(n)$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 0 |
| $\chi_3(n)$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 0 |
| $\chi_4(n)$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 0 |

$k = 12, \varphi(k) = 4$

### 6.1.3 Conducteur d'un caractère

**Définition 9.** *Soit $\chi$ un caractère (quelconque) de Dirichlet modulo $k$ et soit $d$ un diviseur positif de $k$. Le nombre $d$ est appelé modulus induit pour $\chi$ si l'on a*

$$\chi(a) = 1 \textit{ toutes les fois que } (a,k) = 1 \textit{ et } a \equiv 1 \pmod d.$$

**Théorème 116** (Th 8.13 Apostol [1]). *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $k$. Alors 1 est un modulus induit pour $\chi$ si et seulement si $\chi = \chi_1$.*

**Théorème 117** (Th 8.16 Apostol [1]). *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $k$ et supposons que $d|k$, $d > 0$. Alors $d$ est un modulus induit pour $\chi$ si et seulement si*

$$\chi(a) = \chi(b) \quad \textit{toutes les fois que } (a,k) = (b,k) = 1 \textit{ et } a \equiv b \pmod{d}.$$

**Définition 10.** *Soit $\chi$ un caractère de Dirichlet modulo $k$. Le plus petit modulus induit $d$ pour $\chi$ s'appelle le* ***conducteur*** *de $\chi$.*

La table suivante décrit l'un des caractères $\chi$ modulo 9 :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi(n)$ | 1 | $-1$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 |

La table est périodique modulo 3 ainsi 3 est un modulus induit pour $\chi$. En fait, $\chi$ réagit comme un nouveau caractère $\chi'$ mais cette fois modulo 3 :

| $n$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\chi'(n)$ | 1 | $-1$ | 0 |

Exemple : pour $k = 5$, il y a un caractère de conducteur 1 (le caractère principal $\chi_1$) et trois caractères de conducteur 5. Pour $k = 6$, il y a un caractère de conducteur 1 et un caractère de conducteur 3 ($\chi_2$).

## 6.2 Série de Dirichlet

En 1837, Dirichlet étudie les séries de la forme

$$\mathrm{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

où $\chi$ est un caractère modulo $k$, séries convergentes pour $\Re\mathrm{e}\, s > 1$.

**Théorème 118** (Th 7.7 Ellison [7]). *La fonction $\mathrm{L}(s,\chi)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re\mathrm{e}\, s > 0$ sauf si $\chi$ est le caractère principal. Dans ce cas, elle admet un pôle simple au point $s = 1$ et le résidu en ce point vaut $\varphi(k)/k$.*

Remarque : La fonction zêta de Hurwitz unifie l'étude de $\zeta$ et des fonctions L. Soit $\zeta(s,a)$ définie, pour $\Re\mathrm{e}\, s > 1$ et $a$ un réel strictement positif, par

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Pour $a = 1$, elle coïncide avec la fonction $\zeta$ de Riemann. En écrivant $n = qk + r$, où $1 \le r \le k$ et $q = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient

$$\mathrm{L}(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\chi(qk+r)}{(qk+r)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\left(q + r/k\right)^s} = k^{-s} \sum_{r=1}^{k} \chi(r)\zeta(s, r/k).$$

### 6.2.1 Equation fonctionnelle de $\mathrm{L}(s,\chi)$

Définissons la fonction somme de Gauss associée à $\chi$ par

$$\tau(\chi) = \sum_{r=1}^{k} \chi(r) e^{2i\pi r/k},$$

avec la propriété

$$\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)q.$$

Soit $\chi$ un caractère primitif modulo $q$. Définissons

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) \mathrm{L}(s,\chi), \tag{6.1}$$

où

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1, \\ 1 & \text{si } \chi(-1) = -1. \end{cases} \tag{6.2}$$

**Lemme 119.** *Pour $x > 0$ et $\alpha$ réel,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = x^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x + 2i\pi n\alpha}.$$

*Démonstration.* On rappelle que, pour toute fonction $f$ à valeurs complexes et intégrable sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier de $f$ est l'application $\hat{f}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t.$$

La formule sommatoire de Poisson est donnée par le théorème suivant : soient $a$ un réel strictement positif et $\omega_0 = 2\pi/a$. Si $f$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et intégrable telle que

$$\exists \mathrm{C} > 0,\ \exists \alpha > 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{\mathrm{C}}{(1+|x|)^{\alpha}} \quad \text{et} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m\omega_0)| < \infty,$$

alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m\omega_0) e^{\mathrm{i}m\omega_0 t}.$$

Selon la formule de sommation de Poisson, en prenant $t = 0$ et $a = 1$, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi m t} \mathrm{d}t,$$

ce qui avec $f$ bien choisie pour notre étude peut s'écrire

$$\mathrm{S} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\alpha)^2\pi/x - 2i\pi m t} \mathrm{d}t,$$

ce qui est justifié car, par intégration par parties,

$$\int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-(t+\alpha)^2\pi/x} \cos 2\pi m t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi m} \int_{\mathrm{N}}^{\infty} \sin 2\pi m t\, \mathrm{d}[e^{-(t+\alpha)^2\pi/x}]$$

et ainsi

$$\left|\sum_{m\neq 0}\int_{\mathrm{N}}^{\infty} e^{-(t+\alpha)^2\pi/x}\cos 2\pi m t\,\mathrm{d}t\right| < \mathrm{C}e^{-(\mathrm{N}+\alpha)^2\pi/x}.$$

En effectuant le changement de variable $u=(t+\alpha)/x$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2x\pi-2i\pi m(ux-\alpha)}x\mathrm{d}u\\ &= x\sum_m e^{2i\pi m\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2x\pi-2i\pi mxu}x\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or $u^2x\pi+2\pi imxu=\pi x(u+im)^2-\pi x(im)^2$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(u+\beta)^2}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi xv^2}\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{csgn}(x),$$

ainsi

$$\mathrm{S}=x\sum_m e^{2i\pi m\alpha}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-m^2\pi x}.$$

□

Ce lemme sera utilisé sous la forme ($\alpha=mq$ et $\mathrm{X}=x/q$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\left(\frac{x}{q}\right)+2\pi in\left(\frac{m}{q}\right)}=\left(\sqrt{\frac{x}{q}}\right)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+m/q)^2\pi/(x/q)}. \tag{6.3}$$

**Lemme 120.** *La fonction* $\Gamma$ *vérifie la formule de réflexion d'Euler, ou formule des compléments*

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\quad \Gamma(1-z)\,\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

*La fonction* $\Gamma$ *vérifie également la formule de duplication :*

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

**Proposition 121.** *Soit* $\mathfrak{a}$ *défini par (6.2). Soit* $\chi$ *un caractère primitif modulo* $q$*. L'équation fonctionnelle de* $\xi(s,\chi)$ *est*

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{i^{\mathfrak{a}}q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi).$$

*L'équation fonctionnelle de* $\mathrm{L}(s,\chi)$ *est*

$$\mathrm{L}(1-s,\overline{\chi})=\left(\frac{q}{2\pi}\right)^s\frac{\Gamma(s)}{\tau(\chi)}\left(e^{\pi is/2}+\chi(-1)e^{-\pi is/2}\right)\mathrm{L}(s,\chi).$$

*Démonstration.* Cas n°1 : $\chi(-1)=1$
A partir de la définition de la fonction $\Gamma$, il vient

$$\Gamma(s/2)=\int_0^{\infty} z^{s/2-1}e^{-z}\mathrm{d}z.$$

En faisant le changement de variable $z=\pi n^2x/q$,

$$\Gamma(s/2)=\int_0^{\infty}(\pi n^2/q)^{s/2-1}x^{s/2-1}e^{-\pi n^2x/q}(\pi n^2/q)\mathrm{d}x,$$

soit

$$\Gamma(s/2) = (\pi n^2/q)^{s/2} \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x/q} \mathrm{d}x$$

ou encore

$$\left(\frac{q}{\pi n^2}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-\pi n^2 x/q} \mathrm{d}x.$$

