THÈSE

présentée par

Manuela NEAGU

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph FOURIER - Grenoble I

(arêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et du 30 Mars 1992)

(Spécialité Mathématiques Appliquées)

Courbes de Bézier en Géométrie Algorithmique : approximation et cohérence topologique

Date de soutenance : 5 Mai 1998

Composition du jury :

Président	:	M. Pierre-Jean LAURENT
Rapporteurs	:	M. Tom LYCHE
		Mme. Mariette YVINEC
Examinateurs	:	M. Bernard LACOLLE
		M. Claude PUECH
		M. Jack SNOEYINK

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons une méthode de résolution des problèmes de la géométrie algorithmique posés pour des objets courbes (par opposition aux objets "linéaires" : ensembles de points, segments, polygones...). Les objets que nous étudions sont des courbes de Bézier composites, choisies, d'une part, pour le réalisme qu'elles assurent dans la modélisation géométrique, et d'autre part, pour la facilité du traitement algorithmique que leurs propriétés offrent.

Notre approche met l'accent sur les aspects topologiques des problèmes abordés, en évitant les incohérences que la résolution en arithmétique flottante d'équations algébriques de degré élevé (générées par le traitement direct des courbes) peut le plus souvent introduire. Cet objectif est atteint par l'utilisation d'approximations polygonales convergentes, qui dans le cas des courbes de Bézier sont naturellement fournies par les polygones de contrôle par l'intermédiaire de la subdivision de de Casteljau.

Deux des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique sont traités ici, l'enveloppe convexe et les arrangements, les deux en dimension 2. Dans le cas des arrangements, la notion de topologie (combinatoire) est bien connue ; dans celui de l'enveloppe convexe, nous la définissons rigoureusement. Pour les deux problèmes, nous montrons qu'il est possible d'obtenir toute l'information topologique définissant (de manière, il est vrai, implicite, mais correcte et complète) la solution exacte en travaillant exclusivement sur les approximations polygonales des objets donnés.

Les résultats théoriques obtenus sont concrétisés par des algorithmes dont la convergence et la correction sont démontrées et pour lesquels des études de coût sont réalisées. Des exemples illustrent le fonctionnement de ces algorithmes, validant la méthode proposée.

Mots-clef : géométrie algorithmique, CAGD, cohérence topologique, enveloppe convexe, arrangement, courbe de Bézier, approximation, subdivision, convergence

Abstract

In this thesis, we propose a method for solving computational geometry problems posed for curve objects (in contrast with "linear" objects: sets of points, segments, polygons...). The objects we study are composite Bézier curves, chosen, on one hand, for the realism they assure in geometric modelling, and on another hand, for the ease of algorithmic processing that their properties offer.

Our approach emphasizes the topological aspects of the addressed problems, avoiding the inconsistencies that floating point arithmetic solving of high degree algebraic equations (generated by curves direct processing) often induces. This aim is reached through the use of converging polygonal approximations, which, in the case of Bézier curves, are naturally provided by the control polygons via the de Casteljau subdivision.

Two of the computational geometry fundamental problems are addressed here, the convex hull and the arrangements, both of them in the dimension 2. In the arrangements' case, the notion of topology (combinatoric) is well known; in the convex hull's one, we define it rigorously. For the two problems, we show that one can obtain all the topological

information defining (implicitly, it is true, but correctly and completely) the exact solution dealing exclusively with the polygonal approximations of the given objects.

The theoretical results we have obtained are made concrete by the design of algorithms proven correct and convergent and for which cost studies have been done. Some examples illustrate the functioning of these algorithms, demonstrating the validity of the proposed method.

Keywords: computational geometry, CAGD, topological coherence, convex hull, arrangement, Bézier curve, approximation, subdivision, convergence

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de Modélisation Géométrique et Approximation du Laboratoire de Modélisation et Calcul de Grenoble sous la direction de Monsieur Bernard Lacolle.

Je commence par remercier Monsieur Pierre-Jean Laurent non seulement pour avoir accepté de présider mon jury, mais aussi pour l'accueil qu'il m'a réservé lors de mon arrivée dans l'équipe et au début de ma thèse.

Je remercie vivement Madame Mariette Yvinec et Monsieur Tom Lyche d'avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse. Grâce à leurs remarques, la version que vous tenez entre les mains est meilleure. Surtout, merci à Mariette pour ses précieux conseils sur les structures de données.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Messieurs Claude Puech et Jack Snoeyink d'avoir accepté de faire partie du jury, et pour les discussions enrichissantes que nous avons eues par la suite.

Last, but not least, un grand merci à Bernard Lacolle pour son indéfectible disponibilité et pour ses encouragements au long de toutes ces années de travail.

Je ne peux pas conclure ces remerciements sans rappeler ceux aux côtés desquels j'ai fait un bout de chemin : Yves, sans lequel mes programmes n'auraient pas fonctionné avant l'an 2000 (et encore...), Emmanuelle, Géraldine et Patrick, mes collègues de bureau au fil des années, qui ont su être des amis autant au travail qu'en dehors, et tous les autres, trop nombreux pour être cités ici, auxquels la bonne ambiance régnant au sein du collectif de thésards est due.

À Adrian, pour avoir toujours été là, merci.

Sommaire

Chapitre II
Enveloppe convexe d'une polycourbe : résultats théoriques

Chapitre III
Algorithmes de calcul de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier

Chapitre IV
Arrangements de polycourbes : résultats théoriques

Chapitre V
Algorithme de calcul d'un arrangement de lignes polygonales équivalent à un arrangement de polycourbes

Introduction

À ses débuts, la géométrie algorithmique s'est intéressée à la résolution de divers problèmes géométriques pour des objets que nous appellerons "linéaires" : des ensembles de points, de segments, de droites, et des polygones, dans le plan, et respectivement leurs généralisations en dimensions supérieures, pour les études effectuées dans $\mathbb{R}^d$. Les opérations de base nécessaires sur ces objets (comme le calcul de l'intersection de deux droites données, ou le calcul de la droite passant par deux points donnés) se traduisaient par des équations ou des systèmes d'équations de degré un, qui pour des données rationnelles ont des solutions rationnelles et pouvaient raisonnablement être considérés comme solubles de manière exacte et en temps $\mathcal{O}(1)$.

Depuis, deux tendances assez contradictoires se sont manifestées. D'un côté, un besoin croissant de précision s'est fait sentir, mettant (à juste titre) en doute l'exactitude des solutions fournies par l'ordinateur même pour les systèmes d'équation de degré un. Ceci a mené à un traitement plus fin de la manipulation des nombres réels, par l'introduction des arithmétiques paresseuses et d'intervalle ou par d'autres approches "arithmétiques". D'un autre côté, dans la modélisation des objets du monde réel est requis un plus grand réalisme que celui assuré par les approximations polygonales. Ceci implique le travail sur des "courbes" (notion à préciser en fonction du contexte), entités autrement plus complexes que les objets linéaires, et a pour conséquence la génération de systèmes algébriques de degré élevé qui devraient être résolus de manière exacte. Le parti généralement pris par les auteurs s'étant penchés sur des concrétisations de cette dernière tendance est d'utiliser un certain nombre de primitives, ou "oracles", fournissant les solutions des problèmes élémentaires posés pour des courbes (comme le calcul des droites d'appui communes de deux courbes) et de considérer que la résolution de ces primitives se fait de façon exacte et en temps constant (dépendant éventuellement des courbes traitées). Nous aurons ainsi d'une part une primitive calculant de manière exacte l'intersection de deux courbes, et d'une autre part le doute sur l'exactitude de la réponse de l'ordinateur à la question de l'appartenance d'un point à une droite.

Le principe sur lequel les travaux présentés dans cette thèse sont basés se situe quelque part entre les deux tendances mentionnées. L'utilité de l'emploi des courbes dans la modélisation géométrique est indéniable, nous traitons donc des courbes planes satisfaisant certaines propriétés. Mais le fait que, généralement, les opérations de base sur ces courbes ne peuvent pas être effectuées de manière exacte par l'ordinateur est aussi indéniable, et de point de vue géométrique et topologique cela peut générer des incohérences dans la scène étudiée. Une solution serait d'utiliser des arithmétiques exactes, mais cette approche nous éloignerait des aspects géométriques du problème à résoudre. Nous avons donc choisi de nous concentrer sur la topologie des objets donnés et de la solution cherchée, la notion de "topologie" étant à définir dans le contexte du problème à traiter.

Notre méthode consiste à utiliser, pour un objet courbe donné, une suite d'approximations polygonales convergeant, dans un sens précisé, vers l'objet. Plus précisément, si $\mathcal{O}$ est l'objet courbe et $\{\mathcal{P}_i\}$ est la suite de polygones l'approchant, nous avons prouvé que la solution $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ du problème étudié pour l'objet $\mathcal{O}$ est à son tour approchée par la suite $\{\mathcal{S}(\mathcal{P}_i)\}$ des solutions respectives du problème pour les polygones $\mathcal{P}_i$. Plus, nous avons montré qu'il existe un indice i_0 (dépendant de $\mathcal{O}$) tel que la topologie de $\mathcal{S}(\mathcal{P}_i)$ soit "la même" que la topologie de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ pour tout $i \geq i_0$. Bien sûr, nous avons défini d'abord de manière rigoureuse ce que nous comprenons par "topologie de la solution" et par "même topologie".

Théoriquement, ce procédé pourrait être appliqué à des courbes (de Jordan) satisfaisant un minimum de conditions assurant l'existence des suites de polygones les approchant. Dans la pratique, si nous voulons pouvoir implémenter les algorithmes de résolution des problèmes donnés qui découlent de notre méthode, il s'impose de restreindre la famille de courbes impliquées. Nous avons choisi de travailler avec des courbes paramétriques contrôlées par des points ; concrètement, les algorithmes ont été implémentés pour des courbes de Bézier, et pour la facilité de l'expression ce sont ces courbes dont nous parlerons tout au long de ce document. Remarquons toutefois, comme il sera précisé dans la deuxième partie du premier chapitre, que d'autres types de courbes paramétriques répondent aux propriétés demandées pour l'application de notre méthode : les courbes de Bézier rationnelles, les B-splines, les NURBS.

L'avantage majeur (de notre point de vue) de ces familles de courbes est d'avoir associée, par définition, la suite convergente de polygones dont nous parlions ; en plus, chacun de ces polygones satisfait, toujours par définition, toutes les bonnes propriétés assurant l'aboutissement de notre discours. La suite de polygones est construite de manière récursive par l'application d'un algorithme de subdivision qui, précision importante pour l'esprit de l'approche que nous présentons, obtient le polygone de l'itération $i+1$ en utilisant uniquement le polygone de l'itération i, sans avoir besoin d'informations contenues dans la courbe elle-même. Ainsi, une fois que les polygones initiaux sont connus, les courbes peuvent être complètement ignorées et nous sommes libérés de l'emploi des primitives dont nous avons parlé au début de l'introduction. Dans le cas des courbes de Bézier, l'algorithme de subdivision est évidemment celui de de Casteljau.

Nous nous devons maintenant de préciser que notre méthode, telle qu'elle est appliquée dans les travaux de cette thèse, ne fournit pas encore la solution topologique parfaitement rigoureuse aux problèmes abordésés. Ceci est dû au fait que, même en ne manipulant jamais directement les courbes concernées, des imprécisions de calcul vont quand même apparaître dans le traitement des données, car nous avons utilisé l'arithmétique flottante pour effectuer toutes les opérations élémentaires sur les points, segments et droites générés dans les calculs sur les polygones approchants. Pour que notre démarche atteigne pleinement son but, l'utilisation d'une arithmétique exacte, paresseuse ou d'intervalle, s'impose comme une continuation naturelle des travaux.

Le premier chapitre de la thèse est consacré à la définition rigoureuse des objets sur lesquels nous avons travaillé, les *polycourbes*. Le point de départ est constitué par le *splinegone*, introduit par Souvaine [Sou], mais certaines imprécisions (que nous avons commentées) dans la définition de celui-ci nous empêchent de nous en servir dans notre présentation. Néanmoins, quelques résultats intéressants concernant le splinegone (ou un objet qui, si il n'est pas explicitement appelé ainsi, en satisfait les propriétés) sont déjà parus dans la littérature, et par conséquent nous avons jugé important de prouver que le nouvel objet est un splinegone.

La deuxième partie du chapitre est dédiée au "mariage" de la polycourbe et des courbes de Bézier, qui a eu comme résultat les *polycourbes de Bézier*. Pour des raisons dûment expliquées, les courbes de Bézier générales ne conviennent pas à l'usage que nous voulons en faire, nous avons donc utilisé uniquement les courbes de Bézier de B-polygone (ou polygone de contrôle) simple et convexe, que nous avons nommées courbes de Bézier *complètement convexes*. Nous remarquons ici que nous avons préféré la dénomination "B-polygone" à celle, généralement employée, de "polygone de contrôle" pour le polygone associé à une courbe de Bézier, pour éviter les confusions entre le polygone de contrôle d'une courbe de Bézier et le *polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier*, notion introduite et largement utilisée dans cette thèse. Nous avons aussi prouvé, pour une polycourbe de Bézier quelconque (qui est par définition une courbe simple), l'existence, sous certaines conditions, d'un polygone de contrôle simple. Ainsi, une caractéristique topologique de base de la polycourbe est partagée par son polygone de contrôle.

Deux problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique ont été abordés dans cette thèse : l'enveloppe convexe et les arrangements. À chacun des deux, nous avons dédié deux chapitres, l'un présentant des résultats de nature théorique et l'autre présentant en détail les algorithmes découlant de notre méthode, avec leurs justifications de correction et de convergence, et des résultats numériques.

Les chapitre deux et trois sont ainsi consacrés à l'étude de l'enveloppe convexe d'une polycourbe (de Bézier) fermée. Si pour les arrangements la notion de topologie (combinatoire) est bien connue, la topologie de l'enveloppe convexe est une notion assez floue. En conséquence, nous avons commencé, dans le chapitre deux, par définir de façon rigoureuse le résultat que nous souhaitons obtenir, en introduisant la notion de *pertinence topologique*. Nous avons ensuite prouvé l'existence d'une suite de polygones telle qu'à partir d'un certain indice tous les polygones satisfassent les conditions de pertinence topologique relatives à la polycourbe qui leur est associée.

Mais cette preuve fait intervenir des calculs sur les courbes de Bézier composant la polycourbe, elle ne peut donc pas fournir de critère implémentable pour la pertinence topologique. Une partie du chapitre trois est par conséquent allouée à la recherche d'un critère de pertinence topologique basé uniquement sur le polygone de contrôle. Une fois le critère trouvé, l'algorithme qui a été conçu en l'utilisant est présenté et commenté, avec une discussion complète sur sa complexité. Une attention spéciale est accordée aux cas dégénérés, la bête noire du programmeur. À la fin du troisième chapitre, les résultats numériques obtenus sont interprétés, non sans remarquer qu'ils relèvent une complexité pratique de l'algorithme largement inférieure à celle théoriquement calculée. Enfin, quelques exemples que nous avons considérés intéressants peuvent être trouvés dans le dernier paragraphe.

Les chapitres quatre et cinq abordent le problème des arrangements de polycourbes (de Bézier). La première partie du chapitre quatre fait un rappel des résultats sur les arrangements de courbes qui peuvent être trouvés dans la littérature. Remarquons que les courbes impliquées sont toujours des courbes non bornées ou fermées, donc des courbes qui partagent sans équivoque le plan en deux régions connexes disjointes, propriété que les polycourbes non fermées n'ont pas. Les arrangements de polycourbes seraient ainsi similaires aux arrangements de segments plutôt qu'aux arrangements de droites. Par conséquent, nous avons utilisé pour exprimer la notion d'équivalence (topologique, combinatoire) de deux arrangements de polycourbes les résultats de Vo Phi [VoP94]. Dans la deuxième partie du chapitre quatre nous avons prouvé l'existence d'une suite d'arrangements de lignes polygonales qui à partir d'un certain indice sont équivalents à l'arrangement de polycourbes.

Comme dans le cas de l'enveloppe convexe, la preuve mentionnée ci-dessus implique des calculs directement sur les courbes de Bézier intervenant dans l'arrangement et nous ne pouvons donc pas nous en inspirer pour l'élaboration d'un critère d'équivalence implémentable. En conséquence, la première partie du chapitre cinq présente des résultats nous permettant de déduire un test d'équivalence basé uniquement sur des calculs sur objets linéaires, faisant intervenir les polygones de contrôle des polycourbes, ainsi que leurs *polygones support*, ou *porteurs*. Ensuite, nous détaillons l'algorithme qui a été conçu pour calculer un arrangement de lignes polygonales équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier donné, en faisant une discussion sur son coût. La fin du chapitre est dédiée à la présentation et l'interprétation des résultats numériques, et quelques exemples jugés intéressants peuvent être trouvés dans le dernier paragraphe.

Petit guide à l'usage du téméraire lecteur

Ce document n'est pas facile à lire. Ceci est le fait aussi bien du sujet traité et de ce que nous avons voulu en faire que de l'auteur. Une formation maths pures fait les gens pointilleux sur les preuves, regardez donc les démonstrations mises en annexe. Il n'a pas toujours été facile de trouver la limite entre la rigueur mathématique et le chipotage sur les détails ; d'ailleurs je ne pense pas être toujours arrivée à le faire. Par exemple, à la question "est-il évident qu'une polycourbe de Bézier convexe a un polygone de contrôle convexe" (lemme II.8), j'ai été fortement tentée de répondre "oui" - mais je n'ai pas cédé à la tentation. Le résultat tient sur trois pages et demi (avec les figures) et je n'en suis pas particulièrement fière.

Ces considérations mises à part, le sujet est très technique et, à ma connaissance, les courbes paramétriques n'avaient pas encore été abordées de la manière utilisée dans le premier chapitre, d'où la nécessité de prouver les petites propriétés "évidentes". Observations valables aussi pour les chapitres deux et quatre, en ce qui concerne les courbes de Bézier.

Ce sont les raisons pour lesquelles des "aides à la lecture" ont été jugées plus qu'utiles pour chaque chapitre. Sous le titre "Concentré de chapitre", elles apparaissent au début du chapitre, juste après l'introduction, avec laquelle elles sont forcément un peu redondantes. Il m'a semblé que trois niveau de lecture sont à même de satisfaire tous les goûts, avec l'observation que le passage à un niveau supérieur d'un chapitre à un autre peut poser des problèmes.

Premier niveau. Vous êtes très pressé et tout ce qui vous intéresse sont les résultats sur l'enveloppe convexe et les arrangements pour des courbes de Bézier composites.

Deuxième niveau. Vous avez quelque temps à consacrer à la lecture de ce document, vous voulez savoir d'où je suis partie et où je suis arrivée, mais le comment ne vous intéresse pas dans le détail.

Troisième niveau. Vous avez tout votre temps, une insatiable curiosité et une certaine dose de courage aussi : vous n'avez pas besoin des "concentrés de chapitre", car vous allez lire le document en détail. J'espère ne pas vous décevoir...

Bonne lecture.

Notations

$\mathcal{A}$ ensemble de points du plan
$\overline{\mathcal{A}}$ – l'adhérence de $\mathcal{A}$;
$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ – l'intérieur de $\mathcal{A}$;
$\delta(\mathcal{A})$ – la frontière de $\mathcal{A}$;
$\mathcal{E}(\mathcal{A})$ – l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$;

$\varepsilon \in I\!R$, $\varepsilon > 0$
$\mathrm{B}(\mathcal{A},\varepsilon) = \{\mathrm{P} \in I\!R^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathcal{A}) < \varepsilon\}$;
$\mathrm{C}(\mathcal{A},\varepsilon) = \{\mathrm{P} \in I\!R^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathcal{A}) = \varepsilon\}$;

$\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ points
PQ – la droite passant par P et Q ;
[PQ] – le segment fermé d'extrémités P et Q ;
[PQ – la demi-droite fermée d'origine P et contenant Q ;
]PQ – la demi-droite ouverte d'origine P et contenant Q ;
$]\mathrm{PQ}[= [\mathrm{PQ}] \setminus \{\mathrm{P},\mathrm{Q}\}$;
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ – le vecteur d'origine P et extrémité Q ;

Si $\mathcal{A}$ est tel que $\mathcal{E}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{PQ} \subset \delta(\mathcal{E}(\mathcal{A}))$, mais $\mathcal{A} \not\subset \mathrm{PQ}$:
$\mathrm{DP}(\mathrm{PQ},\mathcal{A})$ – le demi-plan ouvert délimité par PQ et contenant $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$;
$\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{PQ},\mathcal{A}) = I\!R^2 \setminus \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{PQ},\mathcal{A})}$;

$\mathbf{c}_i$, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, courbes planes telles que $\cup_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i$ soit une courbe fermée simple
$reg(\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_n)$ – la région bornée ouverte délimitée par $\cup_{i=1}^{n}\mathbf{c}_i$;

$\vec{v}$ vecteur
$\Delta(\vec{v})$ – la droite support de $\vec{v}$;
$\Delta(\vec{v},\mathrm{P})$ – la parallèle à $\Delta(\vec{v})$ passant par P ;

Chapitre I

La polycourbe

Première Partie
Splinegone et polycourbe

I.1. Introduction

Jusqu'à il y a une dizaine d'années, presque tous les résultats de la géométrie algorithmique concernaient une classe relativement restreinte d'objets, que nous appellerons linéaires : des points, des droites et des segments de droite, des polygones, en deux dimensions, et encore des plans et des polyèdres en trois dimensions. Malheureusement, trop peu de cas du monde réel peuvent se réduire à de tels objets, constitués d'arêtes droites et de faces planes. Par conséquent, s'est fait sentir le besoin d'algorithmes et de techniques qui permettent de traiter des objets plus généraux que ceux mentionnés ci-dessus.

La première étape à franchir est, évidemment, de définir ces objets de façon rigoureuse. Un premier pas dans cette direction a été fait par l'introduction du *splinegone* [Sou86]. Des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique ont été étudiés pour les splinegones : l'intersection de deux splinegones convexes [Dob88] [Dob90], le diamètre d'un splinegone convexe [Dob90], la décomposition monotone [Dob88] et l'enveloppe convexe [Dob90] d'un splinegone, etc. Aussi, nous pouvons trouver dans la littérature d'autres travaux sur des objets qui, même s'ils ne sont pas explicitement définis comme splinegones, peuvent être structurés comme tels [Sch87], [Baj91].

Alors pourquoi ne pas travailler avec le splinegone et définir un nouvel objet ? La raison, présentée en détail dans la section trois de ce chapitre, consiste en quelques petites omissions que nous avons constatées dans le modèle du splinegone. Ainsi, nous introduirons la *polycourbe*. Les polycourbes forment une classe d'objets du plan plus restreinte que celle des splinegones (toute polycourbe fermée est un splinegone), mais néanmoins suffisamment générale pour que les résultats la concernant soient intéressants.

Nous commençons par une brève description du splinegone, suivie par la présentation de la polycourbe. La dernière section de cette partie est dédiée à l'étude des relations reliant la polycourbe au splinegone.

I.2. Concentré de chapitre (I, première partie)

Premier niveau. Vous n'avez pas vraiment besoin de lire cette partie du premier chapitre. Il n'y a que la section I.4 (La polycourbe) qui pourrait présenter un (très faible) intérêt pour vous.

Deuxième niveau. Vous devriez lire les sections I.3 et I.4 complètement. Dans la section I.5, vous pouvez vous dispenser de la lecture des preuves des théorèmes I.8 et I.10 - et bien sûr de celle de la démonstration de la proposition I.7, dans l'annexe.

I.3. Le splinegone

Pour commencer, nous ferons un court passage en revue de la définition et des propriétés du splinegone. La définition de cet objet, telle qu'elle peut être trouvée dans la bibliographie [Dob88], [Dob90], est la suivante :

Définition I.1. – *Un splinegone $\mathcal{S}$ peut être obtenu à partir d'un polygone $\mathcal{P}$ en remplaçant chaque arête $]s_i s_{i+1}[$ de $\mathcal{P}$ par une courbe $\mathbf{c}_i$ qui, elle aussi, part de s_i et arrive en s_{i+1} et est telle que la région $S - seg_i$ bornée par la courbe $\mathbf{c}_i$ et le segment $[s_i s_{i+1}]$ soit convexe. Le polygone $\mathcal{P}$ sera nommé le polygone porteur du splinegone $\mathcal{S}$.*

La formulation "peut être obtenu ... à partir de ..." est implicite, et cette définition ne peut pas être utilisée pour dire si une courbe fermée quelconque est un splinegone ou non. Ce problème est partiellement résolu par un théorème [Dob90] qui précise les propriétés qu'une courbe plane fermée doit avoir pour qu'elle puisse être organisée comme splinegone, nous présenterons plus tard ce théorème.

Regardons maintenant la figure I.1(a) : quelle est la région bornée par la courbe $\mathbf{c}_i$ et le segment $[s_i s_{i+1}]$?