On multiplie par $\chi(n)$ et on somme selon $n$ :

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \mathrm{L}(s,\chi) = \int_0^\infty x^{s/2-1} [\sum_{n=1}^\infty \chi(n) e^{-\pi n^2 x/q}] \mathrm{d}x, \tag{6.4}$$

pour $\sigma > 1$. Comme $\chi(-1) = 1$ et $\chi(0) = 0$, nous pouvons réécrire l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{s/2-1} \omega(x,\chi) \mathrm{d}x,$$

où $\omega(x,\chi) = \sum_{n=-\infty}^\infty \chi(n) e^{-n^2 \pi x/q}$. Comme

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{m=1}^q \overline{\chi}(m) e^{2i\pi mn/q}$$

(vrai lorsque $(n,m) = 1$ et aussi lorsque $(n,m) > 1$), on a

$$\omega(x,\chi) = \sum_{-\infty}^\infty \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m=1}^q \overline{\chi}(m)^{2i\pi mn/q} e^{-n^2 \pi x/q}.$$

Une équation fonctionnelle relie $\omega(x,\chi)$ avec $\omega(x^{-1},\overline{\chi})$ :

$$\begin{aligned}
\tau(\overline{\chi})\omega(x,\chi) &= \sum_{m=1}^q \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-n^2\pi\frac{x}{q}+2\pi i n\frac{m}{q}} \\
&= \sum_{m=1}^q \overline{\chi}(m) \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-(n+\frac{m}{q})^2\pi\left(\frac{q}{x}\right)} \\
&= (q/x)^{1/2} \sum_{m=1}^q \overline{\chi}(m) \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-(nq+m)^2\pi/(xq)} \\
&= (q/x)^{1/2} \sum_{l=-\infty}^\infty \overline{\chi}(l) e^{-l^2\pi/(xq)} \\
&= (q/x)^{1/2} \omega(x^{-1},\overline{\chi}).
\end{aligned}$$

On reprend l'intégrale (6.4) découpée en deux parties :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \mathrm{L}(s,\chi) \\
&= \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{s/2-1} \omega(x,\chi) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-s/2-1} \omega(x^{-1},\chi) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{s/2-1} \omega(x,\chi) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \frac{q^{1/2}}{\tau(\overline{\chi})} \int_1^\infty x^{-s/2-1/2} \omega(x,\overline{\chi}) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Cette expression représente une fonction régulière de $s$ en tout point. C'est le prolongement analytique de $\mathrm{L}(s,\chi)$ sur l'ensemble du plan. La fonction est régulière en tout point

comme $\Gamma(s/2)$ n'est jamais nulle. De plus, si on remplace $s$ par $1-s$ et $\chi$ par son conjugué $\overline{\chi}$, l'expression précédente devient

$$\frac{1}{2}\frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)}\int_1^\infty x^{-s/2-1}\omega(x,\chi)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-s/2-1/2}\omega(x,\overline{\chi})\mathrm{d}x$$

qui est exactement l'expression précédente multipliée par le facteur $q^{1/2}/\tau(\chi)$ comme $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})=q$. Nous obtenons

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{L}(s,\chi)\cdot\frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)}=\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\mathrm{L}(1-s,\overline{\chi}),$$

Qui est valide pour un caractère primitif de module $q$ pour lequel $\chi(-1)=1$. Comme $\mathrm{L}(1-s,\overline{\chi})$ n'a pas de zéro pour $1-\sigma>1$ (ou encore $\sigma<0$) et que $\Gamma((1-s)/2)$ n'a pas de zéro du tout, les seuls zéros de $\mathrm{L}(s,\chi)$ pour $\sigma<0$ sont aux points $s=-2,-4,-6,\ldots$ qui correspondent aux pôles de $\Gamma(s/2)$. Il existe également un zéro de $\mathrm{L}(s,\chi)$ en $s=0$, qui correspond au pôle de $\Gamma(s/2)$ à cet endroit.

On obtient, avec la définition (6.1) de $\xi$

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi).$$

On obtient l'équation fonctionnelle de L par le lemme 120 en remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{s}{2})} &= \frac{2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)/\Gamma(s/2+1/2)}{\pi/(\sin(\pi(1/2-s/2))\Gamma(s/2+1/2))}\\ &= \frac{2^{1-s}}{\sqrt{\pi}}\sin(\pi/2-\pi s/2)\Gamma(s)=\frac{2^{1-s}}{\sqrt{\pi}}\cos(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s)\\ &= \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}(e^{i\pi s/2}+e^{-i\pi s/2})\Gamma(s).\end{aligned}$$

Cas n°2 : $(\chi(-1)=-1)$

Avec la même formule de départ qu'au cas précédent, mais au point $(s+1)/2$, il vient

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2))n^{-s}=\int_0^\infty ne^{-n^2\pi x/q}x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x,$$

et ainsi

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2))\mathrm{L}(s,\chi)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x, \tag{6.5}$$

où cette fois

$$\omega(x,\chi)=\sum_{-\infty}^{\infty}n\chi(n)e^{-n^2\pi x/q}.$$

Dans ce cas, l'équation fonctionnelle vérifiée par $\omega(x,\chi)$ est

$$\tau(\overline{\chi})\omega(x,\chi)=iqx^{-3/2}\omega(x^{-1},\overline{\chi})$$

car cette fois c'est la relation suivante qui intervient :

$$\sum_{-\infty}^{\infty}ne^{-n^2\pi x/q+2\pi imn/q}=i(q/x)^{3/2}\sum_{-\infty}^{\infty}(n+m/q)e^{-\pi(n+m/q)^2q/x}. \tag{6.6}$$

Le lemme 119 donne l'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi y+2\pi i n\alpha} = y^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2\pi y},$$

que l'on dérive par rapport à $\alpha$, ce qui donne une autre égalité justifiée par la convergence uniforme des séries obtenues :

$$2i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-n^2\pi y+2i\pi n\alpha} = -2\pi y^{-3/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2\pi y}.$$

En remplaçant $y$ par $x/q$ et $\alpha$ par $m/q$, on obtient (6.6). Maintenant en reprenant l'intégrale (6.5), par morceaux, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{1} \omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \omega(1/x,\chi)x^{-(s-1)/2}x^{-2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par $\omega(x,\chi)$ et le fait que dans ce cas $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = -q$, il vient

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+1)/2} \Gamma((s+1)/2))\mathrm{L}(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \omega(x,\chi)x^{(s-1)/2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{iq^{1/2}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^{\infty} \omega(x,\chi)x^{-s/2}\mathrm{d}x.$$

Cela donne un prolongement de la fonction $\mathrm{L}(s,\chi)$ régulier sur l'ensemble du plan. Si on remplace dans l'expression précédente $s$ par $1-s$ et $\chi$ par $\overline{\chi}$, on retrouve cette même expression multiplié par $iq^{1/2}/\tau(\chi)$. Cela prouve l'égalité suivante

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{1-s/2} \Gamma(1-s/2))\mathrm{L}(1-s,\overline{\chi}) = \frac{iq^{1/2}}{\tau(\chi)}\left(\frac{q}{\pi}\right)^{(s+1)/2} \Gamma((s+1)/2))\mathrm{L}(s,\chi).$$

On obtient, de même qu'au cas précédent, avec (6.1) et $\mathfrak{a} = 1$

$$\xi(1-s,\overline{\chi}) = i\frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi).$$

On obtient l'équation fonctionnelle de L par le lemme 120 en remarquant que

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})} &= \frac{2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s)/\Gamma(s/2)}{\pi/(\sin(\pi s/2)\Gamma(s/2))} \\
&= \frac{2^{1-s}}{\sqrt{\pi}}\sin(\pi s/2)\Gamma(s) \\
&= -i\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}(e^{i\pi s/2} - e^{-i\pi s/2})\Gamma(s).
\end{aligned}$$

□

## 6.3 Formule explicite de $\psi(x,\chi)$.

Pour un caractère $\chi$ quelconque de module $q$, définissons

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x} \chi(n)\Lambda(n).$$

La dérivée logarithmique de la formule du produit d'Euler donne

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}.$$

De la même façon qu'à la partie 1.2.3 du chapitre 1, nous modifions $\psi(x,\chi)$ par $\psi_0(x,\chi)$ dans le cas où $x$ est une puissance d'un nombre premier. La méthode classique s'applique et le résultat prend la forme de

$$\psi_0(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right]\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

Il faut alors calculer les résidus de $-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\frac{x^s}{s}$. Les pôles sont les zéros de $L(s,\chi)$ et en $s=0$.

Supposons d'abord que $\chi(-1)=-1$. Dans ce cas, la somme des résidus correspond à

$$\psi_0(x) = -\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{1-2m}}{2m-1}.$$

Supposons maintenant que $\chi(-1)=1$. Dans ce cas, $L(s,\chi)$ admet un zéro simple en $s=0$, et l'expression au voisinage de $s=0$ de $L'/L$ est de la forme

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \sim \frac{1}{s} + b(\chi) + \cdots$$

et $\frac{x^s}{s} \sim \frac{1}{s} + \log x + \cdots$ ainsi le résidu en $s=0$ est $-(\log x + b(\chi)$. L'expression devient

$$\psi_0(x) = -\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{-2m}}{2m}.$$

### 6.3.1 Expression du terme des restes

Nous allons maintenant étudier l'estimation du terme des restes d'erreur lorsque la somme est prise sur les racines avec $|\gamma| < T$ seulement. On suppose $x \geq 2$ et $T \geq 2$.

On a

$$\frac{L'(\sigma \pm iT,\chi)}{L(\sigma \pm iT,\chi)} = O(\log^2 qT) \quad \text{pour } -1 \leq \sigma \leq 2.$$

La contribution faite par les intégrales horizontales dans cet intervalle de $\sigma$ est ainsi

$$\text{Contrib_H1} << \frac{x\log^2 qT}{T\log x}.$$

Dans le demi-plan $\sigma \leq -1$, l'estimation du rapport $L'/L$, lorsque les zéros triviaux sont exclus par des cercles de rayon $1/2$, est

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(\log^2 qT) \quad \text{pour } -1 \leq \sigma \leq 2,$$

grandeur déduite de la dérivation logarithmique de l'équation fonctionnelle de $L(s,\chi)$. La contribution du reste des intégrales horizontales est donc négligeable :

$$\text{Contrib_H2} << \frac{\log qT}{Tx\log x}.$$

On obtient

$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - (1-\mathfrak{a})\log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{\mathfrak{a}-2m}}{2m-\mathfrak{a}} + R(x,T)$$

où $|R(x,T)| << \frac{x}{T}\log^2 qxT + (\log x)\min(1, x/(T < x >))$.

## 6.4 Calcul explicite

Les premiers travaux sur des bornes explicites dans les progressions arithmétiques ont été faits par McCurley[10, 8, 9] en travaillant sur les fonctions L puis développés par Ramaré&Rumely[12]. Les résultats suivants ont été extraits de ce dernier article.

### 6.4.1 Vérification de l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L

On dira que $L(s,\chi)$ vérifie GRH(H), l'hypothèse de Riemann généralisée jusqu'à une hauteur H, si tous les zéros non triviaux avec $|\gamma| \leq H$ vérifie $\beta = 1/2$. Nous avons vu que l'hypothèse de Riemann a été vérifiée pour $\zeta$ jusqu'à une hauteur $H = 545439823.215$ et Rumely[13] a vérifié cette hypothèse pour les fonctions L.

**Théorème 122** ([13]). *L'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) a été vérifiée jusqu'à une certaine hauteur :*

— *Chaque fonction* L *associée à un conducteur* $k \leq 13$ *vérifie GRH(10000).*

— *Chaque fonction* L *associée à un conducteur* $k$ *dans les ensembles*

$$\{k \leqslant 72\}, \quad \{k \leqslant 112, k \text{ non premier}\}, \quad \{116, 117, 120, 121, 124, 125, 128, 132,$$
$$140, 143, 144, 156, 163, 169, 180, 216, 243, 256, 360, 420, 432\}$$

*satisfait GRH(*2500*).*

### 6.4.2 Zone sans zéro pour L

Introduisons les constantes : $a_0 = 11.1859355312082048$, $a_1 = 19.073344004352$, $\alpha = (\sqrt{5}+1)/5$ et $w = a_1/a_0 \approx 1.705118356$.

**Théorème 123** (Th 3.6.3. de [12]). *Si* $\chi$ *est un caractère de conducteur* $k$ *et* $H \geq 1000$ *alors aucun zéro* $\beta + i\gamma$ *de* $L(s,\chi)$ *avec* $|\gamma| \geqslant H$ *vérifie*

$$1 - \beta \geq \frac{1}{R\ln(k|\gamma|/C_1(\chi))},$$

*où*

$$C_1(\chi) = C_1(\chi, H) = C_1 \exp\left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\frac{\alpha}{x}\sqrt{\frac{1}{\Delta}} + \frac{1}{x^2}\overline{G}(1+\Delta)}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{w}}\sqrt{\Delta} + \frac{1}{x\sqrt{w}} \cdot \Delta \cdot \overline{G}(1+\Delta)}\right) \tag{6.7}$$

*with* $\Delta = 1/(xR \cdot \ln(kH/C_1))$, $\overline{G}$ *donné par* $E(\sigma) - wS(\sigma) + \overline{D}/a_0$ *et* $\overline{D} = D^\star(k, 1+\Delta)$

$E(\sigma) = 1.08699 + 1.40018\sqrt{\sigma - 1} + 1.86576(\sigma - 1) + 2.32244(\sigma - 1)^{3/2}$

$C1 = 4.171838431, S(\sigma) = -\frac{1}{1+\Delta} + \frac{(1+\frac{4}{5}\sqrt{\Delta})\sqrt{1-\frac{8}{5}\sqrt{\Delta^2+\Delta}+\frac{4}{5}(\Delta^2+\Delta)}}{(1-\sqrt{\Delta^2+\Delta})^2}$;

La zone sans zéro dépend de la valeur du conducteur et nous pouvons en donner quelques exemples concrets :

| | | |
|---|---|---|
| Pour $k = 1$, | $C1(\chi, 545000000)$ | $= 38.32392162908310006733468713598939706 9$ |
| Pour $k = 3$, | $C1(\chi, 10000)$ | $= 20.92761233780055402559272807846445000 6$ |
| Pour $k = 5$, | $C1(\chi, 10000)$ | $= 24.10330518909331821078156686969583631 3$ |
| Pour $k = 12$, | $C1(\chi, 10000)$ | $= 29.69722378864183357984334139098918745 2$ |