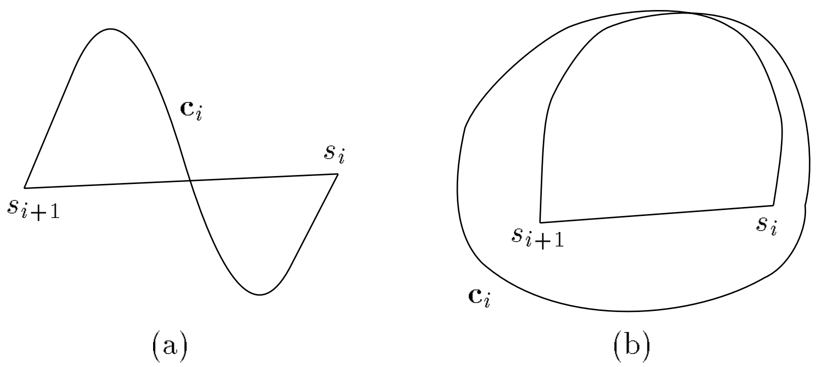


Figure I.1

Dans ce cas là, la notion de "région bornée par ... " est assez ambiguë, mais supposons que l'on comprend par là l'union de toutes les régions bornées dont la frontière est formée par des morceaux de $\mathbf{c}_i$ et du segment $[s_i s_{i+1}]$, et alors le cas de la figure I.1(a) ne présente pas un bon remplacement du segment $[s_i s_{i+1}]$ par une courbe, car $S - seg_i$ n'est pas convexe. Par contre, dans la figure I.1(b) $S - seg_i$, dans l'interprétation que nous venons de donner, est convexe, et donc $\mathbf{c}_i$ satisfait les conditions de la définition et peut constituer une arête de splinegone. Il est bien sûr clair qu'en fait tels régions $S - seg_i$ ne sont pas souhaitables et que la définition est incomplète ; il suffit d'imposer à la courbe plane fermée formée par l'union de $\mathbf{c}_i$ et $[s_i s_{i+1}]$ d'être simple pour que toutes ces confusions disparaissent.

Revenons maintenant au théorème mentionné ci-dessus. Son énoncé est le suivant :

Théorème I.2. – *Toute courbe plane fermée $\mathcal{S}$ peut être considérée comme un splinegone pourvu que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
– $\mathcal{S}$ a seulement un nombre fini de points d'inflexion ;
– toute droite coupe $\mathcal{S}$ en au plus un nombre fini de points ou segments de droite.
Si soit l'une, soit l'autre des deux conditions n'est pas vérifiée, alors $\mathcal{S}$ ne peut pas avoir une structure de splinegone.

La démonstration est constructive et pour les besoins de la discussion nous la résumons : pour déterminer un polygone porteur pour une courbe $\mathcal{S}$, les auteurs commencent par tracer la courbe dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en introduisant tous les points d'inflexion comme premiers sommets d'un polygone porteur $\mathcal{P}$. Ensuite, ils présentent deux méthodes pour introduire des sommets supplémentaires, qui seront des points des arcs $\mathbf{c}_i$, dans le but de rendre toutes les régions $S - seg_i$ convexes. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces méthodes, car elles ne nous intéressent pas par la suite.

La première remarque est que la notion de point d'inflexion pose quelques problèmes, car plusieurs définitions d'un point d'inflexion existent dans la littérature. Si par point d'inflexion on comprend un point régulier où la courbe traverse sa tangente (autrement dit, en supposant que la paramétrisation de la courbe a les propriétés de continuité et de dérivabilité requises, un point où la première dérivée est non-nulle et la deuxième est colinéaire avec elle), alors la courbe $\mathcal{S}$ de la figure I.2 n'aura aucun point d'inflexion et donc aucun polygone porteur ne pourra être construit par la méthode présentée dans la preuve du théorème, même s'il est évident que cette courbe peut être structurée comme splinegone. Si nous considérons, pour le point d'inflexion, une autre définition : un point où la première et la deuxième dérivée existent et sont colinéaires, alors le problème de la courbe de la figure I.2 est résolu si les points de discontinuité de la tangente sont des points où la première dérivée s'annule (ce qui n'est jamais vrai si $\mathcal{S}$ est paramétrisée par l'abscisse curviligne).

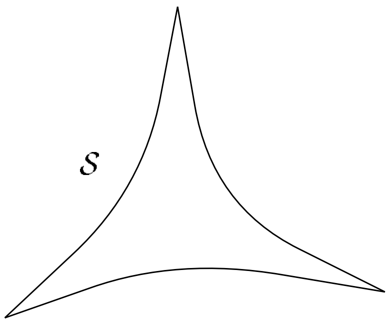


Figure I.2

Mais là encore toute une classe de courbes planes fermées est "perdue", par exemple toutes les ellipses, courbes qui satisfont les conditions de l'énoncé, mais pour lesquelles nous ne pouvons pas construire de polygone porteur par la méthode décrite dans la preuve, toujours parce qu'elles n'ont pas de point d'inflexion.

Une autre classe de courbes planes fermées est exclue par l'utilisation de cette seconde définition pour le point d'inflexion. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous considérons le point $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ défini par: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$ et pour $n \geq 2$

$$x_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n-2}}), \qquad y_n = \sin(\frac{\pi}{2^{n-2}}) \ ,$$

la courbe $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty}[\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}]$, représentée dans la figure I.3, ne répond pas aux deux conditions de l'énoncé du théorème et cependant peut être considérée un splinegone de polygone porteur, par exemple, le carré $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$.

Il est vrai que le théorème I.2 n'est pas un théorème de caractérisation, il n'affirme pas qu'une courbe plane fermée peut être considérée un splinegone *si et seulement si* les deux conditions de l'énoncé sont satisfaites, donc le fait qu'il existe des courbes qui ne satisfont pas les conditions et qui peuvent néanmoins être considérées des splinegones n'est pas une erreur. Quand même, aussi bien la définition du splinegone que ce théorème sont des énoncés restant à un niveau très intuitif, et c'est pour cette raison que nous nous sommes posé le problème de l'introduction formelle d'un objet gardant les bonnes propriétés du splinegone sans ses ambiguïtés.

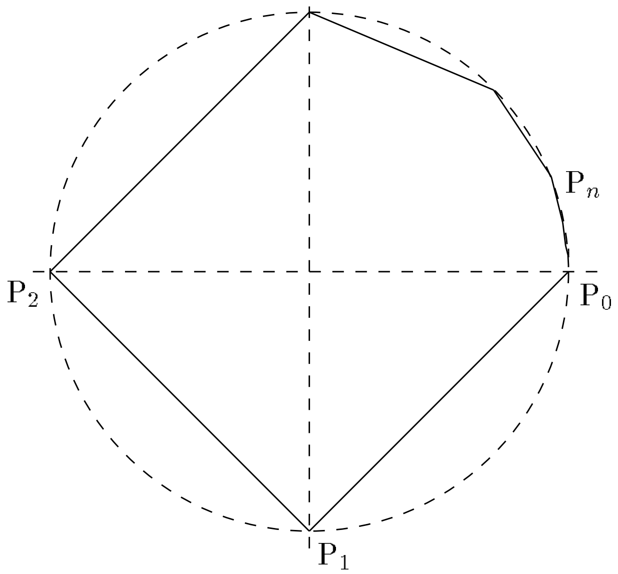


Figure I.3

I.4. La polycourbe

Du point de vue algorithmique, le principal avantage du splinegone est l'existence du polygone porteur, car ce polygone approche plus ou moins le splinegone tout en étant beaucoup plus facile à traiter par des algorithmes. Notre définition devra donc assurer des propriétés qui permettent cette existence du polygone porteur, que nous définirons bien sûr dans le nouveau contexte. En plus, nous considérons que nos courbes sont simples, d'une part parce que cela facilite tout le discours, mais aussi parce que généralement on n'a pas besoin de courbes non-simples pour modéliser des objets du monde réel. Il s'agira donc de courbes planes fermées simples qui doivent avoir seulement un nombre fini de points "mauvais" (c'est-à-dire des points de discontinuité de la tangente ou des points d'inflexion) et qui ne tournent pas sur elles-mêmes indéfiniment. Pour pouvoir introduire ce nouvel objet, nommé *polycourbe*, quelques considérations préliminaires sont nécessaires.

I.4.1. *Définitions préliminaires*

La première notion dont nous avons besoin est celle de point d'inflexion. Nous sommes intéressés par tous les points où le signe de la courbure d'une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ change, donc où l'orientation du produit vectoriel des deux premières dérivées change. En plus, si ce produit vectoriel s'annule sur tout un intervalle, nous considérons que la courbure a sur cet intervalle un troisième signe.

Définition I.3. – *Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $\mathbf{c} : D \to \mathbb{R}$ une paramétrisation régulière de $\mathcal{C}$, où D est un intervalle réel d'intérieur non vide. Nous dirons que* $\mathrm{P} = \mathbf{c}(t_0) \in \mathcal{C}$, *où $t_0 \in Int(D)$, est un point critique de $\mathbf{c}$ (ou, si la paramétrisation est fixée et il n'y a pas de risque de confusion, nous dirons par extension que t_0 est un point critique de $\mathcal{C}$) ssi:*

(I.3.i) $\det\big(\mathbf{c}'(t_0), \mathbf{c}''(t_0)\big) = 0$;

(I.3.ii) $\exists V \subset Int(D)$ *ensemble connexe,* $t_0 \in V$*, tel que* $\det\big(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)\big) \neq 0$ $\forall t \in V \setminus \{t_0\}$*, où* $V \setminus \{t_0\} \neq \emptyset$.

Cette définition est plus générale que celle couramment utilisée pour le point d'inflexion (point où la courbe traverse sa tangente), tous les points d'inflexion sont des points critiques, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour la courbe définie par

$$f = (x, y) : [-1, 1] \to I\!R^2$$

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= -t^4 \end{aligned} \qquad \text{pour } t \in [-1, 1]$$

le point $t = 0$ est un point critique sans être un point d'inflexion.

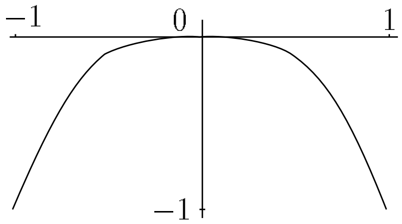


Figure I.4 *Le graphe de f*

Une autre remarque est que pour les courbes qui contiennent des segments de droite (raccordés au moins $\mathcal{C}^2$), il n'y a pas des points critiques à l'intérieur de ces segments, mais les deux extrémités de chaque segment sont de tels points, car nous aurons besoin, pour définir la polycourbe, de pouvoir délimiter les segments qui entrent dans sa composition.

L'autre condition que la polycourbe doit satisfaire pour que l'on puisse lui associer un polygone porteur est de ne pas contenir de spirales infinies, donc des parties qui tournent sur elles-mêmes indéfiniment. Pour assurer cette propriété, une condition sur la première dérivée sera nécessaire, et cette condition sera donnée en utilisant la notion de $k-$ *injectivité*.

Définition I.4. – *Soit A et B deux ensembles quelconques et soit $f : A \to B$ une fonction. Pour k entier positif, nous dirons que f est $k-$ injective ssi*

$$\text{card}(\{x \in A \mid f(x) = y\}) \leq k, \ \forall y \in B.$$

En prenant $k = 1$ dans cette définition, nous retrouvons l'injectivité habituelle des fonctions.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de l'objet qui sera traité tout au long de cette thèse.

I.4.2. *La définition de la polycourbe*

Définition I.5. – *Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane simple rectifiable d'extrémités* A *et* B *et soit*

$$\mathbf{c} : [0, \alpha] \to I\!R^2 \qquad \mathbf{c}(0) = \text{A}, \ \mathbf{c}(\alpha) = \text{B}$$

sa paramétrisation par l'abscisse curviligne. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est une polycourbe si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(I.5.i) *il existe un nombre fini de points*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \alpha$$

tels que $\mathbf{c}\big|_{]t_i,t_{i+1}[}$ *soit de classe* $\mathcal{C}^2$, *pour tout* $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ *;*

(I.5.ii) *la courbe* $\mathbf{c}(]t_i,t_{i+1}[)$ *a un nombre fini* m_i *de points critiques,*

$$t_i < p_1^i < \ldots < p_{m_i}^i < t_{i+1},$$

pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ *;*

(I.5.iii) *en considérant la suite*

$$q_0 = t_0 < q_1 = p_1^0 < \ldots < q_{m_0} = p_{m_0}^0 < q_{m_0+1} = t_1 < \ldots < q_s = t_n\ ,$$

où $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i + n$, *alors soit* $\mathbf{c}'\big|_{]q_j,q_{j+1}[}$ *est constante, soit il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathbf{c}'\big|_{]q_j,q_{j+1}[}$ *soit* $k-$*injective, pour tout* $j \in \{1,\ldots,s-1\}$.

Nous voilà ainsi en la possession d'une description mathématique rigoureuse d'une large classe d'objets non-linéaires du plan. Parmi les problèmes de la géométrie algorithmique, certains, par exemple le problème de l'enveloppe convexe, seront posés uniquement pour des polycourbes fermées, tandis que d'autres, par exemple les problèmes liés aux arrangements, concerneront les polycourbes quelconques.

La polycourbe est, pour l'instant, sous une forme rendant extrêmement épineux le problème du traitement algorithmique. Nous cherchons donc à l'amener à une expression plus abordable et nous commencerons par définir la notion qui équivaut à celle du polygone porteur pour les splinegones.

Définition I.6. – *Soit $\mathcal{C}$ une polycourbe et $\mathcal{P}$ une ligne polygonale. Alors $\mathcal{P}$ est une ligne polygonale porteuse, ou support, pour la polycourbe $\mathcal{C}$ ssi :*

(I.6.i) *tous les sommets de $\mathcal{P}$ appartiennent à la polycourbe;*

(I.6.ii) *pour toute arête* $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ *de* $\mathcal{P}$, *si* $\mathbf{c}_i$ *dénote la partie de* $\mathcal{C}$ *comprise entre* P_i *et* P_{i+1}, *alors soit* $\mathbf{c}_i$ *est un segment, soit la courbe fermée formée par l'union de* $\mathbf{c}_i$ *et de* $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ *est simple et* $reg(\mathbf{c}_i,\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$ *est convexe.*

Évidemment, la notion de ligne polygonale porteuse d'une polycourbe fermée (qui sera une ligne polygonale fermée et donc un polygone) est équivalente à celle de polygone porteur d'un splinegone. Si nous prouvons que toute polycourbe fermée admet un polygone porteur, la conséquence est que tous les algorithmes existant dans la littérature ([Dob88], [Dob90], [Baj91], [Sch87]) qui sont conçus pour tourner sur des objets qui sont en fait des splinegones fonctionneront aussi sur les polycourbes fermées.

I.5. Relations entre splinegone et polycourbe

Dans cette section, nous montrons que toute polycourbe fermée est un splinegone, tout en remarquant que la réciproque n'est pas vraie. Ceci sera fait en prouvant l'existence d'une ligne polygonale porteuse pour toute polycourbe. En plus, comme les polygones non-simples n'offrent pas de bons résultats du point de vue algorithmique, nous prouverons que toute polycourbe fermée admet un polygone support simple.

I.5.1. *La ligne polygonale porteuse*

Pour prouver l'existence de la ligne polygonale porteuse d'une polycourbe nous utilisons le résultat suivant :

Proposition I.7. – *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe plane simple rectifiable et soient* A *et* B *ses deux extrémités. Soit* $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'origine* A *de* $\mathcal{C}$*, donc* $\mathbf{c}(a) = \mathrm{A}$ *et* $\mathbf{c}(b) = \mathrm{B}$*. Supposons que* $\mathbf{c}$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *et que* $\mathcal{C}$ *n'a pas de point critique et n'est pas un segment de droite (autrement dit,* $\det\big(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)\big) \neq 0 \ \forall t \in]a, b[$*). Alors* $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ *existe et est convexe si et seulement si :*

(I.7.i) $\mathbf{c}'/]a, b[$ *est injective ;*

(I.7.ii) *pour tout* $\mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ $\qquad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{P})$.

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans l'annexe du chapitre I, et nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat d'existence de la ligne polygonale support.

Théorème I.8. – *Toute polycourbe* $\mathcal{C}$ *admet une ligne polygonale porteuse.*

Preuve – La preuve consistera à montrer comment on peut construire la ligne polygonale porteuse de la polycourbe $\mathcal{C}$. Avant de commencer, remarquons que, même si la démonstration est constructive, elle reste purement théorique, il ne sera pas possible d'écrire, suivant le fil de la preuve, un algorithme qui construit le polygone porteur de la polycourbe. Ceci parce qu'un tel algorithme devrait calculer, dans les notations de la définition I.5, les valeurs q_i, pour tout $i \in \{0, \ldots, s\}$. Même si ces valeurs sont considérées connues, l'algorithme devrait effectuer des intersections de droites et de courbes, ce qui contredit la philosophie elle-même de l'approche que nous voulons présenter dans cette thèse.

Nous présentons ici la preuve de l'existence d'un polygone porteur pour une polycourbe fermée. La construction d'une ligne polygonale porteuse pour une polycourbe qui n'est pas fermée se fait de manière identique. Nous supposons donc que $\mathcal{C}$ est fermée.

Soit, toujours dans les notations de la définition I.5, $\mathrm{P}_i = \mathbf{c}(q_i)$, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, et soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{s-1}$. Si $s < 3$, nous prenons arbitrairement $3 - s$ points sur $\mathcal{C}$, différents des points P_i définis, et nous introduisons les valeurs q leur correspondant par $\mathbf{c}^{-1}$ dans la liste des q_i donnée par la définition. Il nous reste donc à étudier les cas $s \geq 3$.

Si pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ satisfait les conditions (I.7.i) et (I.7.ii), alors, conformément à la proposition I.7, $\mathcal{P}$ est un polygone porteur pour $\mathcal{C}$. Si l'une des deux conditions n'est pas vérifiée, nous pouvons la faire respecter en ajoutant des sommets supplémentaires aux sommets du polygone $\mathcal{P}$, sommets qui seront toujours des points de la polycourbe $\mathcal{C}$.

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ ne soit ni injective, ni constante. D'après la définition de la polycourbe, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ soit $m-$injective. Évidemment, $m > 1$. Soit m_i le plus petit entier positif tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ soit m_i-injective, et soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_{m_i} \in]q_i, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}'(a_1) = \mathbf{c}'(a_2) = \ldots = \mathbf{c}'(a_{m_i})$. Nous voulons prouver que $\mathbf{c}'\big|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est injective pour tout $k \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$.

En effet, dans l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ n'existant ni de points critiques, ni de points de discontinuité de la tangente pour $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ est continue et strictement monotone. Elle "balaie" le cercle unité, donc si nous supposons qu'il existe $x, y \in]a_k, a_{k+1}[$, $x < y$, tels que $\mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(y)$, nous en déduisons que $\mathbf{c}'(t)$ fait, pour t allant de x à y, un tour complet du cercle unité. Mais $\mathbf{c}'$ est continue, donc il existe $a_0 \in [x, y[$ tel que $\mathbf{c}'(a_0) = \mathbf{c}'(a_k)$. Alors nous aurons $\mathbf{c}'(a_0) = \mathbf{c}'(a_1) = \mathbf{c}'(a_2) = \ldots = \mathbf{c}'(a_{m_i})$ et donc (au moins) $m_i + 1$ points dans l'intervalle $]q_i, q_{i+1}[$ où $\mathbf{c}'$ prend la même valeur, donc $\mathbf{c}'\big|_{]q_i,q_{i+1}[}$ n'est pas m_i-injective, d'où la contradiction.

Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i,q_{i+1}[}$ est m_i-injective, $m_i \geq 2$, nous choisissons les points $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{m_i}^i \in]q_i, q_{i+1}[$ comme décrit ci-dessus et nous les incluons parmi les q_i dans le bon ordre. Nous prenons donc $s = s + \sum_{i \in \mathrm{I}} m_i$, où

$$\mathrm{I} = \left\{i \in \{0, \ldots, s-1\} \mid \mathbf{c}'\big|_{]q_i,q_{i+1}[} \text{ n'est pas injective, ni constante}\right\}.$$

Pour chaque arête du nouveau polygone $\mathcal{P} = \mathbf{c}(q_0) \ldots \mathbf{c}(q_{s-1})$ la condition (I.7.i) est satisfaite et nous passons à l'étude de la condition (I.7.ii).

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ ne satisfasse pas (I.7.ii). Alors nous aurons $\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1}) \cap \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[) \neq \emptyset$, mais $\operatorname{card}\big((\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1}) \cap \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)\big) = 1$. En effet, si nous supposons qu'il existe $t_1 < t_2 \in]q_i, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_2) \in \mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$, en notant

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})}}{\mathrm{d}(\mathbf{c}(q_i), \mathbf{c}(q_{i+1}))}$$

nous voyons facilement qu'il existe $a_0 \in]q_i, t_1[$, $a_1 \in]t_1, t_2[$ et $a_2 \in]t_2, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}'(a_j) = \pm\vec{u}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, et donc il existe $j \neq k \in \{0, 1, 2\}$ tels que $\mathbf{c}'(a_j) = \mathbf{c}'(a_k)$, contradiction.

Ainsi la droite $\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$ coupe la courbe $\mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ en un seul point. Soit $r_i \in]q_i, q_{i+1}[$ tel que $\mathbf{c}(r_i) \in \mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$. Les courbes $\mathbf{c}([q_i, r_i])$ et $\mathbf{c}([r_i, q_{i+1}])$ satisfont toutes les deux la condition (I.7.ii). Cependant, ce n'est pas le point $\mathbf{c}(r_i)$ que nous allons prendre comme nouveau sommet de $\mathcal{P}$, car parmi les segments $[\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)]$ et $[\mathbf{c}(r_i)\mathbf{c}(q_{i+1})]$ un est complètement inclus dans l'autre, comme nous pouvons le voir dans la figure I.5.

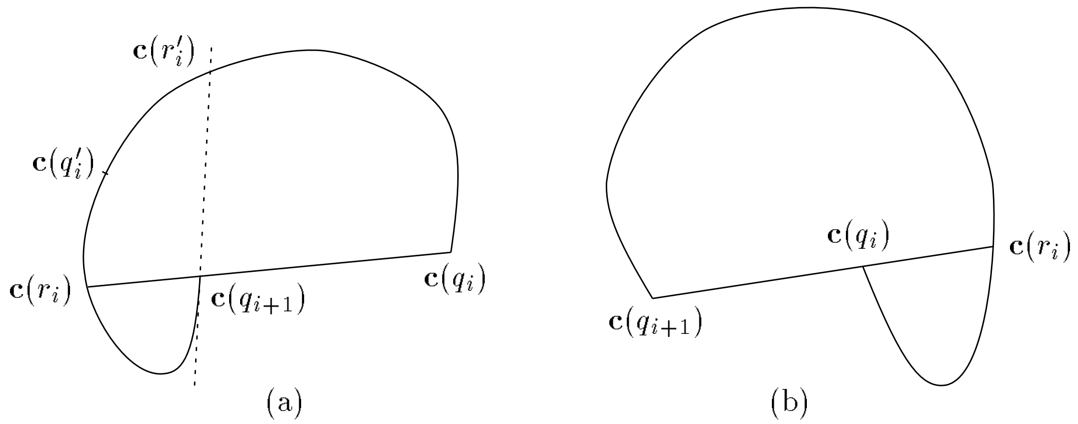


Figure I.5

Supposons que nous sommes dans le cas de la figure I.5(a), donc

$$[\mathbf{c}(r_i)\mathbf{c}(q_{i+1})] \subset [\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)].$$

Soit $r_i' \in]q_i, r_i[$ tel que $\mathbf{c}(r_i') = \Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathbf{c}(q_{i+1})) \cap \mathbf{c}(]q_i, r_i[)$. Le paramètre r_i' existe et est unique, car $reg(\mathbf{c}([q_i, r_i]),]\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)[)$ est convexe et $q_{i+1} \in]\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)[$. Alors nous choisissons

$$q_i' = \frac{r_i + r_i'}{2}$$

et les courbes $\mathbf{c}([q_i, q_i'])$ et $\mathbf{c}([q_i', q_{i+1}])$ vont toutes les deux avoir la propriété (I.7.ii) et en plus $[\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_i')] \cap [\mathbf{c}(q_i')\mathbf{c}(q_{i+1})] = \mathbf{c}(q_i')$. Le cas de la figure I.5(b) se traite de la même façon.

Donc pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ ne satisfait (I.7.ii) nous prenons le point q_i' comme décrit ci-dessus et nous l'incluons parmi les q_i. Nous aurons ainsi $s = s + \mathrm{card}(\mathrm{J})$, où

$$\mathrm{J} = \big\{ i \in \{0, 1, \ldots, s-1\} \mid \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \text{ ne satisfait pas (I.7.ii)} \big\}.$$

Le polygone $\mathcal{P} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1)\ldots\mathbf{c}(q_{s-1})$ ainsi obtenu sera, conformément à la proposition I.7, un polygone porteur pour la polycourbe $\mathcal{C}$. $\square$

Comme nous avons déjà dit, ce théorème a comme conséquence immédiate le résultat suivant:

Corollaire I.9. – *Toute polycourbe fermée est un splinegone.*

Par contre, la réciproque n'est pas vraie, un exemple évident de splinegone qui n'est pas une polycourbe étant la courbe définie dans la section I.3 et présentée dans la figure I.3. Ainsi, les polycourbes fermées forment une classe plus restreinte d'objets du plan que les splinegones, néanmoins cette classe reste suffisamment générale pour que des résultats la concernant soient d'un grand intérêt.

I.5.2. *Le polygone porteur simple*

Nous pouvons remarquer sans aucune difficulté qu'une polycourbe fermée, de par sa définition, n'est pas seulement un splinegone, mais est un splinegone *simple*. Comme approcher une courbe simple par une courbe (un polygone, en l'occurrence) non-simple n'est pas trop efficace du point de vue algorithmique, nous nous posons le problème de l'existence d'un polygone porteur simple pour une polycourbe fermée quelconque.

Théorème I.10. – *Toute polycourbe fermée $\mathcal{C}$ admet un polygone porteur simple.*

Preuve – Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_{s-1} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1)\ldots\mathbf{c}(q_{s-1})$ un polygone porteur de $\mathcal{C}$ et supposons-le non simple. Nous voulons prouver que

$$\Big(\bigcup_{i=0}^{s-1}]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\Big) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \qquad \text{(I.1)}$$

Si $\mathcal{P}$ n'est pas simple, au moins une des deux conditions suivantes est satisfaite:
(I.10.i) il existe $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{card}(]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[) = 1$;
(I.10.ii) il existe $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{P}_i \in]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[$.
(il ne peut pas exister $i \neq j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}_j$, car $\mathcal{C}$ est une courbe simple).

Si (I.10.ii) est satisfaite, la relation (I.1) s'en déduit immédiatement, car $\mathrm{P}_i \in \mathcal{C}$. Si (I.10.i) est satisfaite, alors les courbes $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[$ et $\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}]) \cup]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[$, qui sont deux courbes planes fermées, ont un point d'intersection dont nous savons qu'il est simple. Mais deux courbes planes fermées ont toujours un nombre pair de points d'intersection, donc

$$\big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cap \mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}]) \cap]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big) \neq \emptyset.$$

D'un autre côté, $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cap \mathbf{c}([q_j, q_{j+1}]) = \emptyset$, car $\mathcal{C}$ est simple et nous ne pouvons pas avoir $i = j \pm 1$ à cause de la condition $\mathrm{card}(]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[) = 1$. Donc

$$\big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\cap]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big) \neq \emptyset$$

et par conséquent la condition (I.1) est satisfaite.

Compte tenu de la propriété que nous venons d'établir, si nous arrivons à prouver qu'un polygone porteur $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \dots \mathrm{P}_{s-1} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1) \dots \mathbf{c}(q_{s-1})$ vérifiant

$$\Big(\bigcup_{i=0}^{s-1}]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\Big) \cap \mathcal{C} = \emptyset$$

existe, il est sûr que $\mathcal{P}$ est un polygone simple. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de construire un tel polygone. Par exemple, dans le cas présenté dans la figure I.6, où la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ est une tangente intérieure à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ en P_{i+1}, nous ne pouvons pas construire une ligne polygonale porteuse pour $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ qui ne coupe pas $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+3}])$. Nous verrons plus tard comment résoudre le problème dans un tel cas.

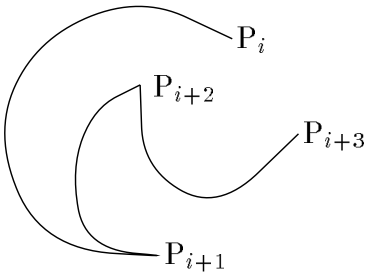


Figure I.6

Soit $i \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. Nous notons

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cap \big(reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),\ ]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[)\cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big).$$

Si $\mathcal{A} = \emptyset$, alors nous gardons $[\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}]$ comme arête du polygone porteur. Sinon, nous discutons séparément les deux cas suivants:

(a) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ et $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}] \cap \mathcal{A} = \emptyset$;

(b) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ou $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Dans le cas (a), soit

$$d_i = \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A} \\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])}} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Alors nous aurons $d_i > 0$ et nous considérons le cercle de rayon d_i qui passe par P_i et qui a le centre $\mathcal{O}$ sur la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ et tel que la distance, mesurée sur la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, entre P_i et $\mathcal{O}$ soit minimale. Ce cercle existe, car sinon nous pouvons en déduire que

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}_i, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) = \emptyset$$

et donc $reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[) \subset \mathrm{B}(\mathrm{P}_i, d_i)$, d'où une contradiction avec la définition de d_i. Pour les mêmes raisons,

$$\mathrm{card}\big(\mathrm{B}(\mathcal{O}, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\big) \geq 2$$

et soit

$$\mathrm{Q}_1^i = \mathbf{c}(q_1^i) \in \big(\mathrm{B}(\mathcal{O}, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\big) \setminus \{\mathrm{P}_i\}$$

le point de $\big(\mathrm{B}(\mathcal{O},d_i)\cap\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])\big)\setminus\{\mathrm{P}_i\}$ le plus loin, sur $\mathbf{c}_i$, de P_i. Évidemment, $]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[\cap\mathcal{C}=\emptyset$, nous introduisons donc Q_1^i parmi les sommets de $\mathcal{P}$ et nous répétons le procédé en partant de Q_1^i. Nous insérons ainsi parmi les sommets de $\mathcal{P}$ les points Q_1^i,$\mathrm{Q}_2^i=\mathbf{c}(q_2^i)$,…,$\mathrm{Q}_{m_i}^i=\mathbf{c}(q_{m_i}^i)$, en nous arrêtant quand le cercle considéré comme décrit en partant de $\mathrm{Q}_{m_i}^i$ contient P_{i+1}. Alors nous aurons

$$\Big(\bigcup_{k=0}^{m}\big(reg(\mathbf{c}([q_j^i,q_{j+1}^i]),]\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i[)\cup]\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i[\big)\Big)\cap\mathcal{C}=\emptyset,$$

où nous avons noté $\mathrm{Q}_0^i:=\mathrm{P}_i$, $\mathrm{Q}_{m+1}^i:=\mathrm{P}_{i+1}$ et $q_0^i:=q_i$, $q_{m+1}^i:=q_{i+1}$, donc non seulement nous pouvons introduire chaque $[\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i]$ comme arête du polygone porteur, mais en plus il ne sera jamais nécessaire de les remplacer, ce qui sera très important dans la discussion pour le cas (b).

Le cas (b) se divise à son tour en deux sous cas :

(b.1) $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$ et $\mathbf{c}([q_{i+1},q_{i+2}])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$;

(b.2) $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$ est tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$ ou $\mathbf{c}([q_{i+1},q_{i+2}])$ est tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$.

Dans le cas (b.1), supposons que $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$; si l'autre des conditions du cas (b) est satisfaite, la discussion est analogue. Nous aurons donc $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])\cap reg(\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}]),]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[)\neq\emptyset$; les deux positions relatives possibles des courbes $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$ et $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$ sont présentées dans la figure I.7.

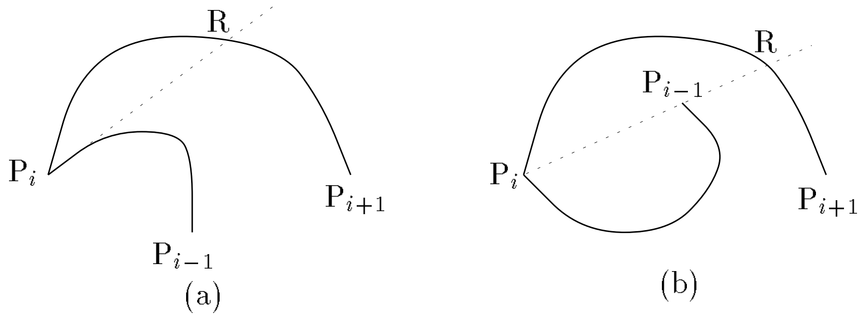


Figure I.7

Dans le cas de la figure I.7(a), la droite $\mathrm{P}_i\mathrm{R}$ est de vecteur directeur $\mathbf{c}'(q_i^-)$, donc est tangente à $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$ en P_i. Il résulte que le segment $]\mathrm{P}_i\mathrm{R}]$ ne peut pas couper la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$, quels que soient les sommets de celle-ci. Soit

$$d_i=\min\Bigg(\inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A}\\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])}}\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}),\ \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])\\ \mathrm{B}\in\mathcal{C}|_{[\mathrm{RP}_{i+1}]}}}\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B})\Bigg)$$

et appliquons le procédé décrit pour le cas (a). Si le premier point ainsi obtenu sur $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$, Q_1^i, se situe plus près, sur la courbe, de P_i que R, il est facile à voir que la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$ obtenue ne coupe pas $\mathbf{c}([q_{i-1},q_i])$ et par conséquent aucune ligne polygonale support que cette courbe pourrait avoir ; nous avons donc fini la discution pour ce cas. Si Q_1^i est plus loin de P_i que R, toujours en prenant les distances sur la courbe $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$, il suffira d'ajouter le point R entre P_i et Q_1^i comme sommet de la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])$ pour qu'elle ait les propriétés données.

Si nous sommes dans le cas de la figure I.7(b), soit R' le point partageant la courbe $\mathcal{C}\big|_{[\mathrm{P}_i\mathrm{R}]}$ en deux parties égales. Évidemment, $]\mathrm{P}_i\mathrm{R}'] \cap \mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) = \emptyset$, et par le raisonnement fait pour le cas de la figure I.7(a), mais en nous référant cette fois à R' à la place de R, nous construisons la ligne polygonale porteuse de $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ satisfaisant les bonnes conditions.

Dans le cas (b.2), nous pouvons considérer qu'une seule des deux conditions est satisfaite, car si les deux le sont simultanément, alors nous introduisons parmi les sommets du polygone porteur le sommet $\mathrm{P}'_i = \mathbf{c}((q_i + q_{i+1})/2)$ et nous obtenons ainsi deux morceaux de courbe, $\mathbf{c}([q_i, (q_i + q_{i+1})/2])$ et $\mathbf{c}([(q_i + q_{i+1})/2, q_{i+1}])$, telles que pour chacune d'elles une seule des deux conditions du cas (b.2) soit satisfaite. Supposons donc que $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ et que $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$ l'est. Si nous considérons d_i comme définie auparavant, nous aurons $d_i = 0$, et par conséquent la méthode utilisée pour le cas (a) ne fonctionne plus. Nous remarquons aussi que nous ne pouvons pas choisir un point $\mathrm{Q}_1^i = \mathbf{c}(q_1^i) \in \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ tel que

$$\mathcal{C} \cap \left(reg(\mathbf{c}([q_i, q_1^i]),]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[) \cup]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[\right) = \emptyset$$

et en conséquence le critère utilisé pour le cas (b.1) ne marche pas lui non plus. Nous allons résoudre cette situation en construisant d'abord la ligne polygonale correspondant à la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ et seulement après la ligne polygonale correspondant à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$. Avant de construire la ligne polygonale associée à la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1},\ q_{i+2}])$, nous nous assurons de nous placer dans le cas (a), ce qui peut se faire très facilement en introduisant, si besoin, le point $\mathrm{P}'_{i+1} = \mathbf{c}((q_{i+1} + q_{i+2})/2)$ parmi les sommets de $\mathcal{P}$, comme déjà vu. Nous imposons cette condition pour éviter d'entrer dans un cycle infini en passant de la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ à la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$, de la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$ à la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+2}, q_{i+3}]$ et ainsi de suite, comme il aurait pu être le cas pour la polycourbe représentée figure I.8, où chaque courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ est tangente à celle qui la précède, et ceci de manière circulaire.

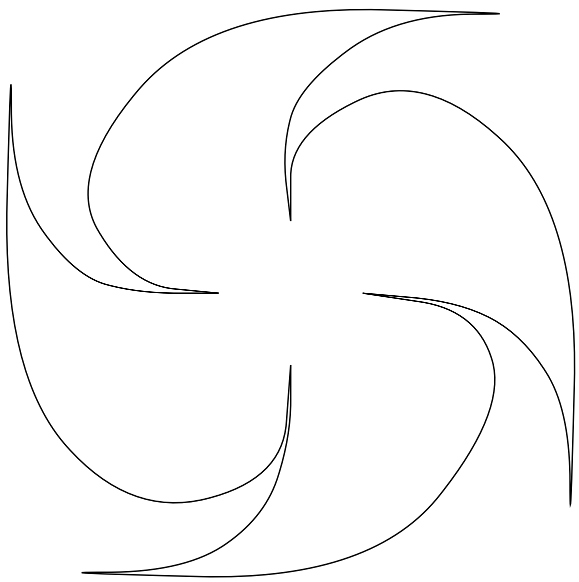


Figure I.8

Ainsi, nous savons que $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ est dans le cas (a), nous construisons la ligne polygonale porteuse $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1} \dots \mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ comme décrit, et cette ligne polygonale ne sera plus modifiée par la suite. En revenant à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, soit

$$\mathcal{A}' = \big(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])\big) \cap \big(reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),\ ]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[) \cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big)$$

et soit

$$d_i' = \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A}' \\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i,q_{i+1}])}} \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}).$$

Considérons le point $\mathrm{P}_i' = \mathbf{c}(q_i')$, construit en partant de P_{i+1} en utilisant le même procédé que pour construire Q_1^i dans le cas (a). Si

$$\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i'\big)\Big) < \mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}),\ \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\big)\Big),$$

alors $[\mathrm{P}_i'\mathrm{P}_{i+1}]$ ne coupe pas la ligne polygonale $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ et comme par construction $]\mathrm{P}_i'\mathrm{P}_{i+1}[\cap\big(\mathcal{C}\setminus\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])\big) = \emptyset$ il en résulte que cette arête peut être gardée comme arête du polygone porteur. Sinon, soit $\mathrm{P}_i'' = \mathbf{c}(q_i'') \in \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ tel que

$$\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i''\big)\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\big)\Big).$$

Évidemment $\mathrm{P}_i'' \in \mathbf{c}(]q_i',\ q_{i+1}[)$ et donc $]\mathrm{P}_i''\mathrm{P}_{i+1}[$ ne coupe pas $\mathcal{C}\setminus\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$; en plus, $]\mathrm{P}_i''\mathrm{P}_{i+1}[$ ne coupe pas la ligne polygonale $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ et nous gardons donc ce segment comme arête du polygone porteur. Dans les deux cas, nous construisons le restant de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ en construisant la ligne polygonale correspondant à $\mathbf{c}([q_i, q_i'])$, respectivement $\mathbf{c}([q_i, q_i''])$, car ces deux courbes sont dans le cas (a).

Nous construisons ainsi les lignes polygonales associées à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Vue la façon dont cette construction est faite, il est évident que

$$\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1^0\ldots\mathrm{Q}_{m_0}^0\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1^1\ldots\mathrm{Q}_{m_{s-2}}^{s-2}\mathrm{P}_{s-1}\mathrm{Q}_1^{s-1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{s-1}}^{s-1}$$

est un polygone porteur de $\mathcal{C}$ et est aussi un polygone simple. □

Deuxième Partie
Polycourbe de Bézier

I.6. Introduction

Dans la première partie de ce chapitre nous avons introduit de manière rigoureuse la famille de courbes planes, les polycourbes, qui fait l'objet d'étude de cette thèse, la reliant aux résultats similaires déjà parus dans la littérature. Mais, comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce rapport, l'approche que nous nous proposons de présenter est basée sur la construction d'une suite de polygones convergeant, dans un sens à préciser, vers la polycourbe donnée. La construction d'une telle suite de polygones n'étant pas faisable de manière explicite dans le cas des polycourbes générales, nous cherchons un cas particulier tel que, d'un côté, la suite voulue de polygones puisse être construite d'une façon facile à traduire par un algorithme, et de l'autre côté, la famille de courbes correspondant à ce particulier ne soit pas trop restreinte pour que les résultats obtenus pour ses membres soient intéressants.

Une solution facile à ce problème est donnée par les courbes paramétriques contrôlées par des ensembles de points satisfaisant certaines propriétés. Ainsi, si $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont les points de contrôle d'une telle courbe paramétrique, les propriétés mentionnées sont :

- les extrémités de la courbe sont les points P_0 et P_n ;
- la droite P_0P_1 est tangente à la courbe en P_0 et la droite $P_{n-1}P_n$ est tangente à la courbe en P_n ;
- la courbe est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle ;
- la courbe et la ligne polygonale $P_0P_1 \ldots P_n$ vérifient la propriété de la diminution de la variation ([Hos93], [Far97] ; cette propriété sera aussi expliquée dans le paragraphe suivant) ;
- il existe un algorithme de subdivision par l'intermédiaire duquel nous pouvons construire, à partir du polygone $P_0P_1 \ldots P_n$ et sans effectuer d'opérations directement sur la courbe, une suite de polygones convergeant vers la courbe.

Les plus utilisées des classes de courbes paramétriques qui satisfont ces cinq propriétés sont les courbes de Bézier polynômiales et rationnelles, les B-splines et les NURBS, sous certaines conditions. Parmi toutes ces classes, notre choix s'est arrêté sur les courbes de Bézier (polynômiales). Il a été motivé, premièrement, par l'importance du rôle joué par les courbes de Bézier dans la modélisation géométrique et le fait qu'elles sont largement répandues et étudiées, et deuxièmement par la facilité d'implémentation des algorithmes les concernant. Mais nous précisons encore une fois que toute courbe paramétrique ayant les cinq propriétés ci-dessus conviendrait, les preuves des résultats que nous établirons ne reposant pas sur des propriétés des courbes de Bézier autres que celles-ci.

Nous commençons par un bref rappel sur les courbes de Bézier. Ensuite, nous introduisons la polycourbe de Bézier, une polycourbe qui est courbe de Bézier par morceaux, et nous définissons son polygone de contrôle à partir des B-polygones des courbes de Bézier la constituant. Nous étudions aussi les propriétés des polycourbes de Bézier et surtout une propriété du polygone de contrôle qui sera très importante pour la discussion des chapitres suivants.

I.7. Concentré de chapitre (I, deuxième partie)

Quel que soit le niveau de lecture que vous utilisez, si vous n'êtes pas familiarisé avec les courbes de Bézier vous devez impérativement lire la section I.8. Même si vous l'êtes, la lecture de la définition I.11 vous montrera les notations que nous allons utiliser tout au long de la thèse. En plus, regardez la définition I.12, car la distance de Hausorff est beaucoup utilisée dans les chapitres suivants.

Premier niveau. Pour comprendre la discussion des chapitres suivants, vous devez lire les définitions I.13 et I.14 (qui sont équivalentes), I.15, la propriété I.16 et la définition I.17. Le petit texte se trouvant entre les définitions I.14 et I.15 explique pourquoi nous n'utilisons pas des courbes de Bézier quelconques dans la composition de la polycourbe de Bézier. Si vous n'avez pas lu la section I.4, le lemme I.18 ne vous dira rien. La section I.9 devrait être lue en entier, et j'attire particulièrement l'attention sur la remarque de la page 25, indispensable à la compréhension de la notion de polycourbe de Bézier à travers les traitements par subdivision de de Casteljau. Bien sûr, la lecture de la preuve du théorème I.24 est loin d'être nécessaire.

Deuxième niveau. La section I.8 doit être entièrement lue - sauf la preuve du lemme I.18, pour laquelle nous utilisons les propriétés des courbes de Bézier, le fait que toutes les courbes de Bézier de la composition d'une polycourbe de Bézier sont complètement convexes et la propriété I.19, énoncée et prouvée en plein milieu de la démonstration de I.18. La section I.9 doit aussi être toute lue et - au cas où vous lisiez uniquement les avis pour le niveau de lecture qui vous intéresse - j'attire encore l'attention sur la remarque de la page 25, absolument indispensable pour comprendre la notion de polycourbe de Bézier, compte tenu des subdivisions de de Casteljau que ses courbes de Bézier composantes subissent. Pour le théorème I.24, il suffit de mentionner que la valeur γ_0 dépend de la polycourbe (dans sa structure initiale) et plus précisément est une mesure de l' "étroitesse" de la polycourbe. Les deux premières pages de la démonstration (pages 34-36) peuvent être lues pour voir comment γ_0 est défini.

I.8. Rappels sur les courbes de Bézier

I.8.1. *Les polynômes de Bernstein*

Soit n un entier non-négatif. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ nous définissons le polynôme

$$\mathrm{B}_i^n : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R \qquad \mathrm{B}_i^n(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{(n-i)} \qquad \text{où } \mathrm{C}_n^i = n!/(i!(n-i)!)$$

La famille $\{\mathrm{B}_i^n\}_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ forme une base pour l'espace des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à n. Nous nous intéressons uniquement aux restrictions de ces polynômes à l'intervalle $[0, 1]$ et voici quelques-unes de leur propriétés :

1. $0 \leq \mathrm{B}_i^n(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$;
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}_i^n(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$;
3. $\mathrm{B}_i^n(t) = \mathrm{B}_{n-i}^n(1-t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$;
4. $\mathrm{B}_i^n(t) = (1-t)\mathrm{B}_i^{n-1}(t) + t\mathrm{B}_{i-1}^{n-1}(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$, avec la convention

$B_i^n(t) = 0$ si $i < 0$ ou $i > n$;
5. $(B_i^n)'(t) = n\big(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\big) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0,\ldots,n\}$.
Les preuves de ces propriétés ne sont pas difficiles à faire et peuvent être trouvées dans plusieurs titres de la bibliographie [Hos93], [Far97], [Fio87].

I.8.2. *Définition et propriétés des courbes de Bézier*

Nous sommes intéressés uniquement par les courbes de Bézier planes, même si ces courbes peuvent être définies dans un cadre beaucoup plus général.

Définition I.11. – *Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ des points du plan. La courbe de Bézier associée à cet ensemble de points est la courbe paramétrique polynômiale de degré n définie par*

$$B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,\cdot\,) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i$$

Les points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ s'appellent les points de contrôle de la courbe de Bézier et le polygone $P_0 P_1 \ldots P_n$ le polygone Bézier ou B-polygone.

Remarque – Le B-polygone d'une courbe de Bézier sera considéré, sauf mention contraire, comme n'étant pas fermé, donc sans l'arête $]P_m P_0[$.

La figure I.9 présente des exemples de courbes de Bézier.

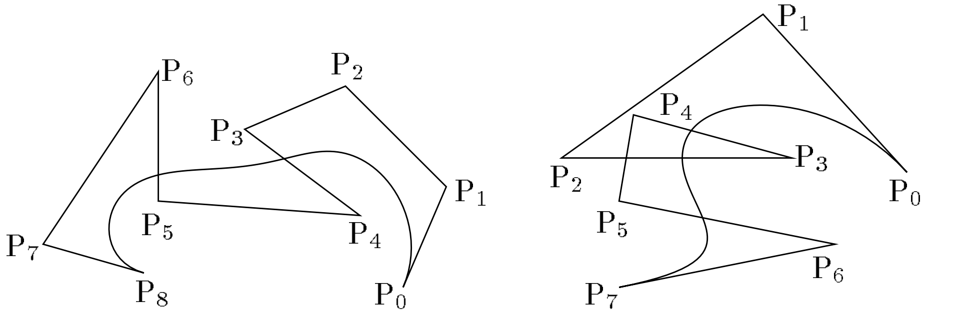


Figure I.9

Les courbes de Bézier ont des propriétés géométriques intéressantes :
(I.11.1) la courbe a les mêmes extrémités que son B-polygone ;
(I.11.2) la courbe est incluse dans l'enveloppe convexe de son B-polygone ;
(I.11.3) la courbe est symétrique en t :

$$B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,1-t) = B_n(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0\,;\,t)$$

(I.11.4) la diminution de la variation : le cardinal de l'intersection d'une droite quelconque avec la courbe est inférieur ou égal au cardinal de l'intersection de la droite avec le B-polygone ;
(I.11.5) les droites P_0P_1 et $P_{n-1}P_n$ sont respectivement tangentes à la courbe en P_0 et P_n.

Ces propriétés découlent des propriétés des polynômes de Bernstein. Leur démonstrations peuvent être trouvées dans la bibliographie [Hos93], [Far97]. En plus, il existe des expressions pour toutes les dérivées de $B_n(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0\,;\,.)$, mais nous nous contentons de donner les formules de la première et de la deuxième dérivées, car elles nous seront nécessaires par la suite :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}'_n(\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{n-1}, \ldots, \mathrm{P}_0\,;\, t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{B}_i^{n-1}(t)(\mathrm{P}_{i+1} - \mathrm{P}_i) \\
\mathrm{B}''_n(\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{n-1}, \ldots, \mathrm{P}_0\,;\, t) &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \mathrm{B}_i^{n-2}(t)(\mathrm{P}_{i+2} - 2\mathrm{P}_{i+1} + \mathrm{P}_i)
\end{aligned}
\tag{I.2}
$$

I.8.3. *La subdivision de de Casteljau*

L'algorithme de subdivision de de Casteljau est une méthode par laquelle nous pouvons construire, à partir des points de contrôle $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ d'une courbe de Bézier, une suite de polygones qui converge vers la courbe au sens de plusieurs distances, parmi lesquelles nous nous intéressons à la distance de Hausdorff.