### 6.4.3 Nombre de zéros

**Lemme 124.** *Si $\chi$ est un caractère de Dirichlet de conducteur $k$ et $T \geq 1$ un réel, alors le nombre $N(T,\chi)$ de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de $L(s,\chi)$ dans le rectangle $0 < \beta < 1$, $|\gamma| \leq T$ vérifie*

$$|N(T,\chi) - \frac{T}{\pi}\ln\left(\frac{kT}{2\pi e}\right)| \leq C_2 \ln(kT) + C_3$$

*avec $C_2 = 0.9185$ et $C_3 = 5.512$.*

### 6.4.4 Somme sur les inverses des modules des zéros

**Lemme 125.** *Si $k$ est le conducteur de $\chi$ et $L(s,\chi)$ satisfait GRH($H$) pour un $H \geq 1$ alors*

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\chi)}} \frac{1}{|\rho|} \leq \tilde{E}(H),$$

*avec*

$$\tilde{E}(H) = \frac{1}{2\pi}\ln^2(H) + \frac{\ln(\frac{k}{2\pi})}{\pi}\ln H + C_2 + 2\left(\frac{\ln(\frac{k}{2\pi e})}{\pi} + C_2 \ln k + C_3\right).$$

**Lemme 126.** *Soit $\chi$ est un caractère de conducteur $k$, $m \geq 1$ un entier et $x, x_0$ deux nombres réels tels que $x \geq x_0 \geq 1$ et $2R\ln^2(kH/C_1(\chi)) \geq \ln x_0$. Alors*

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\chi)}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} + \sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\bar{\chi})}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} \leq x(\tilde{A} + \tilde{B}) + \sqrt{x}(\tilde{C} + \tilde{D})$$

*où, avec $C_2 = 0.9185$ et $C_3 = 5.512$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \int_H^\infty \left\{\frac{\ln\left(\frac{kt}{2\pi}\right)}{\pi} + \frac{C_2}{t}\right\} \frac{\exp\{-\frac{\ln x_0}{R\ln(kt/C_1(\chi))}\}}{t^{m+1}} dt, \\
\tilde{B} &= \frac{1}{H^{m+1}} \exp\left\{-\frac{\ln x_0}{R\ln(kH/C_1(\chi))}\right\} 2(C_2\ln(kH) + C_3) \\
\tilde{C} &= \frac{1}{\pi m H^m}\left(\ln\left(\frac{kH}{2\pi}\right) + \frac{1}{m}\right), \\
\tilde{D} &= \frac{1}{H^{m+1}}\left(2C_2\ln(kH) + 2C_3 + \frac{C_2}{m+1}\right).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* L'équation fonctionnelle de fonctions L nous permet d'écrire :

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\chi)}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} + \sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\bar{\chi})}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}} = \sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\chi)}} \left(\frac{x^{1-(1-\beta)}}{|\gamma|^{m+1}} + \frac{x^{1-\beta}}{|\gamma|^{m+1}}\right).$$

L'un des $\beta$ ou $1-\beta$ est au plus égal à $1/2$, et l'autre est plus petit que la borne de la zone sans zéro :

$$1 - \frac{1}{R\ln(k|\gamma|/C_1(\chi))}.$$

Nous allons borner cette somme en deux parties en fonction de la position des zéros. En premier pour la somme,

$$\sum_{\substack{|\gamma|\geq H \\ \rho\in\mathcal{Z}(\chi)}} \frac{x^\beta}{|\gamma|^{m+1}}$$

avec les $\beta \leq 1/2$, une intégration par parties donne en utilisant le lemme 124 les expressions $\tilde{C} + \tilde{D}$. Pour la seconde,

$$\tilde{S}(x) = \sum_{\substack{|\gamma| \geq H \\ \rho \in \mathcal{Z}(\chi)}} \frac{x}{|\gamma|^{m+1}} \exp\{-\frac{\ln x}{R \ln(k|\gamma|/C_1(\chi))}\}.$$

Comme $\tilde{S}(x)/x$ est décroissante, il suffit d'évaluer $\tilde{S}(x_0)/x_0$. Introduisons

$$\Phi_m(t) = \frac{1}{t^{m+1}} \exp\{-\frac{\ln x}{R \ln(kt/C_1(\chi))}\},$$

qui intégrée par parties donne

$$\frac{\tilde{S}(x_0)}{x_0} = \sum_{\substack{|\gamma| \geq H \\ \rho \in \mathcal{Z}(\chi)}} \int_{|\gamma|}^{\infty} -\Phi'_m(t) \mathrm{d}t = \int_H^{\infty} (N(t,\chi) - N(H,\chi))(-\Phi_m(t)) \mathrm{d}t.$$

Mais

$$\frac{\Phi'_m(t)}{\Phi_m(t)} = \frac{m+1}{t \ln^2(kt/C_1(\chi))} \left[ -\ln^2(kt/C_1(\chi)) + \frac{\ln(x_0)}{(m+1)R} \right]$$

et l'hypothèse sur $x_0$ donne $-\Phi'(m)(t) \geq 0$ pour $t \geq H$. Le lemme 124 est alors réutilisé pour obtenir les termes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. □

### 6.4.5 Calcul du terme prédominant

Le terme prédominant est assez difficile à calculer et les logiciels en donnent une valeur moyenne approchée (par exemple, l'intégrale peut se calculer avec la méthode des rectangles ou des trapèzes). Le plus sûr est de se ramener à des primitives connues ou un peu plus étudiées que les autres (les fonctions de Bessel). Soit

$$K_\nu(z, w) = \frac{1}{2} \int_w^{\infty} t^{\nu-1} \exp(-\frac{z}{2}(t + 1/t)) \mathrm{d}t$$

$$U_m = \sqrt{\frac{Rm}{\ln x_0}} \ln\left(\frac{kH}{C_1(\chi)}\right)$$

$$z_m = 2\sqrt{\frac{m \ln x_0}{R}}$$

**Lemme 127.** *Par des manipulations algébriques, nous pouvons exprimer le terme prépondérant à l'aide des fonctions de Bessel :*

$$\begin{aligned} \tilde{A} \quad = \quad & \frac{2 \ln x_0}{\pi R m} \left(\frac{k}{C_1(\chi)}\right)^m K_2(z_m, U_m) \\ & + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{C_1(\chi)}{2\pi}\right) \sqrt{\frac{\ln x_0}{Rm}} \left(\frac{k}{C_1(\chi)}\right)^m K_1(z_m, U_m) \\ & + 2C_2 \sqrt{\frac{\ln x_0}{R(m+1)}} \left(\frac{k}{C_1(\chi)}\right)^{m+1} K_1(z_{m+1}, U_{m+1}) \end{aligned}$$

Les fonctions de Bessel peuvent être majorées et leur reste bien exprimé avec la fonction d'erreur complémentaire :

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

**Lemme 128.** *Posons* $y = \frac{\sqrt{w}-1/\sqrt{w}}{\sqrt{2}}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1(z,w) &< \frac{e^{-z}}{2z}\left\{(1+\frac{3\sqrt{2}}{8}y)e^{-zy^2} + (\frac{3}{8\sqrt{z}}+\sqrt{z})\sqrt{\frac{\pi}{2}}erfc(y\sqrt{z})\right\} \\
\mathrm{K}_2(z,w) &< \frac{e^{-z}}{2z}\left\{\left[\frac{35\sqrt{2}}{64}y^3 + 2y^2 + (\frac{105}{128z}+\frac{15}{8})\sqrt{2}y + 2 + 2/z\right]e^{-zy^2}\right. \\
&\quad \left. + (\frac{105}{128\sqrt{z}}+\frac{15}{8}+z)\sqrt{\frac{\pi}{2z}}erfc(y\sqrt{z})\right\}
\end{aligned}$$