Soit $t_0 \in]0,1[$. En utilisant la formule $\mathrm{P}_i^j = (1-t_0)\mathrm{P}_i^{j-1} + t_0 \mathrm{P}_{i+1}^{j-1}$, nous construisons le tableau triangulaire suivant :

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathrm{P}_0^0 = \mathrm{P}_0 & & & & & & \\
 & \mathrm{P}_0^1 & & & & & \\
\mathrm{P}_1^0 = \mathrm{P}_1 & & \mathrm{P}_0^2 & & & & \\
 & \mathrm{P}_1^1 & & \cdot & & & \\
\mathrm{P}_2^0 = \mathrm{P}_2 & & & & \cdot & & \\
\quad\cdot & & & & & \mathrm{P}_0^{n-1} & \\
\quad\cdot & & & & & & \mathrm{P}_0^n \\
\quad\cdot & & & & & \mathrm{P}_1^{n-1} & \\
\mathrm{P}_{n-2}^0 = \mathrm{P}_{n-2} & & & & \cdot & & \\
 & \mathrm{P}_{n-2}^1 & & \cdot & & & \\
\mathrm{P}_{n-1}^0 = \mathrm{P}_{n-1} & & \mathrm{P}_{n-2}^2 & & & & \\
 & \mathrm{P}_{n-1}^1 & & & & & \\
\mathrm{P}_n^0 = \mathrm{P}_n & & & & & &
\end{array}
$$

Ce tableau peut être résumé par la formule

$$
\mathrm{P}_i^j = \sum_{k=0}^{j} \mathrm{B}_k^j(t_0)\mathrm{P}_{i+k} \tag{I.3}
$$

Le point P_0^n est le point de la courbe correspondant au paramètre t_0 :

$$
\mathrm{P}_0^n = \mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\, t_0)
$$

Ainsi, la courbe de Bézier est partagée en deux morceaux, $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[0,t_0])$ et $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[t_0,1])$, et chacune de ces deux parties peut être reparamétrisée comme courbe de Bézier. La courbe $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[0,t_0])$ sera la courbe associé au B-polygone $\mathrm{P}_0^0\mathrm{P}_0^1\ldots\mathrm{P}_0^{n-1}\mathrm{P}_0^n$ et la courbe $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[t_0,1])$ sera la courbe associée au B-polygone $\mathrm{P}_0^n\mathrm{P}_1^{n-1}\ldots\mathrm{P}_{n-1}^1\mathrm{P}_n^0$. Nous pouvons donc appliquer le même procédé à chacune des courbes $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[0,t_0])$ et $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[t_0,1])$, en obtenant ainsi une division de la courbe initiale en quatre morceaux pouvant chacun être écrit sous la forme d'une courbe de Bézier, et ainsi de suite. Si à chaque étape nous considérons le polygone obtenu par l'union des tous les B-polygones des parties respectives de la courbe initiale, nous aurons une suite de polygones qui converge vers cette courbe [Hos93], [Far97], [Fio87] au sens de plusieurs distances, parmi lesquelles nous nous intéressons à la distance de Hausdorff (dont la définition est rappelée plus loin). La figure I.10 présente un exemple de courbe de Bézier subdivisée une fois pour un paramètre $t_o = 1/3$.

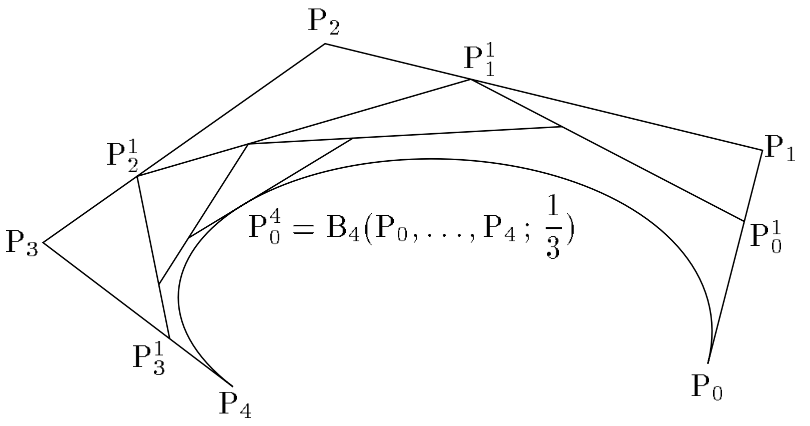


Figure I.10

Rappelons ici définition de la distance de Hausdorff, que nous allons beaucoup utiliser :

Définition I.12. – *Soit* E *un espace métrique et notons* $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *l'ensemble de tous les compacts de* E*. Alors pour* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *la distance de Hausdorff entre* K_1 *et* K_2 *sera définie par*

$$\delta^{\mathrm{H}}(K_1, K_2) = \inf\{r > 0 \big| K_1 \subset \mathrm{B}(K_2, r) \text{ et } K_2 \subset \mathrm{B}(K_1, r)\} \tag{I.4}$$

Une autre définition connue pour la distance de Hausdorff est

$$\delta^{\mathrm{H}}(K_1, K_2) = \max\{\sup_{\mathrm{A}\in K_1} \inf_{\mathrm{B}\in K_2} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \sup_{\mathrm{A}\in K_2} \inf_{\mathrm{B}\in K_1} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\} \tag{I.5}$$

Les deux définitions sont bien sûr équivalentes et δ^{H} a toutes les propriétés d'une distance sur $\mathcal{K}(\mathrm{E})$.

I.9. Définition et propriétés de la polycourbe de Bézier

Nous allons, dans ce qui suit, beaucoup utiliser la notion de *courbe convexe*, précisons donc ce que nous entendons exactement par là.

Définition I.13. – *Nous dirons qu'une courbe simple* $\mathcal{C}$ *d'extrémités* A *et* B *est convexe ssi* $reg(\mathcal{C}, [\mathrm{AB}])$ *est convexe.*

Les points A et B peuvent être confondus ou pas. Une autre définition est

Définition I.14. – *Une courbe simple est convexe ssi elle est incluse dans la frontière de son enveloppe convexe.*

L'équivalence de ces deux définitions est évidente, de par la définition de $reg(\mathcal{C}, \mathrm{AB})$, et nous utiliserons l'une ou l'autre en fonction des besoins de la discussion.

Comme mentionné dans l'introduction de cette partie, nous allons particulariser la notion de polycourbe, trop générale pour le traitement algorithmique, en utilisant des courbes de Bézier. Mais encore, les courbes de Bézier quelconques s'avèrent trop générales pour les algorithmes que nous allons présenter dans cette thèse. Ceci est dû au fait que nous aurons besoin pas seulement de courbes convexes par morceaux, ce que les courbes de Bézier sont de toute façon, mais aussi de pouvoir délimiter ces morceaux convexes, ce qui revient au problème du calcul des points d'inflexion d'une courbe de Bézier donnée, et par conséquent à la résolution d'équations polynômiales qui peuvent être de degré assez élevé. Même plus, si chaque courbe de Bézier a un B-polygone convexe, les coûts des algorithmes, mais surtout les preuves des résultats que nous présenterons se trouvent grandement allégés. Or, Calcoen [Cal96] a prouvé qu'il existe des courbes de Bézier qui sont convexes, dont le B-polygone n'est pas convexe et qui sont telles que nous obtiendrons toujours par subdivisions successives de de Casteljau une "sous-courbe" dont le B-polygone n'est pas convexe, pourvu que le paramètre utilisé pour ces subdivisions satisfasse certaines propriétés, en fonction de la courbe. Comme nous utiliserons toujours, pour la facilité des calculs, un paramètre de subdivision égal à $1/2$, les courbes convexes à B-polygone non-convexe ne peuvent pas être acceptées.

Définition I.15. – *Nous dirons qu'une courbe de Bézier est complètement convexe si son B-polygone est simple et convexe.*

Remarque Bien sur, cette propriété doit être satisfaite par tout autre type de courbe paramétrique contrôlée par des points que nous voudrons utiliser à la place des courbes de Bézier.

Propriété I.16. – *Une courbe de Bézier complètement convexe est une courbe convexe*

Preuve – Soit $\mathcal{B} = \mathrm{B}_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m\,;\,[0,1])$ une courbe de Bézier complètement convexe et supposons qu'elle n'est pas une courbe convexe. La définition I.13 impliquera alors que $reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ n'est pas convexe. Il existe donc $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_3 \in reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ et $\mathrm{Q}_2 \notin reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ tels que $\mathrm{Q}_2 \in]\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3[$. Mais $\mathcal{B} \cup [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ est une courbe fermée, par conséquent la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ coupera $\mathcal{B} \cup [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ au moins trois fois. Si un de ces trois points d'intersection appartient à $]\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m[$, nous obtenons une contradiction en remarquant que, suite à la propriété de la diminution de la variation, le cardinal de l'intersection de la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ avec le B-polygone est au moins deux et alors le polygone (fermé) $\mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_m$ aura trois points d'intersection avec cette droite, ce qui contredit le fait que la courbe $\mathcal{B}$ est complètement convexe. Si la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ coupe $\mathcal{B}$ trois fois, la contradiction est immédiate, toujours en utilisant la propriété de la diminution de la variation. La supposition faite est donc fausse et $\mathcal{B}$ est une courbe convexe. □

Nous pouvons maintenant introduire l'objet qui sera étudié dans toute la suite de cette thèse.

Définition I.17. – *Une polycourbe de Bézier est une courbe simple qui est union de courbes de Bézier complètement convexes.*

Nous avons appelé notre objet polycourbe de Bézier, mais, pour l'instant, rien ne justifie cette appellation. Nous donnons donc le résultat suivant :

Lemme I.18. – *Toute polycourbe de Bézier est une polycourbe.*

Preuve – Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier, où

$$\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\,;\,[0,1]) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

sont des courbes de Bézier complètement convexes, et soit $\mathbf{b} : [0, \alpha] \longrightarrow I\!R^2$ sa paramétrisation par l'abscisse curviligne. Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \alpha$ tels que $\mathbf{b}([t_{i-1}, t_i]) = \mathcal{B}_i$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Les paramètres $t_0, \ldots, t_n$ existent et sont uniques.

Les courbes de Bézier étant des courbes polynômiales, donc régulières, il est évident que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1},t_i[}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc $\mathbf{b}$ satisfait la condition (I.5.i). Il nous reste ainsi à prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1},t_i[}$ satisfait les conditions (I.5.ii) et (I.5.iii) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1},t_i[}$ satisfait la condition (I.5.ii) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ revient (grâce aux propriétés des courbes de Bézier, qui font que le paramétrage par l'abscisse curviligne et le paramétrage de Bézier sont équivalents pour chaque courbe de Bézier) à prouver que $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, \cdot)$ satisfait (I.5.ii) sur l'intervalle $]0,1[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Propriété I.19. – *Si* $\mathcal{B} = \mathrm{B}_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, [0,1])$ *est une courbe de Bézier complètement convexe telle que les points* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ *ne soient pas tous colinéaires, alors* $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t) \neq 0$ *pour tout* $t \in]0,1[$.

Preuve – Cette preuve sera faite par l'absurde : supposons qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t_0) = 0$. Nous appliquons à la courbe $\mathcal{B}$ la subdivision de de Casteljau de rapport t_0, en obtenant ainsi les polygones $\mathcal{P}^j = \mathrm{P}_0^j \mathrm{P}_1^j \ldots \mathrm{P}_{m-j}^j$ décrits dans la sous-section I.6.3 pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$. Le B-polygone $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$ de la courbe de Bézier étant simple et convexe, et compte tenu de la formule (I.3), tous les polygones $\mathcal{P}^j$ seront eux aussi simples et convexes (chaque polygone $\mathcal{P}^{j+1}$ s'obtient en "coupant les coins" du polygone $\mathcal{P}^j$).

En utilisant la deuxième formule de (I.2), nous déduisons que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t_0)$ est proportionnel à $\mathrm{P}_0^{m-2} - 2\mathrm{P}_0^{m-1} + \mathrm{P}_0^m$. Par conséquent, pour que cette dérivée soit nulle nous devons avoir $\mathrm{P}_0^{m-1} = (\mathrm{P}_0^{m-2} + \mathrm{P}_0^m)/2$, ce qui implique la colinéarité des trois points. Comme $\mathrm{P}_0^{m-1} = (1-t_0)\mathrm{P}_0^{m-2} + t_0\mathrm{P}_1^{m-2}$, les points $\mathrm{P}_0^{m-2}, \mathrm{P}_1^{m-2}, \mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_0^m$ doivent tous être colinéaires. D'un autre côté, $\mathrm{P}_0^m = (1-t_0)\mathrm{P}_0^{m-1} + t_0\mathrm{P}_1^{m-1}$, et en conséquence $\mathrm{P}_0^m, \mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_1^{m-1}$ et P_0^{m-2} sont colinéaires, ce qui nous mènera facilement à la colinéarité de $\mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_1^{m-1}$ et P_2^{m-2}. En conclusion, nous obtiendrons la colinéarité des points $\mathrm{P}_0^{m-2}, \mathrm{P}_1^{m-2}$ et P_2^{m-2}. Soit Δ^{m-2} la droite engendrée par ces points.

Si nous supposons que les points $\mathrm{P}_i^{m-3}, i \in \{0, \ldots, 3\}$, n'appartiennent pas à Δ^{m-2}, nous obtiendrons tout de suite une contradiction. En effet, dans ce cas le polygone $\mathcal{P}^{m-3}$ aurait trois points d'intersection avec la droite Δ^{m-2}, tout en étant simple et convexe, ce qui est impossible. Par conséquent, les points $\mathrm{P}_i^{m-3}, i \in \{0, \ldots, 3\}$ doivent eux aussi être colinéaires.

En continuant ce raisonnement, nous finirons par obtenir la colinéarité des points $\mathrm{P}_i, i \in \{0, \ldots, m\}$, contradiction avec l'hypothèse faite sur la courbe de Bézier $\mathcal{B}$. Ainsi, la supposition de l'existence d'un paramètre t_0 tel que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t_0) = 0$ nous a menés à une contradiction, donc elle est fausse et la preuve de la propriété est achevée.

□

En revenant à la preuve du lemme, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si les points $\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{B}_i$ est un segment et, de par leur définition, il n'y a pas de points critiques sur la courbe $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{m_i} \,;\,]0,1[)$. Si $\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathrm{B}''_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{m_i} \,;\, t) \neq 0$ pour tout $t \in]0,1[$ et donc il n'existe pas de point critique sur la courbe $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_i m \,;\,]0,1[)$. Ainsi, dans tous les cas la courbe $\mathcal{B}_i$ satisfait la condition (I.5.ii), et ceci quelque soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour prouver que $\mathbf{b}$ satisfait la condition (I.5.iii) nous allons prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1},t_i[}$ est injective pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $\mathbf{b}\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est en fait la paramétrisation par l'abscisse courviligne de la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$. Mais, conformément à la propriété I.16, $reg(\mathcal{B}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$ est convexe et par conséquent, en appliquant la proposition I.7, nous obtiendrons l'injectivité de $\mathrm{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$, ce qui conclut la preuve de ce lemme. □

I.10. Polygone de contrôle

La polycourbe de Bézier étant une polycourbe, elle est aussi un splinegone. Un polygone porteur est naturellement défini par la succession des extrémités des courbes de Bézier qui composent la polycourbe, et un polygone porteur simple peut être construit par la technique décrite dans la sous-section I.5.2. Mais à une polycourbe de Bézier nous pouvons associer un polygone autre que le polygone porteur, obtenant ainsi des propriétés géométriques très intéressantes pour les problèmes que nous voulons traiter dans cette thèse.

I.10.1. *Définition et propriétés du polygone de contrôle*

Définition I.20. – *L'union des B-polygones des courbes de Bézier composant une polycourbe de Bézier sera appelée le polygone de contrôle de la polycourbe de Bézier.*

Deux premières propriétés de ce polygone découlent directement des propriétés des courbes de Bézier. Ainsi, la propriété de la diminution de la variation est valable pour une polycourbe de Bézier, toute droite coupera le polygone de contrôle au moins autant de fois qu'elle coupe la polycourbe. La preuve de cette propriété est immédiate. La deuxième des deux propriétés est l'inclusion de la polycourbe dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle, qui est aussi facile à prouver et qui est la pierre de faîte de l'étude faite dans les chapitres II et III.

Une autre propriété, qui jouera un rôle important dans le chapitre V, est "l'encadrement" que le polygone porteur et le polygone de contrôle font à la polycourbe. Nous voulons dire par là que, en prenant une polycourbe de Bézier $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$, où $\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\,;\,[0,1])$ est une courbe de Bézier complètement convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et en notant $\mathcal{P}_i$ le B-polygone de la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$, nous aurons

$$\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{reg(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])}$$

Cette propriété aussi est très facile à prouver.

REMARQUE La définition I.17 s'avérera, au fil de la discussion, un peu ambiguë. En effet, le traitement que nous appliquerons aux polycourbes de Bézier dans la résolution des problèmes que nous nous poserons consiste à subdiviser une partie ou toutes les courbes de Bézier composant la polycourbe jusqu'à l'obtention d'un polygone de contrôle pour cette polycourbe qui satisfait certaines propriétés, en fonction du problème. Soit la polycourbe

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \qquad \mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \,;\, [0,1]) \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Si nous subdivisons la courbe de Bézier $\mathcal{B}_{i_0}$, en obtenant les courbes $\mathcal{B}'_{i_0}$ et $\mathcal{B}''_{i_0}$, alors conformément à I.17 la courbe

$$\left(\bigcup_{i=1}^{i_0-1} \mathcal{B}_i\right) \cup \mathcal{B}'_{i_0} \cup \mathcal{B}''_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i=i_0+1}^{n} \mathcal{B}_i\right)$$

est une polycourbe, mais elle n'est pas $\mathcal{B}$. Or, il est évident que nous ne voulons pas avoir une nouvelle polycourbe après chaque subdivision que nous appliquons.

Sur l'ensemble des polycourbes de Bézier (données par I.17), nous définissons la relation "obtenue par subdivision/fusion de de Casteljau". Il est très facile à voir que cette relation est une relation d'équivalence, et en redéfinissant la polycourbe de Bézier comme étant une classe d'équivalence de cette relation nous aurons une caractérisation formelle de la polycourbe. Cette nouvelle définition étant un peu lourde, nous la considérons implicite. Ainsi, nous aurons une distinction entre la polycourbe initiale (à laquelle aucune subdivision de de Casteljau n'a été appliquée) et la polycourbe courante à un certain moment de la discussion, qui est un membre de la classe d'équivalence de la polycourbe initiale, pouvant être la polycourbe initiale elle-même. Pour ne pas alourdir la présentation, une polycourbe $\mathcal{B}$ sera toujours écrite comme $\cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$, aussi bien dans sa forme initiale que dans toutes ses formes courantes, tout en gardant à l'esprit que n varie.

I.10.2. *Polygone de contrôle pseudo-simple*

De même que pour le polygone porteur, nous nous intéressons à l'existence d'un polygone de contrôle simple, qui sera essentielle dans la discussion sur l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier fermée. En effet, nous pouvons voir dans la figure I.11 un exemple de polycourbe de Bézier fermée dont le polygone de contrôle n'est pas simple et il est facile de remarquer que l'enveloppe convexe de ce polygone de contrôle a une composition qui n'est pas très cohérente du point de vue de l'ordre des sommets du polygone de contrôle en tant que sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe (nous n'entrons pas dans les détails ici, tout sera pleinement expliqué dans le chapitre suivant).

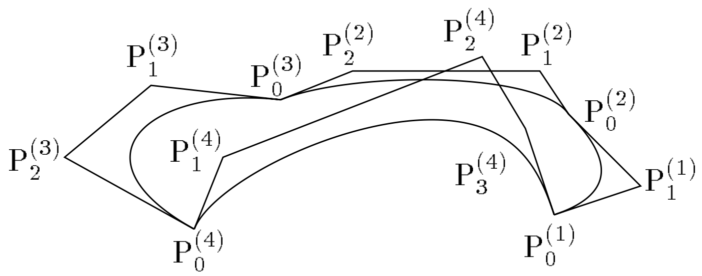


Figure I.11

En plus, nous voudrons pouvoir obtenir un polygone de contrôle simple pour une polycourbe de Bézier uniquement par l'intermédiaire des subdivisions de de Casteljau (de rapport 1/2, mais il sera toujours ainsi et nous ne le mentionnerons plus) successives, sans avoir à calculer des intersections de droites et de courbes de Bézier, car les subdivisons sont algorithmiquement calculables de manière exacte si (supposition naturelle) les points de contrôle des courbes de Bézier à subdiviser sont rationnels.

Malheureusement, à la différence du cas du polygone porteur, il existe des polycourbes pour lesquelles l'obtention d'un polygone de contrôle simple est impossible. Cette situation arrive toujours quand il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\mathrm{P}_1^{(i+1)} \in]\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$, car alors le cardinal de l'intersection de $[\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]$ et de $[\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}]$ est infini et cette propriété reste indifféremment du nombre de subdivisions que nous appliquons à $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$. Dans la figure I.12 sont représentés les deux principaux cas possibles pour les positions relatives des courbes $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$ quand la propriété ci-dessus est satisfaite.

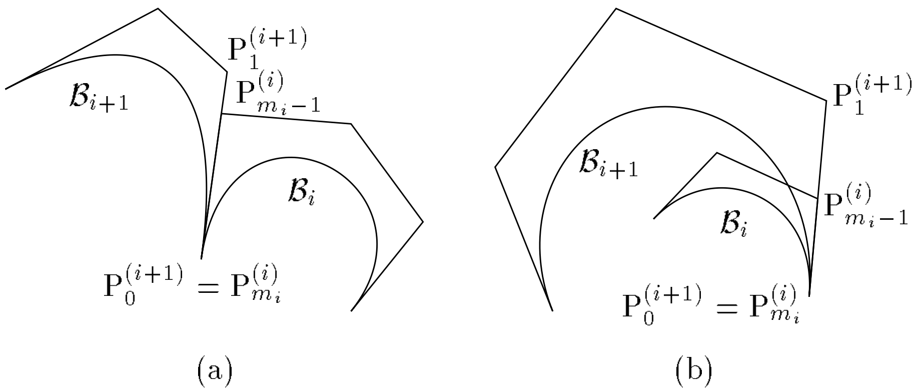


Figure I.12

Par conséquent, nous cherchons une propriété plus faible que la simplicité et telle que, d'un côté, nous puissions obtenir par subdivision de de Casteljau un polygone de contrôle la satisfaisant pour toute polycourbe, et de l'autre côté, un polygone de contrôle la satisfaisant garde les propriétés des polygones simples dont nous aurons besoin (dans le deuxième chapitre nous préciserons).

Définition I.21. – *Soit $\mathcal{R} = \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\ldots\mathrm{R}_n$ un polygone. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est pseudo-simple si et seulement si pour tous $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$*

$$[\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}] \cap [\mathrm{R}_j\mathrm{R}_{j+1}] \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{les points } \mathrm{R}_{i+1},\mathrm{R}_{i+2},\ldots,\mathrm{R}_j \textit{ sont colinéaires} \\ \textit{ou} \\ \textit{les points } \mathrm{R}_{j+1},\mathrm{R}_{j+2},\ldots,\mathrm{R}_i \textit{ sont colinéaires} \end{array}$$

Bien sur, dans cette définition le polygone $\mathcal{R}$ est considéré fermé et les indices sont pris circulairement. Si le polygone n'est pas fermé, une seule des deux chaînes de points sera colinéaire, celle qui contient des indices croissants.

Comme nous avons déjà mentionné, certaines des courbes de Bézier constituant la polycourbe subiront des subdivisions. Par conséquent, nous nous voyons amenés à nous questionner sur l'invariance des propriétés du polygones de contrôle aux subdivisions de de Casteljau non-uniformes des courbes constituant la polycourbe. Plus précisément, l'interrogation est : si le polygone de contrôle de la polycourbe satisfait la condition **A** et si nous obtenons un nouveau polygone de contrôle en subdivisant certaines des, éventuellement toutes les, courbes qui composent la polycourbe, le nouveau polygone satisfait-il la condition **A** ?

La réponse, si la condition **A** est la pseudo-simplicité, est non. Si, dans l'exemple de la figure I.12(b), nous subdivisons la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$ une fois et après sa moitié de droite encore une fois, la ligne polygonale obtenue ne sera plus pseudo-simple (figure I.13), celle initiale l'étant.

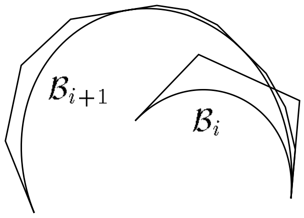


Figure I.13

Cette perte de pseudo-simplicité peut apparaître à chaque fois que la situation décrite par la définition suivante survient :

Définition I.22. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier, où $\mathcal{B}_i$ sont des courbes de Bézier complètement convexes de B-polygone $\mathcal{P}_i = \mathrm{P}_0^{(i)} \ldots \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nous dirons que $\mathcal{B}$ a une tangence intérieure ssi il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que*

$$\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \in]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{B}_i \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}, \mathcal{B}_{i+1}\big)$$

La figure I.12(b) présente un cas de tangence intérieure.