### 6.4.6 Estimation de $\psi(x;k,l)$

Pour les valeurs jusqu'à $10^{10}$, l'article de Ramaré&Rumely [12] donne des résultats très précis à l'aide de calculs exacts par intervalles $[10^n, 10^{n+1}]$ et en donne une borne couvrant les modules étudiés :

**Théorème 129.** *Pour tous les modules* $k \le 100$ *(et quelques autres* $k$ *non premiers construits à partir des précédents), les bornes suivantes conviennent, uniformément sur l'intervalle* $0 \le x \le 10^{10}$ *:*

$$\begin{aligned}
|\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| &\le 2.072\sqrt{x} \\
|\theta(x;k,l) - \frac{x-\mathrm{N}(k,l)}{\varphi(k)}| &\le 1.174\sqrt{x} \\
|\psi(x;k,l) - x/\varphi(k)| &\le 1.745\sqrt{x}
\end{aligned}$$

*où* $\mathrm{N}(k,l)$ *est le nombre de solutions de l'équation* $a^2 \cong l \pmod{k}$. *Si* $k = 5, k \ge 7$ *ou* $x \ge 224$ *alors*

$$|\psi(x;k,l) - x/\varphi(k)| \le \sqrt{x},$$

*et pour* $k = 1,3,4$, *cela convient pour* $x \ge 14$.

Pour les valeurs plus grandes, il faudra se retourner sur les estimations à l'aide des résultats obtenus précédemment.

**Théorème 130** (McCurley, Th3.6 [8])**.** *Soit* $x \ge 1$ *un nombre réel, un entier* $k \ge 1$, $m$ *un entier positif,* $\delta$ *un nombre réel tel que* $0 < \delta < \frac{x-2}{mx}$ *et* $\mathrm{H} > 0$ *un nombre réel. Soit*

$$\mathrm{A}(m,\delta) = \frac{1}{\delta^m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(1+j\delta)^{m+1}.$$

*Supposons que pour chaque* $\chi$ *de module* $k$, $\mathrm{L}(s,\chi)$ *satisfait GRH(1). Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(k)}{x}\max_{1\le y\le x}\left|\psi(y;k,l) - \frac{y}{\phi(k)}\right| &< \mathrm{A}(m,\delta)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{Z}(\chi)\\|\gamma|>\mathrm{H}}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)\cdots(\rho+m)|} \\
&\quad + (1+m\delta/2)\sum_{\chi}\sum_{\substack{\rho\in\mathcal{Z}(\chi)\\|\gamma|\le\mathrm{H}}}\frac{x^{\beta-1}}{|\rho|} + \frac{m\delta}{2} + \tilde{\mathrm{R}},
\end{aligned}$$

*où* $\sum_\chi$ *désigne la somme sur tous les caractères modulo* $k$,

$$\tilde{\mathrm{R}} = \frac{\varphi(k)}{x}[(f(k)+0.5)\ln x + 4\ln k + 13.4], \tag{6.8}$$

*et* $f(k)$ *donnée par* $f(k) = \sum_{p|k} \frac{1}{p-1}$.

En intégrant les résultats précédents, nous obtenons

**Théorème 131.** *Soit* $k \geq 1$ *un entier, et* $\mathrm{H} \geq 1000$ *un nombre réel tel que chaque fonction-L de module* $k$ *vérifie GRH(*H*). Posons* $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1(\chi, \mathrm{H})$ *où* $\chi_0$ *est le caractère trivial et soit* $x_0$ *un nombre réel tel que* $\mathrm{R} \cdot \ln^2(\mathrm{H}/\mathrm{C}) \geq \ln x_0$. *Soit* $m \geq 2$ *un entier et soit* $\delta > 0$ *un nombre réel tel que* $0 < \delta < (x_0 - 2)/(m x_0)$. *Pour tout* $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(k)}{x} \max_{1 \leq y \leq x} |\psi(y;k,l) - \frac{y}{\varphi(k)}| \quad \leq \quad & \frac{(1+(1+\delta)^{m+1})^m}{\delta^m} \frac{\varphi(k)}{2}((\tilde{\mathrm{A}} + \tilde{\mathrm{B}}) + \frac{1}{\sqrt{x_0}}(\tilde{\mathrm{C}} + \tilde{\mathrm{D}})) \\ & + (1 + m\delta/2)\frac{\varphi(k)}{\sqrt{x_0}}\tilde{\mathrm{E}}(\mathrm{H}) + \frac{m\delta}{2} + \tilde{\mathrm{R}}\end{aligned}$$

Nous pouvons également détailler chaque caractère modulo $k$ selon son conducteur $d$. Cela conduit au théorème suivant :

**Théorème 132** (Th 5.1.1 de [12])**.** *Soit* $k$ *un entier. Pour chaque caractère* $\chi$ *modulo* $k$, *soit* $\mathrm{H}_\chi \geq 1000$ *tel que* $\mathrm{L}(s,\chi)$ *satisfait GRH(*$\mathrm{H}_\chi$*); On suppose que* $\mathrm{H}_\chi = \mathrm{H}_{\overline{\chi}}$ *pour tous les* $\chi$ *et posons* $\mathrm{C}_1(\chi) = \mathrm{C}_1(\chi, \mathrm{H}_\chi)$. *Soit* $x_0 \geq 10$ *un nombre réel tel que pour chaque* $d$ *divisant* $k$ *et pour chaque* $\chi$ *de conducteur* $d$, $2\mathrm{R}\ln^2(d\mathrm{H}_\chi/\mathrm{C}_1(\chi)) \geq \ln x_0$. *Soit* $m \geq 1$ *un entier et* $\delta > 0$ *un nombre réel tel que* $0 < \delta < (x_0 - 2)/(m x_0)$. *Pour chaque* $\chi$ *de conducteur* $d$, *soit* $\tilde{\mathrm{A}}_\chi$, $\tilde{\mathrm{B}}_\chi$, $\tilde{\mathrm{C}}_\chi$ *et* $\tilde{\mathrm{D}}_\chi$ *les constantes du lemme 126 calculées en utilisant* $d$ *et* $\mathrm{H}_\chi$. *Soit* $\tilde{\mathrm{E}}_\chi$ *une valeur majorant* $\sum_{\substack{\rho \in \mathcal{Z}(\chi) \\ |\beta| \leq \mathrm{H}_\chi}} \frac{1}{|\rho|}$. *Soit* $\tilde{\mathrm{R}}$ *comme dans le théorème 130. Alors pour* $x \geq x_0$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\psi, x, k) \leq \quad & \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{A}(m,\delta) \textstyle\sum_\chi \left[\tilde{\mathrm{A}}_\chi + \tilde{\mathrm{B}}_\chi + (\tilde{\mathrm{C}}_\chi + \tilde{\mathrm{D}}_\chi)/\sqrt{x_0}\right] \\ & + \tfrac{1+m\delta/2}{\sqrt{x_0}} \left(\textstyle\sum_\chi \tilde{\mathrm{E}}_\chi\right) + m\delta/2 + \tilde{\mathrm{R}}_\chi.\end{aligned}$$

La table 6.1 donne les valeurs trouvées par cette méthode. Les valeurs ne sont pas celles d'origine, elles ont été recalculées et sont conformes à celles présentées dans l'article. Les bornes pour $k = 2$ ne sont pas optimales car elles devraient être les mêmes que pour $k = 1$ mais la ligne est calculée avec $\mathrm{H} = 2500$ au lieu de $\mathrm{H} = 545439823.215$, ce qui montre l'importance de la hauteur de vérification pour cette partie.