Définition I.23. – *Nous dirons qu'une polycourbe est sans tangence intérieure (sti) si elle n'a pas de tangence intérieure.*

Nous avons maintenant toutes les définition nécessaires pour donner le théorème d'existence du polygone de contrôle pseudo-simple.

Théorème I.24. – *Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure et soit $\mathcal{P}$ son polygone de contrôle. Alors il existe $\gamma_0 > 0$ tel que si la polycourbe $\mathcal{B}$ s'écrit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$ avec $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0$, alors le polygone de contrôle correspondant à cette écriture, $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i$, est pseudo-simple.*

La démonstration de ce théorème, très technique, peut être trouvée dans l'annexe du chapitre.

Annexe

Preuve de la proposition I.7 – Nous prouvons d'abord l'implication directe et ensuite la réciproque.

Pour prouver (I.7.ii), nous utilisons un lemme qui est valable dans un contexte beaucoup plus général :

Lemme I.25. – *Soit E un espace de Banach et soit $\mathcal{A} \subset E$ un convexe ouvert non-vide. Alors pour tout $\mathrm{P} \in \delta(\mathcal{A})$ il existe un hyperplan $H \subset E$ tel que $\mathrm{P} \in H$ et $\mathcal{A} \cap H = \emptyset$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate d'un théorème de Hahn-Banach :

Théorème I.26. – *Soit E un espace de Banach et soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset E$ deux convexes ouverts non-vides disjoints. Alors il existe $H \subset E$ un hyperplan qui sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement inclus dans des demi-espaces opposés par rapport à H).*

Nous appliquons le lemme I.25 pour $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$, en choisissant $\mathrm{P} \in]\mathrm{AB}[$. Il existe donc une droite Δ telle que $\mathrm{P} \in \Delta$ et $\Delta \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$. Évidemment, Δ doit être égale à AB et nous aurons les implications

$$\begin{aligned}
&\forall \mathrm{Q} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \quad reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \quad \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q})} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \setminus [\mathrm{AB}] \quad \mathcal{C} \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q})} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \setminus [\mathrm{AB}] \quad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \quad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}).
\end{aligned}$$

Pour prouver (I.7.i), remarquons d'abord que pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ la droite donnée par le lemme I.25 est unique et est la droite tangente à $\mathcal{C}$ en P. En effet, si nous supposons qu'il existe $\mathrm{P}_0 = \mathbf{c}(t_0) \in \mathcal{C}$, avec $t_0 \in]a, b[$, tel qu'il existe une droite $\Delta \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_0), \mathbf{c}(t_0))$ passant par P et telle que $\Delta \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$, alors le point t_0 sera un point de discontinuité pour $\mathbf{c}'$, d'où la contradiction.

Supposons maintenant qu'il existe $t_1 \neq t_2 \in]a, b[$ tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$. Alors nous aurons soit $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, soit $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$ et $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \| \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$. Si $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, alors, comme $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ est convexe et donc $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ est convexe et $\mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_2) \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$, nous obtenons $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$. Mais d'un côté

$$\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2) \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$$

et donc $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \delta(reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[))$, et d'un autre côté $t_1, t_2 \notin \{a, b\}$, donc on ne peut pas avoir $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset]\mathrm{AB}[$. Ainsi, $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \mathcal{C}$, ce qui contredit une des conditions de l'hypothèse (la condition $\det\big(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)\big) \neq 0 \ \forall t \in]a, b[$). Il reste donc à traiter le cas

$$\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)) \quad \text{et} \quad \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \| \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$$

Soient

$$\mathcal{R}_1 = \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)),$$

$$\mathcal{R}_3 = \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$$

et

$$\mathcal{R}_2 = \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)) \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)),$$

comme présenté dans la figure I.14.

Nous savons que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ est incluse dans un seul des deux demi-plans ouverts déterminés par $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$, donc $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ sera incluse dans un seul des deux demi-plans fermés déterminés par $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$. Comme $\mathbf{c}(t_2) \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ se trouve dans le demi-plan $\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, nous en déduisons que

$$\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))}.$$

De même, nous aurons

$$\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))}$$

et il en résulte que $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathcal{R}}_2$ et donc que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{R}}_2$.

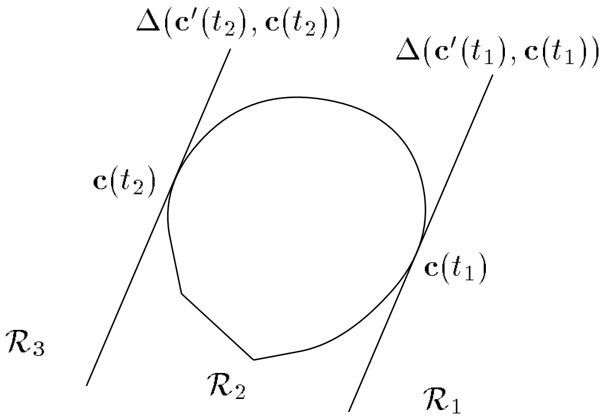


Figure I.14

Le segment $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)]$ partage $\mathcal{R}_2$ en deux sous-régions. Soit $\mathcal{R}_2^+$ celle de ces deux sous-régions donnée par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_1)$ (ou de $\mathbf{c}'(t_2)$, car ils sont égaux) et $\mathcal{R}_2^-$ l'autre, toutes les deux considérées ouvertes. Dans un voisinage de $\mathbf{c}(t_1)$ nous aurons donc la situation présentée dans la figure I.15.

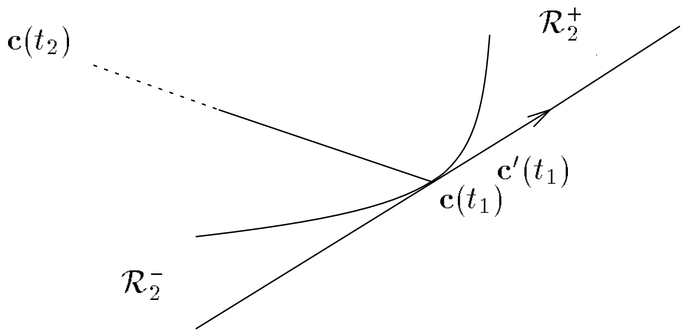


Figure I.15

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_1', t_1'' \in]a, b[$ tels que $t_1' < t_1 < t_1''$, $\mathbf{c}(t_1') \in \mathcal{R}_2^-$, $\mathbf{c}(t_1'') \in \mathcal{R}_2^+$ et $t_1'' - t_1' < \varepsilon$. De même, nous aurons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_2', t_2'' \in]a, b[$ tels que $t_2' < t_2 < t_2''$, $\mathbf{c}(t_2') \in \mathcal{R}_2^-$, $\mathbf{c}(t_2'') \in \mathcal{R}_2^+$ et $t_2'' - t_2' < \varepsilon$.

Nous pouvons choisir ε tel que $t_1'' < t_2'$, si $t_2 < t_1$, ou $t_2'' < t_1'$, si $t_1 < t_2$. Nous allons supposer $t_2 < t_1$. La courbe est continue, il résulte donc qu'il existe $t_3 \in]t_1'', t_2'[$ tel que $\mathbf{c}(t_3) \in]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[$. Pour obtenir une contradiction, nous utilisons le résultat suivant :

Lemme I.27. – *Soit $\mathcal{A}$ un convexe. Alors*

$$[\mathrm{PQ}] \subset \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow]\mathrm{PQ}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A}) \textit{ ou }]\mathrm{PQ}[\subset \delta(\mathcal{A}).$$

La preuve de ce lemme se trouve à la fin de la preuve de la proposition I.7.

En utilisant le lemme, nous obtiendrons ainsi

$$[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{c}(t_3) \in]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[\\ \mathbf{c}(t_3) \in \mathcal{C} \subset \delta(\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}) \end{array}$$

donc $]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[\subset \delta(\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)})$, ce qui donne encore une fois une contradiction avec la condition $\mathbf{c}''(t) \neq 0\ \forall t \in]a,b[$. Donc il ne peut pas exister deux points distincts sur la courbe ayant le même vecteur tangent, par conséquent $\mathbf{c}'\big|_{]a,b[}$ est injective et l'implication directe est ainsi démontrée.

Pour prouver la réciproque, nous devons d'abord démontrer que la région $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ existe. Pour ça, il faut et il suffit que la courbe fermée formée par l'union de $\mathcal{C}$ et de $[\mathrm{AB}]$ soit simple. Comme $\mathcal{C}$ est simple, il reste à prouver que $\mathcal{C} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$. Mais nous savons $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB},\mathrm{P}), \forall \mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$, donc $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \cap \mathrm{AB} = \emptyset$, ce qui implique $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$ et en conclusion $\mathcal{C} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$.

Supposons maintenant que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ n'est pas convexe. Alors il existe trois points $\mathrm{M},\mathrm{N},\mathrm{P}$ tels que $\mathrm{M},\mathrm{P} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$, $\mathrm{N} \notin \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ et $\mathrm{N} \in]\mathrm{MP}[$. De la continuité de la courbe fermée $\mathcal{C} \cup]\mathrm{AB}[$ il résulte que la droite MP coupe $\delta(reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \mathcal{C} \cup]\mathrm{AB}[$ en au moins quatre points distincts. Or au plus un de ces points peut appartenir à $]\mathrm{AB}[$, donc la droite MP coupe la courbe $\mathcal{C}$ en au moins trois points distincts. Soient $\mathrm{R},\mathrm{S},\mathrm{T} \in \mathrm{MP}$ trois points successifs (sur la droite MP), intersections de $\mathcal{C}$ avec MP et supposons que $]\mathrm{RS}[\subset reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ et $]\mathrm{ST}[\subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$. Soient $t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T} \in]a,b[$ tels que $\mathbf{c}(t_\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ pour tout $\mathrm{X} \in \{\mathrm{R},\mathrm{S},\mathrm{T}\}$. En plus, nous choisissons R, S et T tels que $t_\mathrm{R} < t_\mathrm{S} < t_\mathrm{T}$, donc tels qu'ils soient ordonnés aussi sur la courbe, et dans le même ordre. Nous prouverons qu'il existe $t_1 \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[$ et $t_2 \in]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T}[$ tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$.

Soit DP_1 le demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{R})$, qui est égal au demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{T})$, et DP_2 le demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{S})$, donc $\mathrm{DP}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{DP}_1}$. Soit $t_1 \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[$ tel que $\mathbf{c}(t_1) \in \mathrm{DP}_1$ et

$$\mathrm{d}(\mathbf{c}(t_1),\mathrm{RS}) = \sup_{\substack{t \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[\\ \mathbf{c}(t) \in \mathrm{DP}_1}} \mathrm{d}(\mathbf{c}(t),\mathrm{RS}).$$

Évidemment, un tel t_1 existe et il peut être unique ou pas. Compte tenu de la façon dont nous l'avons choisi, $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$, la droite tangente à $\mathcal{C}$ en $\mathbf{c}(t_1)$, est parallèle à RS. Si nous posons

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\mathrm{d}(\mathrm{R},\mathrm{S})},$$

alors nous aurons $\mathbf{c}'(t_1) = \pm\vec{u}$. Nous voulons prouver que $\mathbf{c}'(t_1) = \vec{u}$.

Supposons que $\mathbf{c}'(t_1) = -\vec{u}$. Soit Δ_n la normale à RS passant par $\mathbf{c}(t_1)$ et soit DP_+ le demi-plan ouvert déterminé par Δ_n et l'orientation du vecteur $\vec{u}$ et DP_- le demi-plan ouvert déterminé par Δ_n et l'orientation du vecteur $-\vec{u}$. Nous introduisons les notations :

$$\mathcal{R}_+ = \mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R}) \cap \mathrm{DP}_+$$

$$\mathcal{R}_- = \mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R}) \cap \mathrm{DP}_-.$$

Il vient donc $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R})}$ et aussi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_1', t_1'' \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[\text{ tels que } t_1' < t_1 < t_1'', \ \mathbf{c}(t_1') \in \mathcal{R}_+, \ \mathbf{c}(t_1'') \in \mathcal{R}_- \ \textit{et} \ t_1'' - t_1' < \varepsilon.$$

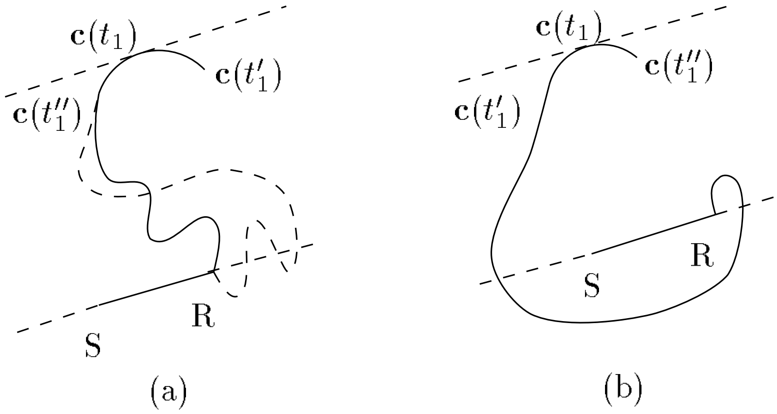


Figure I.16

Dans le cas présenté figure I.16(a), la courbe tracée en continu et celle tracée en pointillés sont homotopes par rapport aux conditions imposées à la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$, c'est-à-dire l'interdiction de couper le segment [RS] ou la droite $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$ et le respect des positions relatives des points $\mathbf{c}(t_1'), \mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_1'')$. Nous remarquons aussi que pour ces mêmes conditions les courbes de la figure I.16(a) ne sont pas homotopes avec la courbe de la figure I.16(b) et en plus toute courbe qui respecte les conditions énumérées ci-dessus est homotope soit avec les courbes de la figure I.16(a), soit avec la courbe de la figure I.16(b).

Étudions maintenant la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ dans les deux cas présentés pour $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$. Dans le cas (a), la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$ (ou un morceau de cette courbe) divise la région $\mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R})$ en deux parties disjointes, séparant ainsi $\mathbf{c}(t_1'')$ et S. Comme $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ et $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$ doivent être disjointes et la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[)$ doit être simple, la seule "trajectoire" que la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ peut emprunter est celle présentée dans la figure I.17 ou une qui lui est homotope tout en respectant, en plus des deux conditions déjà écrites ci-dessus, les conditions

- il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{c}(]t_\mathrm{S} - \varepsilon, t_\mathrm{S}[) \subset \mathrm{DP}_1$
- $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[) \cap [\mathrm{RS}] = \emptyset$.

Alors la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) \cup [\mathrm{RS}]$ sera une courbe simple fermée et il existera $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{S}, \delta) \cap \mathrm{DP}_2 \subset \mathit{reg}(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$. Mais il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{c}(]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{S} + \varepsilon[) \subset \mathrm{DP}_2$ et si nous choisissons $\gamma = \min(\varepsilon, \ \delta)$ nous aurons

$$\mathbf{c}(]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{S} + \gamma[) \subset \mathit{reg}(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}]).$$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ a des points à l'intérieur de $\mathit{reg}(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$, ainsi

$$\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}]) \subset \mathit{reg}(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}]),$$

car $(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}])) \cap \mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) = \emptyset$ et $(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}])) \cap [\mathrm{RS}] = \emptyset$.

Nous avons ainsi obtenu une contradiction avec la condition (I.7.ii), car nous ne pourrons pas trouver deux points A et B appartenant à $\mathit{reg}(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$ tels que la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[)$ soit incluse dans un seul des deux demi-plans déterminés par la droite AB.

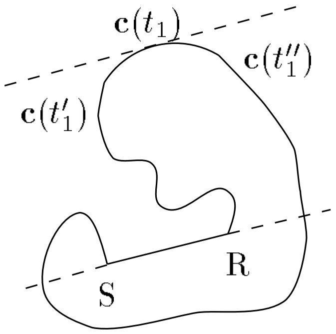


Figure I.17

Dans le cas I.16(b), la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ est celle présentée figure I.18, ou une qui lui est homotope modulo les conditions déjà vues. Nous arrivons ainsi à une situation similaire à celle du premier cas et nous obtenons donc la même contradiction.

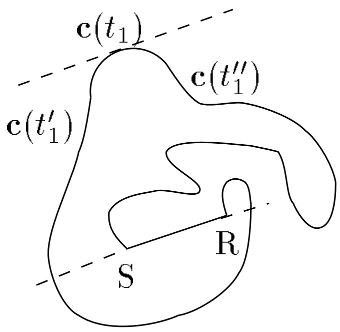


Figure I.18

Donc la supposition $\mathbf{c}'(t_1) = -\vec{u}$ aboutit dans tous les cas à une contradiction et par conséquent nous avons $\mathbf{c}'(t_1) = \vec{u}$. De la même façon nous prouvons qu'il existe $t_2 \in]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T}[$ tel que $\mathbf{c}'(t_2) = \vec{u}$. Nous avons ainsi trouvé $t_1, t_2 \in]a, b[$, $t_1 \neq t_2$, tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$, d'où une contradiction avec la condition (I.7.i). Donc la supposition que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ n'est pas convexe est fausse et ainsi la démonstration de la proposition est achevée. $\square$

Preuve du lemme I.27 – Supposons que la conclusion est fausse, donc que $]\mathrm{PQ}[\not\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $]\mathrm{PQ}[\not\subset \delta(\mathcal{A})$. Mais $]\mathrm{PQ}[\subset \overline{\mathcal{A}}$, par conséquent tout point de $]\mathrm{PQ}[$ sera soit dans $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, soit dans $\delta(\mathcal{A})$. Il ne peut pas exister $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{O} \in]\mathrm{PQ}[$ tels que $\mathrm{M} \in]\mathrm{NO}[$ et $\mathrm{M} \in \delta(\mathcal{A})$, $\mathrm{N}, \mathrm{O} \in \mathrm{Int}(\mathcal{A})$, car $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ est aussi convexe. Il y aura donc deux points distincts $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in]\mathrm{PQ}[$ tels que $]\mathrm{PM}] \subset \delta(\mathcal{A})$, $]\mathrm{MN}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $[\mathrm{NQ}[\subset \delta(\mathcal{A})$, où nous pouvons avoir $\mathrm{M} = \mathrm{P}$ ou $\mathrm{N} = \mathrm{Q}$, mais pas les deux, car alors $]\mathrm{PQ}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$. Supposons que $\mathrm{M} \neq \mathrm{P}$ et soit $\mathrm{R} \in]\mathrm{PM}[$. $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ étant convexe et R appartenant à $\delta(\mathcal{A})$, il résulte, conformément au lemme I.25, qu'il existe une droite Δ passant par R et telle que $\Delta \cap \mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \emptyset$. Il est évident que les droites Δ et PM doivent être confondues et nous obtenons ainsi une contradiction, car $]\mathrm{MN}[\subset \Delta$, $]\mathrm{MN}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $]\mathrm{MN}[\neq \emptyset$. $\square$

Preuve du théorème I.24 – En utilisant les notations habituelles pour la polycourbe de Bézier, nous donnons d'abord la démonstration du théorème pour le cas où la polycourbe initiale est composée de $n_0 \geq 4$ courbes de Bézier et nous traiterons séparément les cas $n_0 = 2$, $n_0 = 3$.

Pour $i \in \{1, \ldots, n_0\}$, soit

$$\gamma'_i = \min_{j \in \{1, \ldots, i-2, i+2, \ldots, n_0\}} \mathrm{d}\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j\big)$$

et soit $\gamma'_0 = \dfrac{1}{2} \min_{i \in \{1, \ldots, n_0\}} \{\gamma'_i\}$. Évidemment, $\gamma'_0 > 0$, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple.

Soit l'ensemble

$$\mathrm{I} = \Big\{ i \in \{1, \ldots, n_0\} \;\Big|\; reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_{i+1}, \big]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}\big[\big) \neq \emptyset \Big\}$$

Si $\mathrm{I} \neq \emptyset$, on peut écrire $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$, où

$$\mathrm{I}_1 = \Big\{ i \in \mathrm{I} \;\Big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big[\big) \neq \emptyset \Big\}$$

$$\mathrm{I}_2 = \Big\{ i \in \mathrm{I} \;\Big|\; \mathcal{B}_i \cap reg\big(\mathcal{B}_{i+1}, \big]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}\big[\big) \neq \emptyset \Big\}$$

En plus, $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 = \emptyset$, car $reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big[\big)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n_0\}$ et $\mathcal{B}$ est simple.

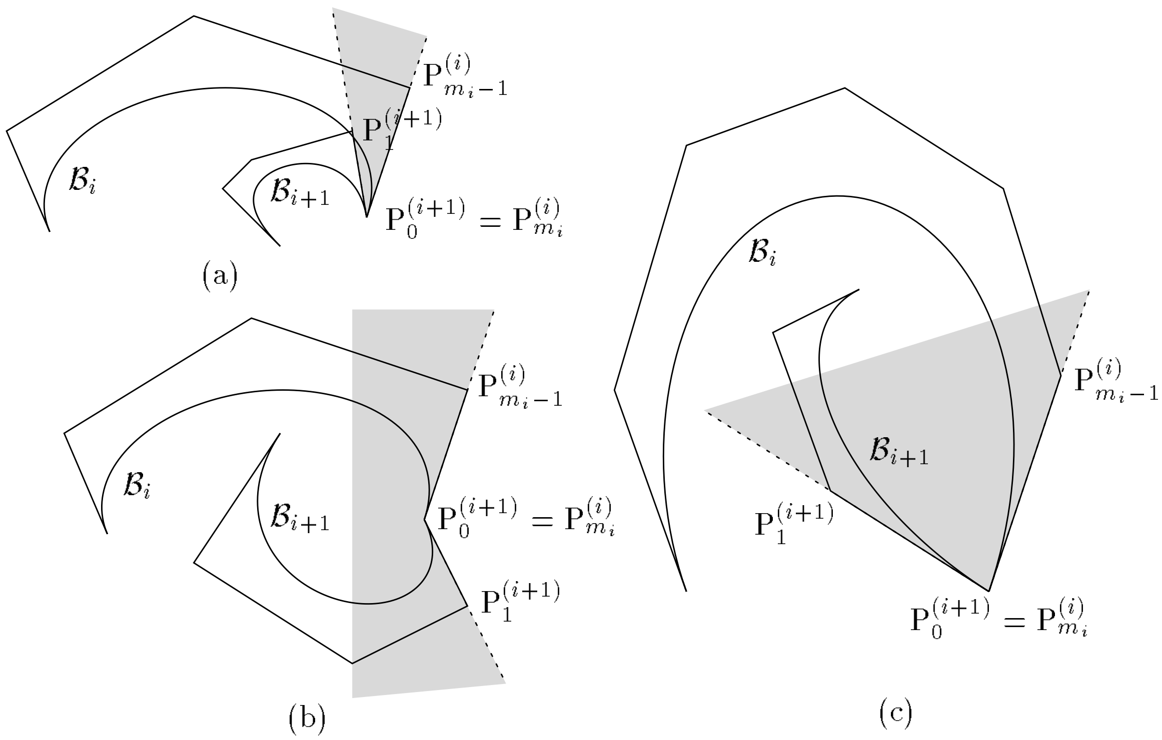


Figure I.19 (a) *i est dans* I'_1 ; (b), (c) *i est dans* I''_1

Au moins un des ensembles I_1 et I_2 est non-vide. Si $\mathrm{I}_1 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_1$. Des deux angles $\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}$ on considère celui pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{B}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}, \varepsilon\big) \cap \Big\{ \mathcal{B}_i \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(i+1)}\big\} \Big\} \subset \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}\big)$$

Nous définissons alors

$$\mathrm{I}'_1 = \big\{ i \in \mathrm{I}_1 \;\big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} = \emptyset \big\}$$

$$\mathrm{I}''_1 = \mathrm{I}_1 \setminus \mathrm{I}'_1 = \big\{ i \in \mathrm{I}_1 \;\big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \neq \emptyset \big\}$$

La figure I.19 présente des exemples pour les deux cas.

Si $\mathrm{I}'_1 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}'_1$. Nous ne pouvons pas avoir

$$reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big[\big) \subset \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}\big)$$

car $i \in \mathrm{I}_1' \subset \mathrm{I}_1$, donc la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$, qui par la définition de I_1' est disjointe de l'intérieur de l'angle $\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}$, doit couper $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$. Par conséquent,

$$]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \cap reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \neq \emptyset$$

et donc $]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$. D'un autre côté, $\mathrm{card}(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \cap \mathcal{B}_i) \leq 2$, car $\mathcal{B}_i$ est une courbe de Bézier convexe. En conclusion, $\mathrm{card}(]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \cap \mathcal{B}_i) = 1$.

Soit $\{\mathrm{M}_i\} =]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \cap \mathcal{B}_i$. Notons $\widetilde{\mathcal{B}}_i$ le morceau de $\mathcal{B}_i$ compris entre $\mathrm{P}_0^{(i)}$ et M_i et nous définissons

$$\gamma_i'' = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_i, \mathcal{B}_{i+1})$$

Posons $\gamma_0'' = \min\limits_{i \in \mathrm{I}_1'}\{\gamma_i''\}$.

De manière analogue nous définissons ci-dessous γ_0'''.

Si $\mathrm{I}_2 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_2$. Des deux angles $\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}$ nous considérons celui pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}_0^{(i+1)}, \varepsilon) \cap \left(\mathcal{B}_{i+1} \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i+1)}\}\right) \subset \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)})$$

Nous définissons alors

$$\mathrm{I}_2' = \{i \in \mathrm{I}_2 \mid \mathcal{B}_i \cap \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} = \emptyset\}$$
$$\mathrm{I}_2'' = \mathrm{I}_2 \setminus \mathrm{I}_2' = \{i \in \mathrm{I}_2 \mid \mathcal{B}_i \cap \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \neq \emptyset\}$$

Les exemples de la figure I.19 peuvent facilement devenir des exemples pour ces deux cas en changeant $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$ entre elles.

Si $\mathrm{I}_2' \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_2'$. Avec un raisonnement similaire au celui fait pour $i \in \mathrm{I}_1'$, nous aurons

$$\mathrm{card}(]\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \cap \mathcal{B}_i) = 1$$

et soit $\{\mathrm{N}_i\} =]\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \cap \mathcal{B}_{i+1}$. Notons $\overline{\mathcal{B}_{i+1}}$ le morceau de la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$ compris entre N_i et $\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}$ et soit

$$\gamma_i''' = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\overline{\mathcal{B}_{i+1}}, \mathcal{B}_i)$$

Nous posons alors $\gamma_0''' = \min\limits_{i \in \mathrm{I}_2'}\{\gamma_i'''\}$.

Nous pouvons maintenant définir γ_0 de l'énoncé du théorème :

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_0' & \text{si } \mathrm{I}_1' \cup \mathrm{I}_2' = \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2' = \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0'''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' = \emptyset, \mathrm{I}_2' \neq \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0'', \gamma_0'''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2' \neq \emptyset \end{cases}$$

Nous voulons prouver que $\max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0$ entraîne que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Supposons que $\max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) < \gamma_0$ et que $\mathcal{P}$ n'est pas pseudo-simple. Alors il existe $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, et $k_i \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$, $k_j \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$ tels que

$$[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$$

En plus, i, j, k_i et k_j doivent satisfaire certaines conditions, que nous verrons par la suite, sans lesquelles $\mathcal{P}$ serait pseudo-simple. Nous avons plusieurs cas.

Cas 1. $j \notin \{i-1, i+1\}$

Dans ce cas, $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$ entraînera tout de suite la non-pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$, nous n'avons pas à imposer des conditions supplémentaires aux indices k_i et k_j.

Soit $\mathrm{M} \in [\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}]$. Notons $pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}$ la projection de M sur la courbe $\mathcal{B}_i$ et $pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}$ la projection de M sur la courbe $\mathcal{B}_j$ (figure I.20). Nous aurons

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}) = \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) = \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_j)$$

.

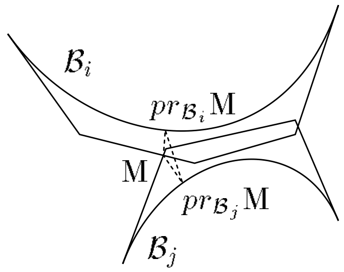


Figure I.20

Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) &\leq \mathrm{d}(pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}) + \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) \\ &\leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j) < 2\gamma_0 \leq 2\gamma_0'\end{aligned} ,$$

ce qui contredit la définition de γ_0'.

Cas 2. $j = i + 1$

Dans ce cas, nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour que

$$[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$$

implique la non-simplicité du polygone $\mathcal{P}$, car si par exemple $k_i = m_i - 1$ et $k_j = 0$ alors le $\mathcal{P}$ peut être pseudo-simple et même simple même si le deux segments se coupent. Nous devons évidemment commencer par demander $(k_i, k_j) \neq (m_i - 1, 0)$, mais cela ne suffit pas, comme nous pouvons le voir pour le cas de la figure I.12(b), ou $k_i = m_i - 1$, $k_j = 1$ et la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)} \ldots \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)} \ldots \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ est pseudo-simple, donc encore une condition est nécessaire. Cette condition sera

$$reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[) \neq \emptyset \tag{I.6}$$

et nous prouvons que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}$ soit non-pseudo-simple si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$.

En effet, si $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$ sont disjointes, alors il existe une droite Δ passant par $\mathrm{P}_0^{(j)}$ qui les sépare strictement, car les deux sont convexes. Si $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$ sont incluses dans des demi-plans ouverts opposés par rapport à Δ, alors évidemment $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_j$ seront incluses dans des demi-plans fermés opposés par rapport à Δ et par suite des propriétés des courbes de Bézier il en sera de même pour leurs polygones de contrôle respectifs. Mais comme $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ sont simples et convexes, la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)}\dots\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\dots\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ sera en tout cas pseudo-simple. La condition (I.6) est donc nécessaire.

Pour prouver la suffisance, nous commençons par remarquer que si (I.6) est satisfaite, alors $\mathrm{P}_1^{(j)} \notin \,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$, car si c'était le cas alors $\mathcal{B}$ serait une polycourbe avec tangence intérieure. Mais alors, si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$, les sommets $\mathrm{P}_{k_i+1}(i), \dots, \mathrm{P}_0^{(j)}, \dots, \mathrm{P}_{k_j}^{(j)}$ ne peuvent pas être colinéaires. En effet, s'ils sont colinéaires, alors ils se trouvent sur la droite $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$. Les polygones de contrôle des courbes de Bézier composant la polycourbe étant simples, les sommets $\mathrm{P}_{k_i+1}(i), \dots, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ se trouveront sur la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ et les sommets $\mathrm{P}_1^{(j)}, \dots, \mathrm{P}_{k_j}^{(j)}$ se trouvent sur la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$. Conformément à la remarque faite ci-dessus, les deux demi-droites sont disjointes, d'où la contradiction. Donc ces sommets ne peuvent pas être colinéaires, et par conséquent le polygone de contrôle de la polycourbe ne sera pas pseudo-simple.

En conclusion, si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$ et les arêtes $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}]$ et $[\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}]$ ne sont pas des arêtes consécutives de $\mathcal{P}$ (condition équivalente, dans le cas présent, à $(k_i, k_j) \neq (m_i - 1, 0)$), alors la condition (I.6) est équivalente à la non-pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$.

Nous aurons donc $i \in \mathrm{I}$. Supposons d'abord que $i \in \mathrm{I}_1$. Il y a alors deux possibilités : $i \in \mathrm{I}_1'$ ou $i \in \mathrm{I}_1''$.

Cas 2.1. $i \in \mathrm{I}_1'$

Nous voulons obtenir une contradiction avec la définition de γ_0''. Pour ça, nous prouverons que si la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(j)}\dots\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ coupe la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)}\dots\mathrm{P}_{m_j}^{(i)}$ dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(j)} = \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$, alors elle coupe aussi la courbe $\mathcal{B}_i$ dans un point autre que $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$. Notons $]\mathcal{P}_j$ la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(j)}\dots\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ sans le point $\mathrm{P}_0^{(j)}$ et $\mathcal{P}_i[$ la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)}\dots\mathrm{P}_{m_j}^{(i)}$ sans le point $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$.

Supposons que $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$. Le point $\mathrm{P}_1^{(j)}$ doit alors appartenir à $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, car la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$ coupe $\mathcal{B}_i$ ($i \in \mathrm{I}_1'$) et si $\mathrm{P}_1^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, alors nous avons tout de suite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}] \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$, d'où une contradiction. D'un autre côté, si pour tout $k \in \{1, \dots, m_j\}$ $\mathrm{P}_k^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, alors évidemment $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_i[= \emptyset$, d'où une contradiction. Il existe donc (figure I.21) $\ell \in \{2, \dots, m_j\}$ tel que

$$\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_\ell^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$$

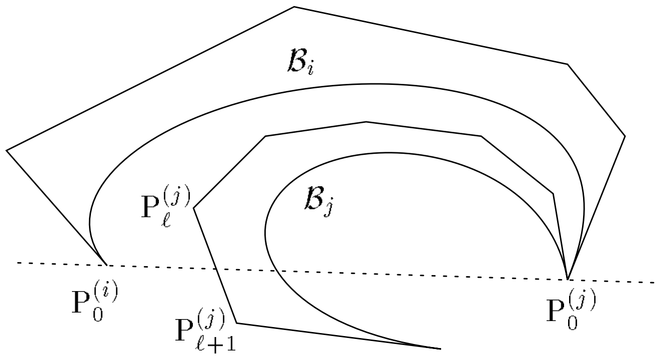


Figure I.21

Nous pouvons remarquer tout de suite que

$$\big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big] \cap \big(\mathcal{B}_i \cup \,]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\,\big) = \big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big] \cap \delta\Big(reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\big)\Big) \neq \emptyset$$

Mais $\big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big] \subset \,]\mathcal{P}_j$, donc $\big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big] \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$. Ainsi, le segment $\big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big]$ va couper le segment $]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[$. Par conséquent, les points $\mathrm{P}^{(i)}_0$ et $\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}$ se trouveront dans des demi-plans ouverts opposés par rapport à la droite $\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}$. Cette droite est une droite support de l'une des arêtes de $\mathcal{P}_j$, polygone convexe, nous aurons donc $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}, \mathrm{P}^{(j)}_0\big)}$ et nous pouvons en déduire que $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}, \mathrm{P}^{(i)}_0\big)}$.

Soit $\{\mathrm{P}\} = \big[\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}\big] \cap \,]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[$ et nous notons

$$]\mathcal{P}'_j = \,]\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_1] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\ell-2} [\mathrm{P}^{(j)}_k\mathrm{P}^{(j)}_{k+1}]\right) \cup [\mathrm{P}^{(j)}_{\ell-1}\mathrm{P}]$$

$$]\mathcal{P}''_j = \,]\mathrm{P}\mathrm{P}^{(j)}_{\ell}] \cup \left(\bigcup_{k=\ell}^{m_j-1} [\mathrm{P}^{(j)}_k\mathrm{P}^{(j)}_{k+1}]\right)$$

Mais $\mathrm{P} \notin \mathcal{B}_i$ et ainsi $]\mathcal{P}'_j$ ne peut pas couper $\mathcal{P}_i[$, tous ses sommets, à part P, étant dans $reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\big)$ et P appartenant au segment $]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[$. Voyons donc dans quelles conditions $]\mathcal{P}''_j$ peut couper $\mathcal{P}_i[$. Nous savons que $\mathrm{P}^{(j)}_{\ell} \in \overline{\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}, \mathcal{B}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\}\big)}$. Le polygone $\mathcal{P}_j$ est simple et convexe et nous avons $\mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i} \supset \{\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}\}$, nous pouvons donc écrire que $\mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i} = \{\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}\}$. En conclusion, nous aurons

$$\mathrm{P}^{(j)}_{\ell+1}, \ldots, \mathrm{P}^{(j)}_{m_j} \in \overline{\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}, \mathcal{B}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\}\big)}$$

Alors $]\mathcal{P}''_j \cap \mathcal{P}_i[\,\subset \{\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\}$ et comme aucun de ces deux points n'est un point de $]\mathcal{P}''_j$, il vient $]\mathcal{P}''_j \cap \mathcal{P}_i[\,= \emptyset$. Nous pouvons donc conclure que $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_i[\,= \emptyset$, d'où une contradiction.

Ainsi, l'hypothèse $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$ nous a menés dans tous les cas à une contradiction, donc elle est fausse.

Soit $\mathrm{M} \in \,]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i$. Nous savons que

$$]\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_1, \mathrm{P}^{(j)}_{m_j}\big)}$$

donc

$$\mathrm{M} \in \mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_1, \mathrm{P}^{(j)}_{m_j}\big)}$$

Conformément aux notations faites au début de la démonstration,

$$\mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big)} = \widetilde{\mathcal{B}}_i$$

Alors

$$\mathrm{d}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_i, \mathcal{B}_{i+1}\big) = \mathrm{d}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_i, \mathcal{B}_j\big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{M}, \mathcal{B}_i\big) \leq \delta\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i\big) \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0 \leq \gamma_0''$$

cette relation contredisant la définition de γ_0''.
Cas 2.2. $i \in \mathrm{I}_1''$

Soit $\widetilde{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{k\neq i,j} \mathcal{P}_k$. Nous voulons prouver que si $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(j)} = \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$, alors soit $\mathcal{P}_i$ et $\widetilde{\mathcal{P}}$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(i)}$, soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P}_j$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$, c'est-à-dire nous voulons prouver que

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}\} \neq \emptyset \Longrightarrow \Big(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\Big) \cup \Big(\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}\}\Big) \neq \emptyset$$

Supposons que $\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\} = \emptyset$ et $\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}\} = \emptyset$.

Des deux angles $\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$, considérons celui pour lequel

$$\mathcal{B}_j \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \neq \emptyset$$

Nous aurons alors $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$, car évidemment $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$. Alors $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$, car sinon

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) = \emptyset$$

et donc $\mathcal{B}_j$ et $\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)$ sont disjoints, d'où la contradiction.
Par conséquent, $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$.

D'un autre côté, nous devons avoir $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$
En effet, si

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)} \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

alors

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

et donc la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$ est elle aussi contenue dans ce demi-plan. Si, au contraire,

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

alors en supposant

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

nous obtenons

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big) = \emptyset$$

et comme $reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big) \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$ et $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$, il en résulte que $\mathcal{B}_j \cap reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big) = \emptyset$, d'où une contradiction.

Ainsi, $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$ et nous voulons prouver que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big)$.

Supposons que $P^{(j)}_{m_j} \notin reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)$. Nous savons que $\mathcal{B}_j \cap reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[) \neq \emptyset$; soit $A \in \mathcal{B}_j \cap reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)$. Notons $\mathcal{A}$ le morceau de la courbe $\mathcal{B}_j$ compris entre A et $P^{(j)}_{m_j}$. Comme $A \in reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)$ et $P^{(j)}_{m_j} \notin reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)$, nous aurons

$$\mathcal{A} \cap \delta\Big(reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)\Big) = \mathcal{A} \cap \Big(\mathcal{B}_i \cup]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[\Big) \neq \emptyset$$

Il est évident que $P^{(j)}_0 \notin \mathcal{A}$, donc forcément $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple. Par conséquent, $\mathcal{A} \cap]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[\neq \emptyset$. Mais alors il existe $A' \in \mathcal{A} \cap DP_{op}(P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}, P^{(i)}_1)$ et soit $\mathcal{A}'$ le morceau de $\mathcal{A}$ compris entre A' et $P^{(j)}_{m_j}$. Nous avons vu que $P^{(j)}_{m_j} \in DP(P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}, P^{(i)}_1)$, donc A' et $P^{(j)}_{m_j}$ se trouvent dans des demi-plans opposés par rapport à la droite $P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}$ et il résulte $\mathcal{A}' \cap P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i} \neq \emptyset$.

En conclusion, il existe un point appartenant à $\mathcal{A}' \cap P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}$ et un point appartenant à $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}') \cap P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}$. Comme $P^{(j)}_0 \in P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}$ et $P^{(j)}_0 \notin \mathcal{A}$, nous obtenons

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_j \cap P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}) \geq 3$$

ce qui donne une contradiction avec la convexité de $reg(\mathcal{B}_j,]P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j}[)$. Donc en effet $P^{(j)}_{m_j} \in reg(\mathcal{B}_i,]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}[)$. Nous voulons maintenant prouver qu'il existe une ligne polygonale non-bornée $\mathcal{LP}$ qui sépare le plan en deux régions ouvertes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ telles que

$$\mathcal{P}_j \setminus \{P^{(j)}_0, P^{(j)}_{m_j}\} \subset \mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{P}_i \setminus \{P^{(i)}_0, P^{(i)}_{m_i}\} \subset \mathcal{R}_2$$

Nous commençons par prouver que

$$\mathcal{P}_j \cap \Big(P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i} \setminus]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}]\Big) = \emptyset$$

Soient les demi-droites d' et d'' telles que $d' \cup d'' = P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i} \setminus]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}]$: d' est la demi-droite ouverte opposée à $[P^{(i)}_{m_i} P^{(i)}_0$ et d'' est la demi-droite fermée opposée à $]P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}$.

Nous avons déjà vu que

$$]P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j} \subset \mathrm{Int}(\angle P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i} P^{(j)}_1)$$

donc la droite $P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j}$ sépare les points $P^{(i)}_{m_i-1}$ et $P^{(j)}_1$. D'un autre côté,

$$P^{(j)}_{m_j} \in DP(P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}, P^{(i)}_{m_i-1}),$$

donc

$$P^{(j)}_{m_j} \in DP(P^{(i)}_0 P^{(i)}_{m_i}, P^{(i)}_{m_i-1}) \cap DP(P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i}, P^{(i)}_0)$$

Ainsi, en choisissant des deux angles $\angle P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i} P^{(i)}_0$ celui pour lequel

$$\mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{Int}(\angle P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i} P^{(i)}_0)} \neq \emptyset$$

(par conséquent, $\mathcal{B}_i \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i} P^{(i)}_0)}$, comme déjà vu) nous obtenons

$$]P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j} \subset \mathrm{Int}(\angle P^{(i)}_{m_i-1} P^{(i)}_{m_i} P^{(j)}_1)$$

Donc la droite $P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j}$ sépare aussi les points $P^{(i)}_{m_i-1}$ et $P^{(i)}_0$ et nous en déduisons que

$$P^{(i)}_0 \in DP(P^{(j)}_0 P^{(j)}_{m_j}, P^{(j)}_1)$$

et par conséquent

$$d' \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}, \mathrm{P}_1^{(j)}\big) = \emptyset$$

Comme $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}, \mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$ et d' est ouverte, nous pouvons conclure que $\mathcal{P}_j \cap d' = \emptyset$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$. Nous allons faire une preuve par l'absurde. Supposons que $\mathcal{P}_j \cap d'' \neq \emptyset$. Comme le polygone $\overline{\mathcal{P}_j}$ (défini comme l'union de la ligne polygonale $\mathcal{P}_j$ et du segment $\big]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big[$) est convexe, nous aurons soit $\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} = \mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$ et $\mathrm{P}_1^{(j)} \in d''$, soit $\mathrm{card}(\mathcal{P}_j \cap d'') = 1$. Dans les deux cas, soit $\mathrm{N} \in \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ tel que

$$\mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \subset \big[\mathrm{NP}_{m_i}^{(i)} \text{ et } \mathrm{d}\big(\mathrm{N}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big) = \min_{\substack{\mathrm{P}\in\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \\ \mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \subset \big[\mathrm{PP}_{m_i}^{(i)}}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\big)$$

Évidemment, $\mathrm{N} \in d''$. Si $\mathrm{N} = \mathrm{P}_0^{(i)}$, alors

$$\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \big\{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big\} \supset \big\{\mathrm{P}_0^{(i)}\big\} \neq \emptyset,$$

contradiction.

Donc $\mathrm{N} \in d'' \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(i)}\big\}$. Alors, toujours pour des raison de convexité du polygone $\overline{\mathcal{P}_j}$,

$$\big]\mathrm{NP}_0^{(j)}\big[\subset reg\big(\overline{\mathcal{P}_j}\big)$$

et donc $\mathrm{P}_0^{(i)} \in reg\big(\overline{\mathcal{P}_j}\big)$. Plus, les ensembles I_1 et I_2 sont disjoints, donc

$$\mathrm{P}_0^{(i)} \notin reg\big(\mathcal{B}_j, \big]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big[\big)$$

et évidemment $\mathrm{P}_0^{(i)} \notin \mathcal{B}_j$, alors nous aurons $\mathrm{P}_0^{(i)} \in reg\big(\mathcal{P}_j, \mathcal{B}_j\big)$. La figure I.22 présente cette situation.

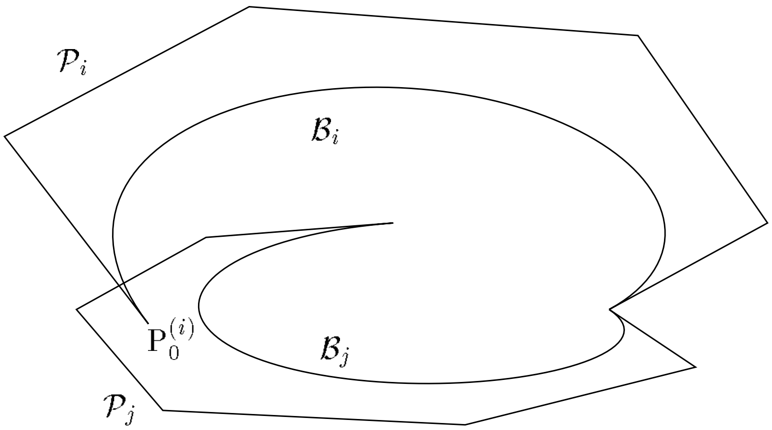


Figure I.22

Comme $n \geq 4$, $i-1 \neq j+1$. Mais

$$\mathrm{P}_0^{(i)} \in reg\big(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j\big) \Longrightarrow \mathrm{d}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathcal{B}_j\big) \leq \delta\big(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j\big) < \gamma_0 \leq \gamma_0'$$

D'un autre côté, nous avons $\mathrm{d}\big(\mathcal{B}_{i-1}, \mathcal{B}_j\big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathcal{B}_j\big)$ et nous obtenons ainsi une contradiction avec la définition de γ_0'. Donc $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$.

Nous savons aussi que

$$\big(\mathcal{P}_j \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big\}\big) \cap \big[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big] = \emptyset$$

et que

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\right) \cap \widetilde{\mathcal{P}} = \emptyset$$

Définissons alors

$$\mathcal{LP} = d' \cup d'' \cup \left[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] \cup \widetilde{\mathcal{P}}$$

$\mathcal{LP}$ partage le plan en au moins deux régions ouvertes disjointes (si elle n'est pas simple, alors il y a plus de deux régions). Comme

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\right) \cap \mathcal{LP} = \emptyset,$$

nous déduisons que $\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}$ est complètement incluse dans une de ces régions, que nous appellerons $\mathcal{R}_1$.

Soit $\mathcal{R}_2$ une autre de ces régions telle que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$$

Nous savons

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \widetilde{\mathcal{P}} = \emptyset$$

et nous pouvons voir tout de suite que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \left[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] = \emptyset,$$

car $\left]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] \subset reg\left(\mathcal{B}_i, \left]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right[\right)$. Si

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} = \emptyset,$$

il résulte que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \mathcal{LP} = \emptyset$$

et par conséquent $\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}$ sera complètement inclus dans $\mathcal{R}_2$. Mais, sans contredire la simplicité ou la convexité de $\mathcal{P}_i$, nous pouvons avoir

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \neq \emptyset,$$

comme présenté dans la figure I.23. Dans ce cas, on peut vérifier assez aisément que

$$\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\} \subset \overline{\mathcal{R}_2}$$

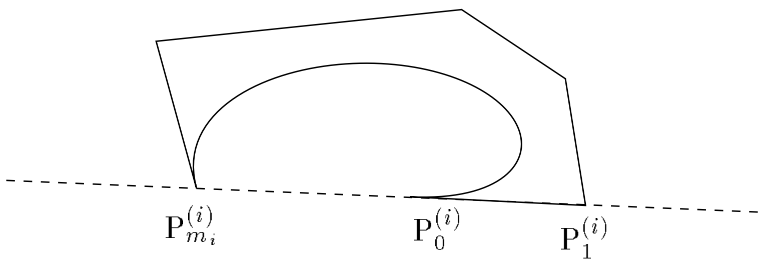


Figure I.23

Comme $\mathcal{R}_1$ est un ensemble ouvert, pour prouver que

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\right) \cap \left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \neq \emptyset$$

il suffit de démontrer que $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$. Mais nous savons que les points $\mathrm{P}_1^{(i)}$ et $\mathrm{P}_1^{(j)}$ sont séparés par la droite $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ et il résulte que pour avoir $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ la ligne polygonale $\widetilde{\mathcal{P}}$

doit passer par $P_0^{(j)}$, ce qui nous ramène tout de suite au cas 1, qui a son tour nous avait menés a une contradiction.

Par conséquent,

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{P_0^{(i)}, P_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \left(\mathcal{P}_j \setminus \{P_0^{(j)}, P_{m_j}^{(j)}\}\right) = \emptyset$$

et donc $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{P_0^{(j)}\} = \emptyset$, car évidemment $P_0^{(i)} \notin \{P_0^{(j)}, P_{m_j}^{(j)}\}$.