| | $10^{10}$ | $10^{13}$ | $10^{30}$ | $10^{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| $k=1$ | 0.000286 | 0.000014 | 0.000001 | 0.000001 |
| $k=2$ | 0.002247 | 0.002012 | 0.001846 | 0.001307 |
| $k=3$ | 0.002663 | 0.002189 | 0.002056 | 0.001523 |
| $k=4$ | 0.002705 | 0.002203 | 0.002071 | 0.001542 |
| $k=5$ | 0.003415 | 0.002408 | 0.002229 | 0.001730 |
| $k=6$ | 0.002762 | 0.002220 | 0.002082 | 0.001565 |
| $k=7$ | 0.004138 | 0.002531 | 0.002359 | 0.001844 |
| $k=8$ | 0.003527 | 0.002426 | 0.002259 | 0.001787 |
| $k=9$ | 0.004225 | 0.002545 | 0.002369 | 0.001869 |
| $k=10$ | 0.003577 | 0.002431 | 0.002265 | 0.001788 |
| $k=11$ | 0.005604 | 0.002733 | 0.002493 | 0.002028 |
| $k=12$ | 0.003622 | 0.002439 | 0.002278 | 0.001803 |
| $k=13$ | 0.006341 | 0.002793 | 0.002554 | 0.002084 |
| $k=14$ | 0.013364 | 0.011687 | 0.010397 | 0.006459 |
| $k=15$ | 0.014298 | 0.012052 | 0.011011 | 0.006855 |
| $k=16$ | 0.014344 | 0.012075 | 0.011016 | 0.007181 |
| $k=17$ | 0.017764 | 0.013182 | 0.012166 | 0.008540 |
| $k=18$ | 0.013449 | 0.011695 | 0.010407 | 0.006492 |
| $k=19$ | 0.018749 | 0.013501 | 0.012346 | 0.008580 |
| $k=20$ | 0.014456 | 0.012102 | 0.011019 | 0.007183 |
| $k=21$ | 0.016231 | 0.012674 | 0.011651 | 0.007926 |
| $k=22$ | 0.015392 | 0.012406 | 0.011632 | 0.007443 |
| $k=23$ | 0.020650 | 0.014152 | 0.012716 | 0.009169 |

TABLE 6.1 – $|\theta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < x\varepsilon(x)$

## 6.5 Résultat pour les grandes valeurs de $x$

**Théorème 133** (Théorème 5 de [6]). *Soit $k \geq 1$ un entier. Soit* $\mathrm{R} = 9.645908801$. *Soit* $\mathrm{H} \geq 1000$ *tel que GRH(k,H) soit valide. Soit* $\mathrm{C}_1(k)$ *défini par (6.7). Soient* $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$, *et* $\mathrm{X}_3$ *des constantes définies par*

$$\frac{e^{\mathrm{X}_0}}{\sqrt{\mathrm{X}_0}} = \mathrm{H}\sqrt{\frac{k\varphi(k)}{2\pi \mathrm{C}_1(k)}}, \quad \frac{e^{\mathrm{X}_1}}{\mathrm{X}_1} = 10\varphi(k)$$
$$\mathrm{X}_2 = \frac{k\mathrm{C}_1(k)}{2\pi\varphi(k)}, \qquad \mathrm{X}_3 = \frac{2k\pi e}{\mathrm{C}_1(k)\varphi(k)}.$$

*Soit* $\mathrm{X}_4 = \max(10, \mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$. *Posons*

$$\varepsilon(\mathrm{X}) = 3\sqrt{\frac{k}{\varphi(k)\mathrm{C}_1(k)}}\mathrm{X}^{1/2}\exp(-\mathrm{X}).$$

*Alors, pour tout réel $x$ tel que* $\mathrm{X} = \sqrt{\frac{\ln x}{\mathrm{R}}} \geq \mathrm{X}_4$, *nous avons*

$$|\psi(x;k,l) - x/\varphi(k)| < x \cdot \varepsilon(\mathrm{X}),$$

$$|\vartheta(x;k,l) - x/\varphi(k)| < x \cdot \varepsilon(\mathrm{X}).$$

## 6.6 Résultats en supposant GRH$(k,\infty)$

Nous pouvons légitimement nous poser la question sur les encadrements de $\psi(x;k,l)$, c'est-à-dire les encadrements de $\psi(x)$ dans les progressions arithmétiques lorsque l'on suppose la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée. Sous hypothèse de Riemann généralisée, nous avons le résultat suivant :

$$\psi(x;k,l) = \frac{x}{\varphi(k)} + \mathrm{O}(\sqrt{x}\ln^2(kx)).$$

Pour la version explicite, cette question avait déjà été étudiée dans ma thèse avec le résultat, publié dans [6], suivant :

**Théorème 134** (Théorème 3.7 de [5]). *Soit $x \geq 10^{10}$. Soit $k$ un entier positif. On suppose que GRH(k,∞) est satisfaite.*

1. *Si* $k \leq \frac{4}{5}\ln x$ *alors* $|\psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leq \frac{1}{4\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$,
2. *Si* $k \leq 432$ *alors* $|\psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}| \leq \frac{11}{32\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$.

La différence entre les fonctions $\psi$ et $\theta$ est souvent négligeable, Chebyshev en 1850 nous en donne une estimation : $\psi(x) - \theta(x) = \theta(x^{1/2}) + \cdots + \theta(x^{1/n}) = x^{1/2} + \mathrm{O}(x^{1/3})$.

**Proposition 135.** *Pour $x \geq 121$,*

$$0.9999\sqrt{x} < \psi(x) - \theta(x) < 1.00007\sqrt{x} + 1.78\sqrt[3]{x}.$$

## 6.7 Applications

Nous pouvons également nous intéresser à la fonction décomptant les nombres premiers mais seulement ceux qui sont dans une progression arithmétique modulo $k$. Soit

$$\pi(x;k,l) = \sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv l \bmod k}} 1.$$

Nous pouvons calculer ponctuellement les valeurs exactes[4] de $\pi(x;k,l)$ pour des valeurs assez grandes de $x$. Mais cela ne donne en aucun cas des valeurs couvrant un intervalle. Pourtant il est assez facile d'encadrer la fonction $\pi(x;k,l)$ en utilisant les encadrement de $\psi(x;k,l)$ précédemment trouvés.

Dans une première approche (cf. [5]), nous avons étudié une valeur donnée de $k$ et obtenu la borne minorante suivante, valable pour $x \ge 151$ et $l = 1$ ou 2,

$$\pi(x;3,l) > \frac{x}{2\ln x}.$$

Nous pouvons maintenant construire des bornes plus précises à partir des travaux de Ramaré&Rumely sur $\psi(x;k,l)$ et en déduire par exemple que un encadrement de $\pi(x;5,l)$.

**Proposition 136.** *Pour $x \ge 2$, nous avons*

$$|\theta(x;5,l) - \frac{x}{4}| \le 0.5\frac{x}{\ln x}.$$

*Démonstration.* A l'aide du théorème 132, nous calculons des bornes destinées à $\theta(x;5,l)$ valides pour$x \ge x_0$ pour différentes valeurs de $x_0 = e^{b_0}$. Ces valeurs sont légèrement différentes de la table car il faut rajouter une majoration de la différence entre $\psi$ et $\theta$ donnée par la proposition 135. Les valeurs calculées sont les suivantes :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | 23 | 25 | 30 | 40 | 50 | 70 |
| $\varepsilon_{b_0}$ | 0.003428 | 0.002770 | 0.002406 | 0.002350 | 0.002307 | 0.002225 |
| $b_0$ | 100 | 150 | 200 | 300 | 500 | 600 |
| $\varepsilon_{b_0}$ | 0.002124 | 0.001968 | 0.001814 | 0.001520 | 0.000974 | 0.000767 |
| $b_0$ | 700 | 800 | 900 | | | |
| $\varepsilon_{b_0}$ | 0.000614 | 0.000375 | 0.000227 | | | |

On montre que, par intervalle $e^{b_i} \le x \le e^{b_{i+1}}$, les $b_i$ étant choisis parmi les $b_0$ et $b_{i+1}$ étant la valeur $b_0$ suivante, que

$$|\theta(x;5,l) - x/4| \le \varepsilon_{b_i} x \le \varepsilon_{b_i} * b_{i+1}\frac{x}{\ln x} \le 0.5\frac{x}{\ln x}.$$

Il faut pour cela calculer des valeurs intermédiaires lorsque $b_0$ entre 250 et 900.

Pour $x$ jusqu'à $10^{10}$, le théorème 129 donne le résultat jusqu'à 754 puisque

$$2.072\sqrt{x} < 0.5\frac{x}{\ln x}$$

pour $x \notin [1.32;754[$. Il reste quelques cas à traiter informatiquement.

□

**Corollaire 137.** *Pour $x \geqslant 73$ et pour tout entier $l$ premier avec 5,*

$$\pi(x;5,l) > \frac{x}{4\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right).$$

*Démonstration.* A l'aide de l'encadrement de $\theta(x;5,l)$, nous montrons que

$$\begin{aligned}
\pi(x;k,l)-\pi(x_0;k,l) &= \int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\vartheta(t;k,l)}{\ln t} = \frac{\vartheta(x;k,l)}{\ln \mathrm{X}} - \frac{\vartheta(x_0;k,l)}{\ln x_0} + \int_{x_0}^{x}\frac{\vartheta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt \\
&> \frac{x/4-\frac{x}{2\ln x}}{\ln x} + \int_{x_0}^{x}\frac{t/4-\frac{t}{2\ln t}}{t\ln^2 t}\mathrm{d}t - \frac{\vartheta(x_0;k,l)}{\ln x_0} \\
\pi(x;k,l) &> \frac{x/4-\frac{x}{2\ln x}}{\ln x} + \frac{x}{4\ln^2 x}
\end{aligned}$$

comme $\pi(x_0;k,l) > \frac{\vartheta(x_0;k,l)}{\ln x_0} + \frac{x_0}{4\ln^2 x_0}$ pour $x_0 = 1000$. □

### 6.7.1 Fonction $\omega(n)$

Rappelons la définition de deux fonctions arithmétiques :

- La fonction $\omega(n)$ (petit omega) qui compte chaque facteur premier distinct, tandis que la fonction associée ,
- $\Omega(n)$ (grand omega) compte le nombre total de facteurs premiers de $n$, en tenant compte de leur multiplicité.

**Théorème 138.** *Soient* $\mathrm{X} \geq 83$ *et l'entier $n$ produit de tous les premiers $p \leq \mathrm{X}$ vérifiant $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ alors*

$$\omega(n) > \log(n)/\log(\log(n)) + 2.055256.$$

*Démonstration.* Soit $\mathscr{P}$, l'ensemble des premiers $p$ tels que $\pm 2$ mod 5.

Soit $n = \prod_{p\leq \mathrm{X}, p\in\mathscr{P}} p$ alors $\log n = \vartheta(\mathrm{X};5,2)+\vartheta(\mathrm{X};5,-2)$ tandis que $\omega(n) = \pi(\mathrm{X};5,2)+\pi(\mathrm{X};5,-2)$.

Ainsi nous devons comparer $\vartheta(\mathrm{X};5,a)$ avec $\pi(\mathrm{X};5,a)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\omega(n) &= \pi(\mathrm{X};5,2)+\pi(\mathrm{X};5,-2) \\
&= \sum_{l\in\{2,-2\}}\int_{2^-}^{\mathrm{X}}\frac{\vartheta(t;5,l)}{\ln t}dt = \frac{\vartheta(\mathrm{X};5,2)}{\ln \mathrm{X}} + \frac{\vartheta(\mathrm{X};5,-2)}{\ln \mathrm{X}} + \sum_{l\in\{2,-2\}}\int_{2^-}^{\mathrm{X}}\frac{\vartheta(t;k,l)}{t\ln^2 t}dt \\
&\geqslant \frac{\theta(\mathrm{X};5,2)+\theta(\mathrm{X};5,-2)}{\ln \mathrm{X}} + \frac{\mathrm{X}}{2\ln^2(\mathrm{X})} \text{ par la proposition 136.}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln n}{\ln\ln n} &= \frac{\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2)}{\ln(\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2))} \\
&= \frac{\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2)}{\ln X}\cdot\frac{\ln X}{\ln(\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2))} \\
&\leqslant \frac{\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2)}{\ln X}\cdot\frac{\ln X}{\ln(X/2-\frac{X}{2\ln X})} \\
&\leqslant \frac{\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2)}{\ln X}\cdot\left(1+\frac{\ln X}{\ln(X/2-\frac{X}{2\ln X})}\right) \\
&= \frac{\theta(X;5,2)+\theta(X;5,-2)}{\ln X}+\frac{\ln 2}{2}\frac{X}{\ln^2 X}+o\left(\frac{X}{\ln^2 X}\right) \text{ par la proposition 136.}
\end{aligned}$$

□

### 6.7.2 Polynômes cyclotomiques

Nous allons présenter comment les résultats présentés précédemment peuvent être utilisés dans d'autres thèmes de recherche.

**Définition 11.** *Le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique, pour tout entier $n$ strictement positif, est l'unique polynôme irréductible à coefficient entiers diviseur de $x^n-1$ mais ne divisant pas $x^k-1$ pour tout $k<n$. Il s'exprime sous la forme :*

$$\Phi_n(x)=\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ \gcd(k,n)=1}}\left(x-e^{2i\pi\frac{k}{n}}\right).$$

*Le degré de $\Phi_n$, ou en d'autres termes le nombre de racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, est $\varphi(n)$, où $\varphi$ est la fonction indicatrice d'Euler.*

Les polynômes cyclotomiques pour les premières valeurs de $n$ sont :

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(X)=X-1\\
&\Phi_2(X)=X+1\\
&\Phi_3(X)=X^2+X+1\\
&\Phi_4(X)=\Phi_2(X^2)=X^2+1\\
&\Phi_5(X)=X^4+X^3+X^2+X+1\\
&\Phi_6(X)=\Phi_3(-X)=X^2-X+1.
\end{aligned}$$

Les polynômes cyclotomiques usuels $\Phi_n$ sont à coefficients entiers, et irréductibles sur $\mathbb{Q}$, et si nous poursuivons le calcul sur les 100 premiers polynômes cyclotomiques, les coefficients qui apparaissent appartiennent à $\{-1,0,1\}$. Ce n'est pas le cas tout le temps, mais il faut attendre la valeur $n=105$ pour trouver un polynôme cyclotomique à coefficients différents de $\pm1$ :

$$\begin{aligned}
\Phi_{105}(x)=x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}\\
+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}\\
+x^{13}+x^{12}-x^{9}-x^{8}-2x^{7}-x^{6}-x^{5}+x^{2}+x+1.
\end{aligned}$$

Il est intéressant d'introduire la notion de hauteur :

**Définition 12.** *Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x_d$ un polynôme de degré $d$. Alors la hauteur* $\mathrm{H}(f)$ *(ou hauteur naïve) est donnée par*

$$\mathrm{H}(f) = \max_{0 \le j \le d} |a_j|$$

Le problème de la limitation de la grandeur des coefficients des polynômes cyclotomiques a fait l'objet d'un certain nombre de travaux de recherche. Soit $\mathrm{A}(n)$ le maximum en valeur absolue des coefficients de $\Phi_n$. Cela correspond à la hauteur des polynômes cyclotomiques ($\mathrm{A}_n = \mathrm{H}(\Phi_n(x))$). Si $n$ a au plus deux facteurs premiers impairs distincts, alors Migotti[11] a montré que les coefficients de $\Phi_n$ sont tous dans l'ensemble $\{1, -1, 0\}$. C'est pour cela que le cas du $105^{ième}$ polynôme cyclotomique est apparaît car 105 est le plus petit entier produit de trois nombres premiers impairs distincts (3*5*7).