Ainsi, en supposant

$$\left(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{P_{m_j}^{(j)}\}\right) \cup \left(\mathcal{P}_i \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{P_0^{(i)}\}\right) = \emptyset,$$

nous avons obtenu une contradiction avec l'hypothèse $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{P_0^{(j)}\} \neq \emptyset$. Donc vraiment

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{P_0^{(j)}\} \neq \emptyset \Longrightarrow \left(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{P_{m_j}^{(j)}\}\right) \cup \left(\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \{P_0^{(i)}\}\right) \neq \emptyset$$

Mais $\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{P_{m_j}^{(j)}\} \neq \emptyset$ signifie qu'il existe

$$\ell \in \{1, \ldots, i-1, j+1, \ldots, n\} \text{ et } k_j \in \{0, \ldots, m_j - 1\},\ k_\ell \in \{0, \ldots, m_\ell - 1\}$$

tels que

$$[P_{k_j}^{(j)} P_{k_j+1}^{(j)}] \cap [P_{k_\ell}^{(\ell)} P_{k_\ell+1}^{(\ell)}] \neq \emptyset,$$

avec les éventuelles conditions supplémentaires déjà mentionnées au cours de la démonstration. Cette situation nous ramène dans un des cas 1, 2 ou 3, ce qui finira par donner une contradiction, car nous pouvons voir que nous ne cyclerons pas indéfiniment : si $\ell = j+1$ et $j \in I_1''$, alors nous avons $P_{m_\ell}^{(\ell)} \in reg(\mathcal{B}_j,]P_0^{(j)} P_{m_j}^{(j)}[)$ et la relation

$$P_{m_i}^{(i)} \in reg(\mathcal{B}_{i-1},]P_0^{(i-1)} P_{m_{i-1}}^{(i-1)}[) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

est impossible, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple et $reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)} P_{m_i}^{(i)}[)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

De même, en considérant $\mathcal{P}_i \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{P_0^{(i)}\} \neq \emptyset$, nous ne pourrons pas osciller indéfiniment entre les cas 2.2 et 2.4 pour des raisons de convexité des polygones $\overline{\mathcal{P}_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ainsi, nous finirons dans le cas 2.2 aussi par obtenir une contradiction avec l'hypothèse

$$\max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0 \text{ et } \mathcal{P} \text{ non-pseudo-simple}$$

Pour les cas 2.3 : $i \in I_2'$ et 2.4 : $i \in I_2''$, la preuve est en tout point semblable à celle faite pour les cas 2.1 et 2.2, raison pour laquelle nous ne la donnons plus ici.

Cas 3. $j = i - 1$

Évidemment, ce cas n'apporte aucun élément nouveau par rapport au cas 2, une simple substitution faite entre i et j permettant de le réduire à celui-ci.

Ainsi, la preuve pour le cas $n_0 \geq 4$ est finie et pour terminer la démonstration du théorème nous devons maintenant étudier les cas $n_0 = 2$ et $n_0 = 3$, car évidemment $n_0 \geq 1$.

Pour $n_0 = 2$, nous pouvons avoir deux situations (figure I.24) : soit

$$reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}(P_0^{(1)} P_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}[)),$$

soit

$$reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}_{op}(P_0^{(1)} P_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}[)).$$

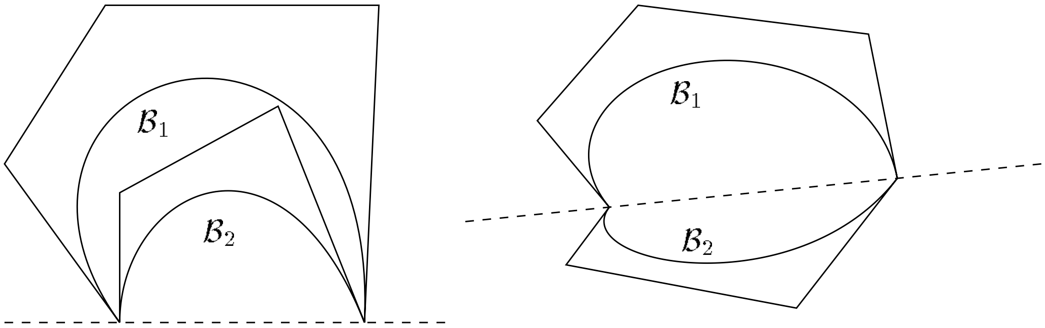


Figure I.24

Dans le deuxième cas, suite aux propriétés des courbes de Bézier et à la convexité des polygones $\overline{\mathcal{P}_1}$ et $\overline{\mathcal{P}_2}$, le polygone $\mathcal{P}$ sera toujours pseudo-simple. Étudions donc le cas $reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[))$.

Comme $\mathcal{B}$ est simple, nous aurons soit $reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$, soit l'inverse, cas qui est le même modulo un changement de notation. Ainsi, supposons que

$$reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$$

Si $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ ne sont pas parallèles, soit $\{\mathrm{P}\} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)} \cap \mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$. Si $\mathrm{P} \in reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$, alors $\mathcal{P}_1 \subset \overline{reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)}$, car cette ligne polygonale est incluse dans le triangle $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}$. Si $\mathrm{P} \notin reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$ ou $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ sont parallèles, soient $\{\mathrm{P}_1\} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)} \cap \mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}\}$ et $\{\mathrm{P}_2\} = \mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \cap \mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}$. Ces deux points existent, car $\mathcal{B}$ est sans tangence intérieure, et sont uniques, car $reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$ est convexe. Notons $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ le morceau de $\mathcal{B}_2$ compris entre P_1 et P_2 et posons

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{B}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_2)$$

Prouvons que γ_0 ainsi défini satisfait la condition de l'énoncé du théorème. Supposons donc que

$$\max\{\delta(\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1), \delta(\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2)\} < \gamma_0$$

et nous voulons prouver que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Remarquons que, dans ce cas, $\mathcal{P}$ ne peut pas être pseudo-simple sans être simple, et prouvons qu'il est simple par l'absurde. Nous supposons ainsi que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(2)}\} \neq \emptyset$ et soit $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(2)}\}$. Comme

$$\mathcal{P}_1 \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)})},$$

le point M_1 doit évidemment se trouver lui aussi dans l'intersection des deux demi-plans fermés. D'un autre côté,

$$\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[))} \setminus reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[),$$

donc M_1 est lui aussi un élément de cet ensemble. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1 \in & \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)})} \\ & \cap \left(\overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[))} \setminus reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)\right)\end{aligned}$$

Mais cette région du plan et la région

$$reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[) \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)})}$$

sont séparées par $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ et en conséquence $\mathcal{P}_1$, qui a des points dans les deux régions ci-dessus, doit couper $\widetilde{\mathcal{B}}_2$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2$. Alors nous aurons

$$\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{B}_1) \leq \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_1) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1) < \gamma_0,$$

d'où une contradiction avec la définition de γ_0. L'hypothèse $\mathcal{P}$ non-simple est donc fausse et ainsi la preuve pour le cas $n_0 = 2$ est achevée.

Étudions maintenant le cas $n_0 = 3$. Nous allons faire cette preuve en discutant les différences existant entre les cas $n_0 \geq 4$ et $n_0 = 3$.

Si $n_0 = 3$, dans les définitions données pour le cas général nous aurons $\gamma_0' = +\infty$. Si $\mathrm{I}_1' \cup \mathrm{I}_2' = \emptyset$, alors $\gamma_0 = +\infty$. Prouvons que dans ce cas $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Il y a plusieurs possibilités :

(i) $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \emptyset$;
(ii) $\mathrm{I}_1 = \emptyset, \mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$;
(iii) $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2 = \emptyset$;
(iv) $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$.

(i) $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 = \emptyset$ (figure I.25)

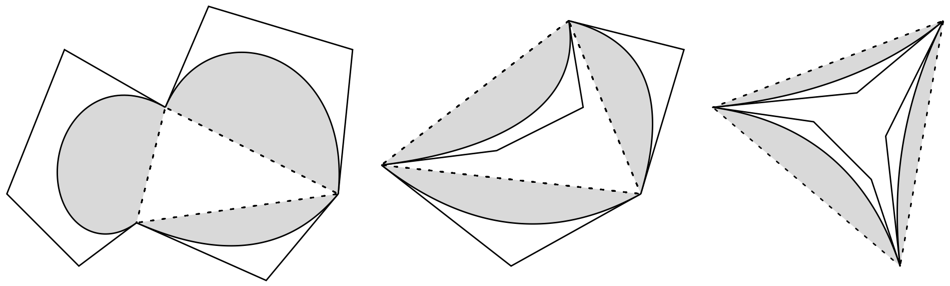


Figure I.25

Soit, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{R}_i = \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_1^{(i)}, \mathcal{B}_i) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i)$$

Prouvons que

$$reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[) = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$$

n_0 étant égal à trois, toutes deux courbes de Bézier de la composition de la polycourbe sont consécutives et par conséquent il suffit de prouver cette implication pour $i = 1$, $j = 2$.

Des deux angles $\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}$ prenons celui dont l'intérieur contient $\mathcal{B}_1 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}$ et des deux angles $\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}$ celui dont l'intérieur contient $\mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}$. Suite aux propriétés des courbes de Bézier,

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}) \exists \mathrm{P}_1 \in]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P} \text{ tel que }]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_1[\subset reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[)$$

De même,

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_1^{(2)}\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}) \exists \mathrm{P}_2 \in]\mathrm{P}_{m_2}^{(1)}\mathrm{P} \text{ tel que }]\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_2[\subset reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$$

Nous pouvons donc prouver que

$$\mathrm{P}_1^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \notin \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)})$$

En effet, si $\mathrm{P}^{(2)}_{m_2} \in \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1} \mathrm{P}^{(1)}_{m_1-1}\big)$, alors

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1} \mathrm{P}^{(1)}_{m_1-1}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(2)}_1 \mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}\big) \neq \emptyset$$

Soit P un point de l'intersection des deux ensembles. Il existe $\mathrm{P}_1 \in \,]\mathrm{P}^{(1)}_{m_1}\mathrm{P}$ tel que

$$]\mathrm{P}^{(1)}_{m_1}\mathrm{P}_1[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1}[\big)$$

et il existe $\mathrm{P}_2 \in \,]\mathrm{P}^{(2)}_0\mathrm{P}$ tel que

$$]\mathrm{P}^{(2)}_0\mathrm{P}_2[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big)$$

Mais $\mathrm{P}^{(1)}_{m_1} = \mathrm{P}^{(2)}_0$ et en prenant P_0 tel que $]\mathrm{P}^{(1)}_{m_1}\mathrm{P}_1[\, \cap \,]\mathrm{P}^{(2)}_0\mathrm{P}_2[\, = \,]\mathrm{P}^{(2)}_0\mathrm{P}_0[$, il vient

$$]\mathrm{P}^{(2)}_0\mathrm{P}_0[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big)$$

et donc les deux ensembles ne sont pas disjoints, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{I} = \emptyset$. De la même façon, $\mathrm{P}^{(2)}_1 \in \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1} \mathrm{P}^{(1)}_{m_1-1}\big)$ donnera aussi une contradiction. Nous obtenons ainsi

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(1)}_0 \mathrm{P}^{(1)}_{m_1} \mathrm{P}^{(1)}_{m_1-1}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(2)}_1 \mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}\big) = \emptyset$$

et par conséquent $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$.

Donc si $reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}^{(i)}_0 \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\big)$ et $reg\big(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}^{(j)}_0 \mathrm{P}^{(j)}_{m_j}[\big)$ sont disjointes, alors $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j$ sont disjoints pour tout $i \neq j \in \{1,2,3\}$. Mais nous savons que $\mathrm{I} = \emptyset$, donc toutes deux régions déterminées par les courbes de Bézier composant la polycourbe sont disjointes. Nous pouvons en déduire que $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset \; \forall i \neq j \in \{1,2,3\}$. D'un autre côté, $\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathcal{R}_i} \; \forall i \in \{1,2,3\}$, et, comme $\overline{\mathcal{P}_i}$ sont des polygones convexes pour tout $i \in \{1,2,3\}$, nous pouvons conclure, avec un raisonnement déjà fait au cours de la démonstration pour le cas général, que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple.

(ii) Ce cas, tout comme le cas (iii), ne peut pas exister. Si nous supposons que $\mathrm{I}''_1 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}''_1$. Nous avons prouvé que dans cette situation $\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_{i+1}} \in reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}^{(i)}_0 \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\big)$. Mais $\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_{i+1}} = \mathrm{P}^{(i+2)}_0$ et $i+2 = i-1$, car $n = 3$, donc $\mathcal{B}_{i-1} \cap reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}^{(i)}_0 \mathrm{P}^{(i)}_{m_i}[\big) \neq \emptyset$ et alors $i-1 \in \mathrm{I}_2$. Comme $\mathrm{I}'_2 = \emptyset$, il reste $i-1 \in \mathrm{I}''_2$ et donc $\mathrm{I}''_2 \neq \emptyset$. De la même façon, en supposant $\mathrm{I}''_2 \neq \emptyset$ nous obtenons $\mathrm{I}''_1 \neq \emptyset$.

(iv) $\mathrm{I}''_1 \neq \emptyset$ et $\mathrm{I}''_2 \neq \emptyset$ (figure I.26).
Si $i \in \mathrm{I}''_1$, nous avons vu que $i-1 \in \mathrm{I}''_2$. Sans réduire la généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$. Nous voulons prouver que $\mathrm{I}''_1 = \{1\}$ et $\mathrm{I}''_2 = \{3\}$. Pour cela, il suffit de prouver $reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}^{(3)}_0 \mathrm{P}^{(3)}_{m_3}[\big) = \emptyset$, car nous savons que I_1 et I_2 sont disjoints, $1 \in \mathrm{I}''_1$, $3 \in \mathrm{I}''_2$ et il reste à prouver que $2 \notin \mathrm{I}$. Si nous supposons

$$reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}^{(3)}_0 \mathrm{P}^{(3)}_{m_3}[\big) \neq \emptyset \;,$$

nous pouvons avoir soit $2 \in \mathrm{I}_1$, soit $2 \in \mathrm{I}_2$. Si $2 \in \mathrm{I}_1$, alors $2 \in \mathrm{I}''_1$ et il résulte $\mathrm{P}^{(3)}_{m_3} \in reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big)$. Mais $\mathrm{P}^{(3)}_{m_3} = \mathrm{P}^{(1)}_0$, donc $\mathcal{B}_1 \cap reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}^{(2)}_0 \mathrm{P}^{(2)}_{m_2}[\big) \neq \emptyset$, contradiction. Une contradiction similaire est obtenue si $2 \in \mathrm{I}''_2$. Donc en effet $\mathrm{I}''_1 = \{1\}$ et $\mathrm{I}''_2 = \{3\}$.

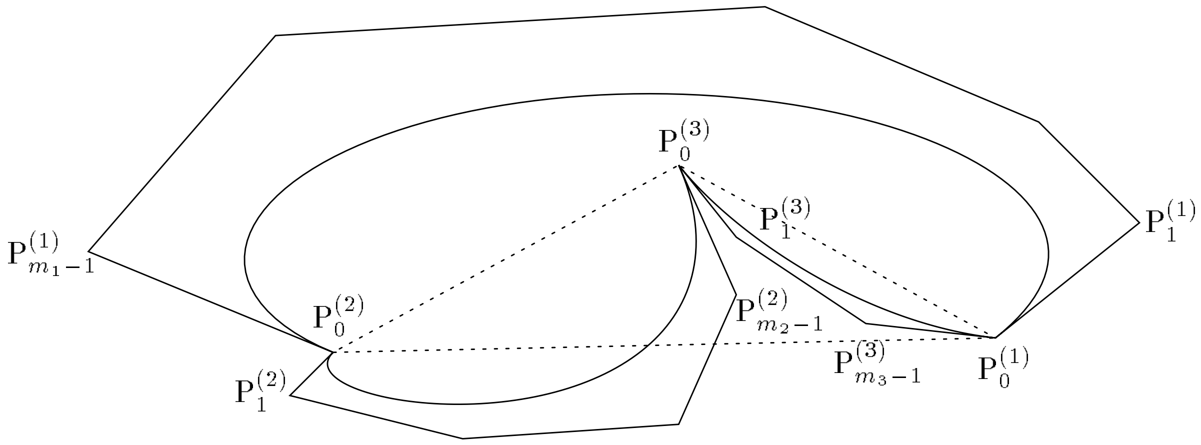


Figure I.26

Nous avons prouvé, dans le cas général, que les points $P_{m_1-1}^{(1)}$ et $P_1^{(2)}$ sont séparés par la droite $P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}$. De la même façon, les points $P_1^{(1)}$ et $P_{m_3-1}^{(3)}$ sont séparés par la droite $P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}$. Nous voulons aussi prouver que la droite $P_{m_2-1}^{(2)}P_{m_2}^{(2)}$ sépare les points $P_0^{(2)}$ et $P_{m_3}^{(3)}$. Supposons que $P_0^{(2)}$ et $P_{m_3}^{(3)}$ sont dans le même demi-plan par rapport à la droite $P_{m_2-1}^{(2)}P_{m_2}^{(2)}$; alors la demi-droite $]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}$ sera contenue dans $\mathrm{Int}(\angle P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)})$, donc nous pouvons déduire que $]P_0^{(3)}Pm_3{}^{(3)}[$ coupe $reg(\mathcal{B}_2,]P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}[)$. D'un autre côté, le segment $]P_0^{(3)}Pm_3{}^{(3)}[$ fait partie de la frontière de $reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[)$ et il en résulte que

$$reg(\mathcal{B}_2,]P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}[) \cap reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[) \neq \emptyset,$$

contradiction. Pour des raisons similaires, $P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}$ va séparer $P_0^{(2)}$ et $P_1^{(3)}$. Comme $\mathcal{P}_3 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle P_1^{(3)}P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)})}$ et $\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)})}$, la ligne polygonale $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple.

Vérifions maintenant la pseudo-simplicité de la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Nous savons $\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)})}$ et $\mathcal{P}_1 \subset \overline{\mathrm{DP}(P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[))}$. Comme la droite $P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}$ sépare $P_0^{(2)} = P_{m_1}^{(1)}$ et $P_0^{(1)} = P_{m_3}^{(3)}$, $P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)} \cap P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)} \subset]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Int}(\angle P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[))\\ &\quad = \mathrm{DP}(P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}, P_{m_2-1}^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}, P_0^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}, P_{m_2}^{(2)}),\end{aligned}$$

car $P_{m_2}^{(2)} \in reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$. Cet ensemble est l'intérieur d'un triangle dont les sommets sont les points $P_0^{(2)}$, $P_{m_2}^{(2)}$ et le point d'intersection des droites $P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}$ et $P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}$, donc des points de $\overline{reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)}$. En conclusion, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 &\subset \overline{\mathrm{Int}(\angle P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)})} \cap \overline{\mathrm{DP}(P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[))}\\ &\subset \overline{reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)}\end{aligned}$$

et nous en déduisons $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \{P_0^{(1)}, P_0^{(2)}\}$. Comme $P_0^{(1)} \notin \mathcal{P}_2$, il résulte que la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est pseudo-simple.

De façon très semblable, on prouve que la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple et en sachant que les lignes polygonales $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_1$ sont pseudo-simples, il est évident que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple.

Il nous reste à traiter le cas $I_1' \cup I_2' \neq \emptyset$. Si I_1' et I_2' ne sont pas tous les deux vides, alors γ_0 défini comme pour le cas $n \geq 4$ est un réel et on prouve que ce γ_0 satisfait la condition de l'énoncé du théorème. La preuve est en tout point identique à celle du cas général, sauf qu'il faut donner une justification différente à chaque fois que le fait que n est supérieur ou égal à 4 a été utilisé. Mais nous nous sommes prévalus de cette condition une seule fois, dans la démonstration du cas 2.2, en prouvant que $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$. Il nous reste donc à trouver autrement une contradiction si $i \in I_1''$ et $P_0^{(i)} \in reg(\mathcal{P}_j, \mathcal{B}_j)$, $j = i+1$ (figure I.22).

Supposons toujours que $i = 1$. Nous voulons prouver que $2 \in I_2'$ et nous commençons par montrer que $3 \in I_2'$. Évidemment, comme $P_{m_2}^{(2)} \in reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, il résulte $3 \in I_2$. Prouvons que $3 \notin I_2''$. De nouveau, la preuve sera faite par l'absurde, en supposant que $3 \in I_2''$ et en obtenant une contradiction.

Si $3 \in I_2''$, nous pouvons montrer que la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_1^{(1)}$ et $P_{m_3-1}^{(3)}$ (de la même façon dont nous avons prouvé que si $i \in I_1''$, alors la droite $P_{m_i}^{(i)}P_{m_{i+1}}^{(i+1)}$ sépare les points $P_{m_i-1}^{(i)}$ et $P_1^{(i+1)}$). D'un autre côté, comme $P_0^{(3)} \in reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_1^{(1)}$ et $P_0^{(2)}$. Donc $P_{m_3-1}^{(3)} \in DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})$. Des propriétés des courbes de Bézier et de la convexité de $\overline{\mathcal{P}_3}$, il résultera $\mathcal{B}_3 \subset \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$.

La droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ coupe $\mathcal{B}_1$ dans un seul point, à part $P_0^{(1)}$; soit $\{P_1\} =]P_0^{(1)}P_0^{(3)} \cap \mathcal{B}_1$. Le point $P_0^{(1)}$ est à l'intérieur du polygone $\overline{\mathcal{P}_2}$, donc la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_0^{(2)}$ et $P_{m_2-1}^{(2)}$. Par conséquent, cette droite va couper $\mathcal{B}_2$ dans un point autre que $P_0^{(3)}$; soit $\{P_2\} =]P_0^{(3)}P_0^{(1)} \cap \mathcal{B}_2$. En notant $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ le morceau de $\mathcal{B}_1$ compris entre P_1 et $P_{m_1}^{(1)}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ le morceau de $\mathcal{B}_2$ compris entre $P_0^{(2)}$ et P_2, nous pouvons écrire

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2 = (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$$

D'un autre côté, $P_2 \in]P_0^{(1)}P_0^{(3)}[$ et ce segment est inclus dans $reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, avec

$$P_0^{(1)}, P_1 \in \delta(reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)),$$

nous obtenons donc $P_0^{(3)} \in]P_1P_2[$.

En conclusion, nous avons une courbe continue, $\mathcal{B}_3 \subset \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$, qui doit joindre les points $P_0^{(1)} \notin [P_1P_2]$ et $P_0^{(3)} \in]P_1P_2[$, en sachant qu'il existe une courbe continue, $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2$, qui joint les points P_1 et P_2. La courbe $\mathcal{B}_3$ va ainsi forcément couper la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2$, d'où une contradiction avec la simplicité de la polycourbe $\mathcal{B}$.

Donc en effet $3 \in I_2'$. En fait, ce qui nous intéresse est l'inclusion de $\mathcal{B}_3$ dans le demi-plan $\overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_1^{(1)})}$, car maintenant nous pouvons voir facilement que $\mathcal{B}_2 \cap reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[) \neq \emptyset$. Plus exactement, $\mathcal{B}_2 \setminus (\widetilde{\mathcal{B}}_2 \cup \{P_0^{(3)}\}) \subset reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[)$, en sachant que $P_0^{(3)} \neq P_2$. Ainsi, $2 \in I_2$. En plus, 2 ne peut pas appartenir à I_2'', car dans ce cas $P_0^{(2)}$ devrait appartenir à $reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[)$, ce qui est faux. Donc $2 \in I_2'$.

Le point $P_0^{(1)}$ est dans $reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2)$, qui est un ouvert, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(P_0^{(1)}, \varepsilon) \subset reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2)$. Soit $P_3 \in B(P_0^{(1)}, \varepsilon) \cap \mathcal{B}_3 \setminus \{P_0^{(1)}\}$, car cet ensemble ne peut pas être vide. Alors

$$P_3 \in \mathcal{B}_3 \cap reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2) \subset \mathcal{B}_3 \cap DP(P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}, P_0^{(2)})$$

On aura alors

$$\mathrm{d}\Big(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(2)}_{m_2}\mathrm{P}^{(2)}_{m_2-1}, \mathrm{P}^{(2)}_0\big)\Big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{P}_3, \mathcal{B}_2\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2\big) < \gamma_0 \leq \gamma_0''',$$

d'où une ontradiction avec la définition de γ_0'''.

Celle-ci étant la seule partie de la preuve pour le cas général qui devait être refaite pour le cas $n = 3$, la démonstration de la pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$ quand le maximum des distances de Hausdorff entre les courbes de Bézier qui composent la polycourbe et leurs polygones de contrôle respectifs est inférieur à γ_0 est terminée aussi pour le cas $n = 3$.

Avant de conclure la preuve du théorème, nous devons remarquer que tout au long de cette démonstration le degré des courbes de Bézier traitées a été considéré au moins égal à deux, donc le cas où (certaines) courbes de Bézier sont des segments n'a pas été pris en compte. Mais la discussion dans ce cas ne pose aucun problème de principe supplémentaire par rapport au cas traité, les techniques nécessaires à la démonstration pour ce cas étant les mêmes que celles utilisées dans la preuve présentée ici. □

Chapitre II

Enveloppe convexe d'une polycourbe : résultats théoriques

II.1. Introduction

L'enveloppe convexe est un sujet important de la géométrie algorithmique. Sans parler de son intérêt intrinsèque, il y a des nombreux problèmes qui peuvent être simplifiés en l'utilisant. Par exemple, la détection de l'intersection de deux objets est plus facile si les objets sont convexes, et ainsi tester si les enveloppes convexes de deux objets sont disjointes est un premier test efficace dans la détection de l'intersection de ces deux objets. L'enveloppe convexe trouve aussi des applications dans la robotique ou la vision.