Les coefficients maximaux des $\Phi_n$ ne limitent pas à des petits nombres. Ils peuvent être aussi grands que souhaités :

**Théorème 139** (Vaughan[14])**.** *Soit* $\mathrm{A}_n$ *la hauteur de* $\Phi_n$*. Alors il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels* $\log\log \mathrm{A}_n > (\log 2)(\log n)/\log\log n$.

Le but est d'obtenir une version effective de ce théorème. Cette question, soumise par Peter Moree pour étendre son article [3], m'a été relayée par Olivier Ramaré.

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve de [3] avec une partie explicite. L'idée est de construire une suite d'entiers $n$ d'une forme particulière permettant de valider l'inégalité de Vaughan. Soit X assez grand et $n$ le produit de tous les premiers $p \leqslant \mathrm{X}$ vérifiant $p \equiv \pm 2 \pmod 5$. Dans ce cas, en utilisant le corollaire 14 de [3] (et ses notations), nous avons

$$\log|\Phi_n(\xi_5)| = (-2)^{\omega(n)-1} \log|1 + \xi_5|. \tag{6.9}$$

Choisissons la racine $\xi$ primitive $5^{ième}$ de l'unité pour laquelle $\log|\Phi_n(\xi_5)| > 0$ (En effet, on peut tester qu'il y a des racines $\xi$, $5^{ièmes}$ de l'unité, pour lesquelles $\log|1+\xi| > 0$, et d'autres pour lesquelles $\log|1+\xi| < 0$). D'après l'équation (1) de [3], nous avons

$$\log\log \mathrm{A}_n \geqslant \log\log\left(\frac{|\Phi_n(\xi_5)|}{\varphi(n)+1}\right).$$

Dans notre cas particulier de construction de $n$ et en utilisant que la majoration de la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n) \leqslant n-1$,

$$\log\log\left(\frac{|\Phi_n(\xi_5)|}{\varphi(n)+1}\right) \geqslant \omega(n)\log 2 - \log 2 + \log\log(1+\xi_5) - \frac{n}{2^{\omega}(n)}.$$

Nous pouvons vérifier que pour $\mathrm{X} \geqslant 83$ (et le $n$ associé) que l'inégalité de Vaughan se vérifie par application du théorème 138 pour cette suite particulière de $n$. □

Il reste à tester les 12 premiers termes de construction de la suite. Les premiers termes sont facilement calculables avec les commandes intégrées de gp-pari ou Maple ; Ainsi

$$\mathrm{A}(\Phi_2) = 1, \quad \mathrm{A}(\Phi_{2\cdot 3}) = 1, \quad \mathrm{A}(\Phi_{2\cdot 3\cdot 7}) = 1, \quad \mathrm{A}(\Phi_{2\cdot 3\cdot 7\cdot 13}) = 2,$$
$$\mathrm{A}(\Phi_{2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 17}) = 6, \quad \mathrm{A}(\Phi_{2\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 23}) = 397$$

et aucun de ces termes ne vérifie l'inégalité de Vaughan. Pour les termes suivants, cela devient difficile de les calculer rapidement. Un article de Arnold&Monagan[2] présentant des méthodes de calcul rapide des polynômes cyclotomiques permet de déterminer (tables et le lemme 1 de cet article) quelques valeurs supplémentaires :

$$\begin{aligned} A(\Phi_{2\cdot3\cdot7\cdot13\cdot17\cdot23\cdot37}) &= 56938657 \\ A(\Phi_{2\cdot3\cdot7\cdot13\cdot17\cdot23\cdot37\cdot47}) &= 42337944402802720258 \end{aligned}$$

qui ne conviennent pas non plus.

## 6.8 Références


[1] Tom M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976. [page 101, 104]

[2] Andrew Arnold and Michael Monagan. Calculating cyclotomic polynomials. *Math. Comput.*, 80(276) :2359–2379, 2011. [page 122]

[3] Bartlomiej Bzdega, Andrés Herrera-Poyatos, and Pieter Moree. Cyclotomic polynomials at roots of unity. *Acta Arithmetica*, 184, 11 2016. [page 121]

[4] Marc Deléglise, Pierre Dusart, and Xavier-François Roblot. Counting primes in residue classes. *Math. Comput.*, 73(247) :1565–1575, 2004. [page 118]

[5] Pierre Dusart. Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. *Université de Limoges*, (17-1998) :1–173, 1998. [page 117, 118]

[6] Pierre Dusart. Estimates of $\theta(x;k,l)$ for large values of $x$. *Mathematics of Computation*, 71(239) :1137–1168, 2002. [page 117]

[7] William John Ellison and Michel Mendès France. *Les nombres premiers*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1975. [page 101, 104]

[8] Kevin S. McCurley. Explicit estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progressions. *Mathematics of Computation*, 42(165) :265–285, 1984. [page 111, 114]

[9] Kevin S. McCurley. Explicit estimates for $\theta(x;3,l)$ and $\psi(x;3,l)$. *Mathematics of Computation*, 42(165) :287–296, 1984. [page 111]

[10] Kevin S. McCurley. Explicit zero-free regions for Dirichlet L-functions. *Journal of Number Theory*, 19(1) :7–32, 1984. [page 111]

[11] Adolph Migotti. Zur theorie der kreisteilungs-gleichung. *S.-B. der Math.-Naturwiss. Class der Kaiser. Akad. Der Wiss., Wien*, 87 :7–14, 1883. [page 121]

[12] Olivier Ramaré and Robert Rumely. Primes in arithmetic progressions. *Mathematics of Computation*, 65(213) :pp. 397–425, 1996. [page 111, 114, 115]

[13] Robert Rumely. Numerical computations concerning the erh. *Mathematics of Computation*, 61 :415–4401723, 1993. [page 111]

[14] R. C. Vaughan. Bounds for the coefficients of cyclotomic polynomials. *Michigan Mathematical Journal*, 21(4) :289 – 295, 1975. [page 121]

**Encadrements explicites des nombres premiers**

**Résumé :** Ce mémoire présente mes travaux de recherche en théorie analytique des nombres. Il détaille les outils nécessaires à la compréhension des résultats sur les encadrements explicites sur les fonctions impliquant les nombres premiers. Il montre la liaison très fine qu'il existe entre les connaissances sur la fonction zêta de Riemann et les estimations sur les nombres premiers. Des résultats avec ou sans l'hypothèse de Riemann sont présentés. Ces résultats peuvent se généraliser dans les progressions arithmétiques à l'aide des fonctions L de Dirichlet.
**Mots clés :** Distribution des nombres premiers, résultats asymptotiques, fonctions arithmétiques, fonction zêta.

**Explicit estimates on prime numbers**

**Abstract:** This report presents my research work in analytic number theory. It contains the necessary tools to understand the results on explicit estimates on functions involving prime numbers. It shows the very fine connection between the knowledge of the Riemann zeta function and estimates of the prime numbers. Results with and without the Riemann hypothesis are presented. These results can be generalized to arithmetic progressions using Dirichlet L-functions.
**Keywords:** Distribution of primes, Asymptotic results, number fields, arithmetic functions, zeta function.

**XLIM - UMR 7252 CNRS - Université de Limoges**
123, avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES cedex