Le problème de l'enveloppe convexe d'objets "linéaires" du plan (ensembles de points, segments, polygones) peut être considéré comme bien résolu. En particulier, les solutions apportées au problème de l'enveloppe convexe d'un polygone simple sont satisfaisantes aussi bien du point de vue théorique que du point de vue algorithmique. Par contre, le problème, bien plus complexe, du calcul de l'enveloppe convexe d'un objet plan dont la frontière est composée par des courbes a été nettement moins étudié. Dans tous les articles traitant de ce sujet que nous avons trouvés [Baj91], [Dob90], [Sch87], ce problème a été abordé plus ou moins de la même manière, en considérant que certaines opérations facilement réalisables pour des points et des segments le sont aussi pour des courbes. Parmi ces opérations nous pouvons citer le calcul des droites d'appui communes à deux courbes et le calcul des points d'intersection d'une courbe et d'une droite. Évidemment, en remplaçant dans la phrase précédente "courbe" par "segment" on obtient des problèmes de complexité O(1), dont la résolution est exacte. Dans ce cas, on sait également prendre en compte des problèmes arithmétiques "fins" induits par la manipulation des nombres réels en machine. Mais la résolution des problèmes identiques étendus à des courbes, polynômiales par exemple, implique la résolution d'équations algébriques de degré élevé. Même s'il existe des méthodes numériques performantes, l'inconvénient de cette approche est qu'elle ignore, dans les phases des calculs numériques, la géométrie et la topologie de l'objet considéré. Ceci peut conduire à des incohérences dans la topologie de l'enveloppe convexe obtenue.

Un autre point important à noter est que, dans le cas des objets "linéaires", calculer l'enveloppe convexe revient sans ambiguïté à trouver une liste ordonnée de points qui sont les sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe, en précisant si l'ordre considéré est trigonométrique ou inverse. Par contre, dans le cas des objets bornés par une union de courbes, la frontière de l'enveloppe convexe est un objet géométrique que l'on peut décrire de plusieurs façons différentes. En conséquence, la description attendue comme résultat doit être précisée. Dans les articles cités, la nature exacte du résultat cherché se définit le plus souvent de façon implicite et naturelle à partir de la méthode proposée.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux manières de décrire l'enveloppe convexe d'une polycourbe. La première consiste à fournir un objet qui approche, en termes de distance, l'enveloppe convexe de la polycourbe, cet objet pouvant être un polygone ou une polycourbe, mais ayant la propriété de pouvoir être calculé sans résolution d'équations de degré supérieur à 1. La deuxième manière, sur laquelle l'accent sera mis, consiste à donner une description exacte et complète de la topologie de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Ainsi, nous définirons de façon rigoureuse la notion de *structure topologique* de l'enveloppe convexe et nous verrons que si par son intermédiaire l'enveloppe convexe n'est pas exprimée explicitement, elle n'est pas moins correcte et complète.

La troisième section de ce chapitre est dédiée à l'enveloppe convexe approchée, étudiée d'abord dans le cadre général et ensuite pour les polycourbes de Bézier. La quatrième section est consacrée à l'étude des aspects topologiques du problème de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier. Elle commence par la définition annoncée de la structure topologique de l'enveloppe convexe, et après nous montrons de quelle façon cette structure topologique peut être trouvée à partir du polygone de contrôle de la polycourbe de Bézier. À la fin de cette section nous établissons les équations permettant de décrire l'enveloppe convexe explicitement. Remarquons que tout au long de ce chapitre les polycourbes (de Bézier ou pas) seront implicitement considérées fermées.

II.2. Concentré de chapitre (II)

Ce chapitre formalise la notion de topologie de l'enveloppe convexe et établit, pour une polycourbe de Bézier donnée, l'existence d'un polygone de contrôle fournissant la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Voila pourquoi les deux premiers niveaux de lecture ne seront plus si différents qu'au premier chapitre - et plus très différents du troisième, d'ailleurs. Si vous avez du mal à comprendre ces histoires de polycourbe qui a tantôt n courbes de Bézier, tantôt n_0, ou le fait que je parle d'*un* polygone de contrôle et non pas *du* polygone de contrôle, relisez attentivement la remarque de la page 25.

Premier niveau. Dans la section II.3, les preuves (lemmes II.1 et II.3) peuvent être ignorées, elles sont d'ailleurs assez faciles. Dans la section II.4, la définition II.4 nous donne la notion de topologie de l'enveloppe convexe, tout en restant à un niveau intuitif, et c'est la définition II.6 qui formalise ce concept ; le lemme II.7 montre que les deux ont la même signification. Les paragraphes II.4.1 et II.4.3 devraient donc être lus en entier - bien sûr, la démonstration du lemme II.7 n'est pas nécessaire. Dans le paragraphe II.4.2, le lemme II.5 donne un résultat nécessaire quand le polygone de contrôle de la polycourbe n'est pas simple, mais seulement pseudo-simple ; sa preuve n'a pas à être lue. Dans le paragraphe II.4.4 nous établissons enfin l'existence du polygone de contrôle fournissant la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe, et dans le paragraphe II.4.5 sont données les équations permettant de calculer explicitement cette enveloppe convexe.

Quand même, tous ces résultats sont de nature purement théorique, il n'ont presqu'aucune "utilité algorithmique". Ainsi, si vous êtes intéressé uniquement par le "comment faire pour", lisez seulement les définitions II.4 et II.6 avec les commentaires qui les suivent et l'énoncé du lemme II.7, pour la topologie de l'enveloppe convexe, et la section II.3 (sans les preuves), pour l'approximation de l'enveloppe convexe, et passez au chapitre suivant.

Deuxième niveau. Comme pour le premier niveau une lecture quasi-intégrale du chapitre à été recommandée, je ne peux que remarquer que la preuve du théorème II.9 peut être lue assez facilement. La valeur ε_0 de l'énoncé de ce théorème est une mesure de la dégénérescence de la polycourbe. La dégénérescence est définie au chapitre suivant (définition III.7), car de point de vue théorique une polycourbe dégénérée n'a pas à être l'objet d'un traitement particulier, tandis que de point de vue algorithmique si.

II.3. Enveloppe convexe approchée

Conformément à l'idée exposée dans l'introduction de cette thèse, nous n'allons travailler directement sur une polycourbe donnée, mais sur des polygones approchant cet objet dans un sens qui sera précisé, en cherchant ainsi une approximation de l'enveloppe convexe de la polycourbe. La question qui se pose naturellement est : si un polygone $\mathcal{P}$ approche une polycourbe $\mathcal{C}$ avec une erreur ε (dans un sens précisé), quelle sera l'erreur ε' avec laquelle la solution $S(\mathcal{P})$ d'un certain problème pour le polygone approchera la solution $S(\mathcal{C})$ du même problème pour la polycourbe ? Dans notre cas, le problème posé est celui de l'enveloppe convexe et pour répondre à cette question nous préciserons le sens dans lequel le polygone approche la polycourbe et nous donnerons l'évaluation de ε' en fonction de ε.

II.3.1. *La polycourbe générale*

Rappelons que l'enveloppe convexe d'un objet donné est le plus petit convexe contenant l'objet ; elle peut s'écrire

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_i \in \mathcal{A}\ et\ \lambda_i \geq 0\ et\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

$\mathcal{A}$ étant un ensemble quelconque de points qui, dans notre cas, seront des points du plan.

Nous nous intéressons ici à l'enveloppe convexe approchée au sens de la distance de Hausdorff. Nous cherchons donc, pour une polycourbe donnée $\mathcal{C}$, un polygone $\mathcal{P}$ tel que la distance de Hausdorff entre l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ et celle de $\mathcal{C}$ soit inférieure à une tolérance donnée ε. Le résultat suivant nous indique quels polygones $\mathcal{P}$ vont satisfaire cette condition.

Lemme II.1. – *Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux polycourbes. Alors*

$$\delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{E}(\mathcal{C}_1), \mathcal{E}(\mathcal{C}_2)\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2).$$

Preuve – Soit $r_0 = \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. En utilisant (I.4), pour prouver l'inégalité de l'énoncé il faut et il suffit de prouver que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1)\ \exists \mathrm{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_2) \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$$

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_2)\ \exists \mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1) \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$$

Remarque Pour toute polycourbe $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \mathcal{E}\big(\overline{reg(\mathcal{C})}\big)$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1)$. Par conséquent, $\mathrm{A} \in \mathcal{E}\big(\overline{reg(\mathcal{C}_1)}\big)$ et alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n \in \overline{reg(\mathcal{C}_1)}$ tels que $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$. Comme $\mathrm{A}_i \in \overline{reg(\mathcal{C}_1)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\mathrm{B}_i \in \overline{reg(\mathcal{C}_2)}$ tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i) \leq r_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{B}_i$. Nous voulons prouver que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$, et nous allons montrer cette inégalité par récurrence. Pour $n = 2$, nous aurons la situation de la figure II.1, où le point M est considéré tel que $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{A}_1 + (1 - \lambda)\mathrm{B}_2$ ($\mathrm{A} = \lambda \mathrm{A}_1 + (1 - \lambda)\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{B}_1 + (1 - \lambda)\mathrm{B}_2$). Alors nous avons $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = \lambda \mathrm{d}(\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2)$ et $\mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{M}) = (1 - \lambda)\mathrm{d}(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$. Mais $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{M}) + \mathrm{d}(\mathrm{B}, \mathrm{M})$, donc

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq \lambda \mathrm{d}(\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2) + (1 - \lambda)\mathrm{d}(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1) \leq \lambda r_0 + (1 - \lambda) r_0 = r_0.$$

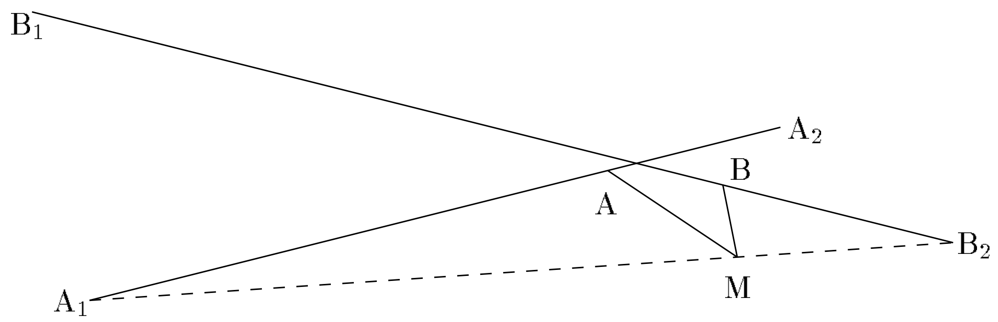


Figure II.1

Supposons maintenant que la relation est vérifiée pour $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ et $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$ et nous voulons prouver qu'elle est vérifiée pour $A = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i A'_i$ et $B = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i B'_i$. Notons

$$\lambda_i = \gamma_i \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \text{ et } \lambda_n = \gamma_n + \gamma_{n+1},$$

$$A_i = A'_i \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \text{ et } A_n = \frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n A'_n + \gamma_{n+1} A'_{n+1})$$

et

$$B_i = B'_i \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \text{ et } B_n = \frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n B'_n + \gamma_{n+1} B'_{n+1}).$$

Alors, comme $d(A'_n, B'_n) \leq r_0$, $d(A'_{n+1}, B'_{n+1}) \leq r_0$ et $\frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n + \gamma_{n+1}) = 1$, il vient $d(A_n, B_n) \leq r_0$. En plus,

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i A'_i = A = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i A'_i + (\gamma_n + \gamma_{n+1}) \frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n A'_n + \gamma_{n+1} A'_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A_i + \lambda_n A_n = A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

et de même $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i$. Par hypothèse, $d(A_i, B_i) \leq r_0 \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et nous avons aussi prouvé que $d(A_n, B_n) \leq r_0$, donc nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence et on obtient $d(A, B) \leq r_0$.

□

Ce lemme a comme conséquence immédiate le résultat suivant :

Corollaire II.2. – *Si $\mathcal{C}$ est une polycourbe et $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$ est une suite de polygones qui converge vers $\mathcal{C}$ au sens de la distance de Hausdorff, alors $\{\mathcal{E}(\mathcal{P}_n)\}_{n \geq 0}$ converge vers $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ au sens de la distance de Hausdorff.*

II.3.2. *La polycourbe de Bézier*

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que si une suite de polygones converge vers une polycourbe au sens de la distance de Hausdorff, alors la suite des enveloppes convexes des polygones converge vers l'enveloppe convexe de la polycourbe. Mais dans le cas général, construire une suite de polygones qui converge vers une polycourbe donnée est un problème délicat, raison pour laquelle nous avons recours aux polycourbes de Bézier.

La convergence au sens de la distance de Hausdorff du B-polygone d'une courbe de Bézier vers la courbe par la subdivision de de Casteljau est une propriété des courbes de Bézier. Mais il se pose la question de la convergence, par subdivision, du polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier vers la polycourbe, et ainsi nous sommes amenés à nous demander quelle est la relation liant la distance de Hausdorff entre une polycourbe de Bézier et son polygone de contrôle et les distances de Hausdorff entre les courbes de Bézier qui composent la polycourbe et leurs B-polygones respectifs. Le lemme suivant répond à cette question.

Lemme II.3. – *Soit* $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ *une polycourbe de Bézier de polygone de contrôle* $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$. *Alors*

$$\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)$$

Preuve – Soit $\delta = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ nous aurons $\mathcal{P}_i \subset \mathbf{B}(\mathcal{B}_i, \delta)$ et $\mathcal{B}_i \subset \mathbf{B}(\mathcal{P}_i, \delta)$. Il en résulte $\mathcal{P} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\mathcal{B}_i, \delta)$ et $\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\mathcal{P}_i, \delta)$. Mais

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\mathcal{B}_i, \delta) &= \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathcal{B}_i) < \delta\} \\
&= \big\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathcal{B}_i) < \delta\big\} \\
&= \big\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P}, \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i) < \delta\big\} = \mathbf{B}(\mathcal{B}, \delta)
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{B}(\mathcal{P}_i, \delta) = \mathbf{B}(\mathcal{P}, \delta)$$

Donc $\mathcal{P} \subset \mathbf{B}(\mathcal{B}, \delta)$ et $\mathcal{B} \subset \mathbf{B}(\mathcal{P}, \delta)$ et ainsi, conformément à la définition de la distance de Hausdorff, $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) \leq \delta$. □

La convergence du polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier vers la polycourbe par la subdivision de de Casteljau est une conséquence immédiate de ce lemme. En appliquant le résultat du cas général, nous pouvons ainsi déduire que l'enveloppe convexe de la suite de polygones de contrôle obtenus par subdivision de de Casteljau converge au sens de la distance de Hausdorff vers l'enveloppe convexe de la polycourbe.

II.4. Enveloppe convexe topologique

Même si les aspects topologiques du problème de l'enveloppe convexe peuvent être discutés dans le cas général, après la construction d'un cadre d'étude formel (à commencer par la définition de ces aspects topologiques), nous nous contenterons d'étudier la topologie de l'enveloppe convexe uniquement pour les polycourbes de Bézier, que nous appellerons dans ce qui suit des polycourbes, tout risque de confusion étant écarté.

Le résultat obtenu dans le paragraphe précédent n'est pas très satisfaisant si nous nous intéressons à la topologie de l'enveloppe convexe, car la convergence au sens de la distance de Hausdorff est assez faible topologiquement. En effet, il peut exister une suite d'objets $\{\mathcal{O}_i\}_{i\geq 1}$ convergeant vers un objet $\mathcal{O}$ tels que la topologie de $\mathcal{O}$ soit fondamentalement différente de la topologie des $\mathcal{O}_i$, par exemple tous les $\mathcal{O}_i$ peuvent être non-simples et pourtant $\mathcal{O}$ peut être simple.

Mais qu'est-ce que c'est que la topologie de l'enveloppe convexe d'une polycourbe ?

II.4.1. *Définition du problème*

Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe, où $\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} ; [0,1])$ sont des courbes de Bézier complètement convexes pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition II.4. – *Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ donne la (une des) structure(s) topologique(s) de l'enveloppe convexe de la polycourbe si la courbe frontière de cette enveloppe convexe $\mathcal{E}$ peut être écrite sous la forme*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{p} \left(\mathcal{B}_{i_k}\big|_{[\mathrm{R}_{i_k}\mathrm{R}'_{i_k}]} \cup [\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}] \right) , \tag{II.1}$$

où $\mathrm{R}_{i_k}, \mathrm{R}'_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est la droite réalisant l'enveloppe convexe droite des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$.

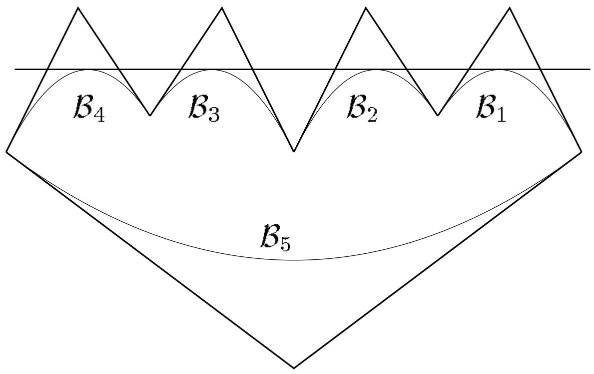


Figure II.2

Si l'ensemble $\mathcal{I}$ est tel que $i_1 = \min_{k=1}^{p} i_k$ (ce que nous allons toujours considérer, sauf mention contraire), alors il n'est pas difficile à voir que la simplicité de la polycourbe implique $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Il est aussi évident qu'un tel ensemble $\mathcal{I}$ existe pour toute polycourbe, mais il existe des polycourbes pour lesquelles il n'est pas unique, donc il y aura plusieurs structures topologiques de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Une polycourbe se trouvant dans cette situation est présentée dans la figure II.2, et nous pouvons voir que les ensembles $\mathcal{I}_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{I}_2 = \{1,2,4,5\}$, $\mathcal{I}_3 = \{1,3,4,5\}$, $\mathcal{I}_4 = \{1,4,5\}$ donnent chacun une structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Pour une polycourbe donnée, la structure topologique de l'enveloppe convexe décrit celle-ci de manière implicite, mais complète et correcte. Une description explicite de la frontière de l'enveloppe convexe ne peut être obtenue, généralement, que par la résolution de systèmes d'équations qui peuvent être de degré assez élevé. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre nous établirons les systèmes d'équations permettant de calculer les coordonnées des points R_{i_k} et R'_{i_k} de la formule (II.1).

Ainsi, nous nous proposons de trouver, pour une polycourbe donnée $\mathcal{B}$, un ensemble $\mathcal{I}$ comme décrit dans la définition II.4, et ceci en travaillant uniquement avec le polygone de contrôle de la polycourbe. Plus exactement, nous cherchons un polygone de contrôle tel que la structure topologique de son enveloppe convexe soit la même que celle de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

II.4.2. *Résultat préliminaire*

Une première propriété concernant la topologie de l'enveloppe convexe a déjà été mentionnée, il s'agit du fait que l'ensemble $\mathcal{I}$ de la définition II.4 est ordonné pour toute polycourbe. Par conséquent, un polygone de contrôle dont l'enveloppe convexe a la même structure topologique que celle de la polycourbe doit satisfaire aussi cette propriété. Corroboré avec le fait que les B-polygones des courbes de Bézier composant la polycourbe sont simples et convexes, cela implique que les sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle doivent être ordonnés. Nous aurions tout de suite cette propriété si nous savions que le polygone de contrôle est simple, mais nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existe des polycourbes pour lesquelles il n'existe pas de polygone de contrôle simple. Mais nous pouvons prouver que la propriété ci-dessus est satisfaite aussi par les polygones pseudo-simples.

Lemme II.5. – *Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ un polygone pseudo-simple et soit $\mathcal{Q} = \mathrm{P}_{i_1}\ldots\mathrm{P}_{i_m}$ le polygone frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$, avec $m \leq n$. Alors, en considérant $i_1 = \min\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, nous aurons $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.*

Preuve – Si le polygone $\mathcal{P}$ est simple, la conclusion est évidemment vraie. Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas simple, mais, sans restriction de la généralité, admettons aussi que tous deux sommets successifs de $\mathcal{P}$ sont distincts. Alors il existe $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avec $i < j+1$ tels que $\left[\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}\right] \cap \left[\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}\right] \neq \emptyset$. Mais $\mathcal{P}$ est pseudo-simple, donc les sommets $\mathrm{P}_{i+1}, \mathrm{P}_{i+2}, \ldots, \mathrm{P}_j$ sont colinéaires. Par conséquent, il existe $a < n$ et

$$k_1, \ldots, k_a, \ell_1, \ldots, \ell_a \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ avec } k_1 < \ell_1 \leq k_2 < \ldots < \ell_a$$

tels que (figure II.3)

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{P}_i \notin \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_{i+1} & \forall i \in \left\{\ell_j, \ell_j + 1, \ldots, k_{j+1}\right\} \\ \mathrm{P}_i \in \mathrm{P}_{k_j}\mathrm{P}_{k_{j+1}} & \forall i \in \left\{k_j, k_j + 1, \ldots, \ell_j\right\} \end{array}\right\} \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, a\}$$

Considérons le polygone $\widetilde{\mathcal{P}}$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en éliminant tous les sommets P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $i \in \left\{k_j + 1, \ldots, \ell_j - 1\right\}$; si il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $\mathrm{P}_{k_j} = \mathrm{P}_{\ell_j}$, alors nous éliminons aussi le point P_{k_j}.

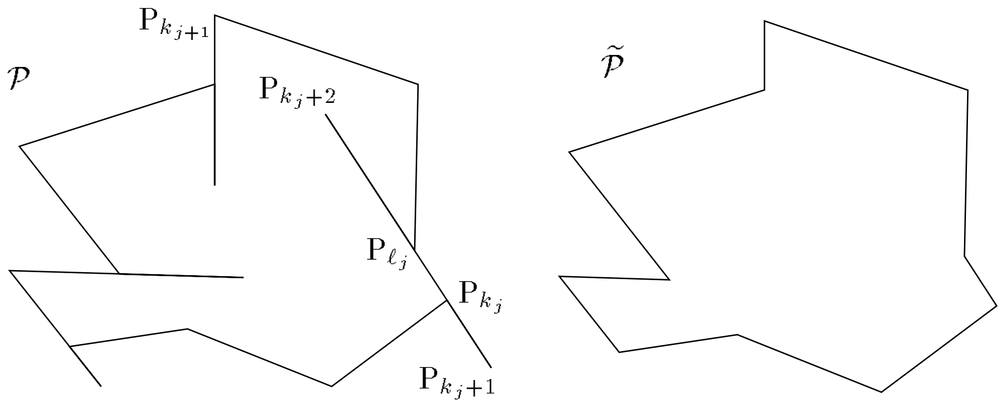


Figure II.3 *Un polygone pseudo-simple $\mathcal{P}$ et le polygone $\widetilde{\mathcal{P}}$ associé.*

Nous pouvons voir facilement que $\widetilde{\mathcal{P}}$ est un polygone simple et $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, a\}$, soit $r_j \leq s_j \in \{k_j, k_j+1, \ldots, \ell_j\}$ tels que $\mathrm{P}_i \in [\mathrm{P}_{r_j}\mathrm{P}_{s_j}]$ pour tout $i \in \{k_j, \ldots, \ell_j\}$. Nous introduisons les notations (figure II.4)

$$J_1 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \;\middle|\; \mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_2 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \;\middle|\; \mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_3 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \;\middle|\; \mathrm{P}_{r_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})}, \mathrm{P}_{s_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_4 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \;\middle|\; \mathrm{P}_{r_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$

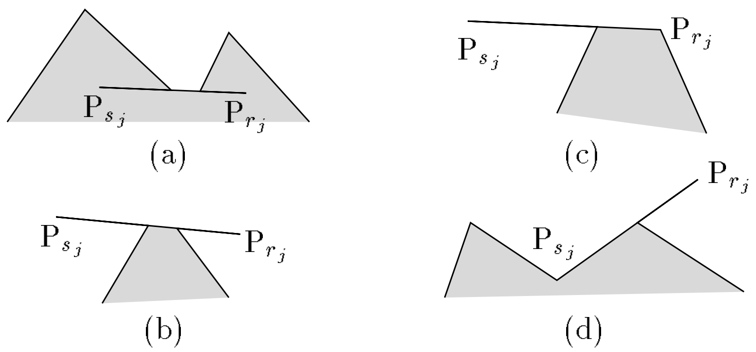


Figure II.4 (a) $j \in J_1$; (b) $j \in J_2$; (c) $j \in J_3$; (d) $j \in J_4$

Il est évident que $\displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{4} J_\alpha = \{1, \ldots, a\}$ et $J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset \ \forall \alpha \neq \beta \in \{1, \ldots, 4\}$.

Soit $\mathcal{R}$ le polygone dont les sommets sont :

- tous les P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $i \in \{\ell_j + 1, \ldots, k_{j+1} - 1\}$;
- tous les P_{k_j} et P_{ℓ_j} avec $j \in J_1$;
- tous les P_{r_j} et P_{s_j} avec $j \in J_2$;
- tous les P_{s_j} avec $j \in J_3$;
- tous les P_{r_j} avec $j \in J_4$

considérés en ordre croissant des indices. La figure suivante reprend le polygone $\mathcal{P}$ de la figure II.3 et présente le polygone $\mathcal{R}$ qui lui est associé.

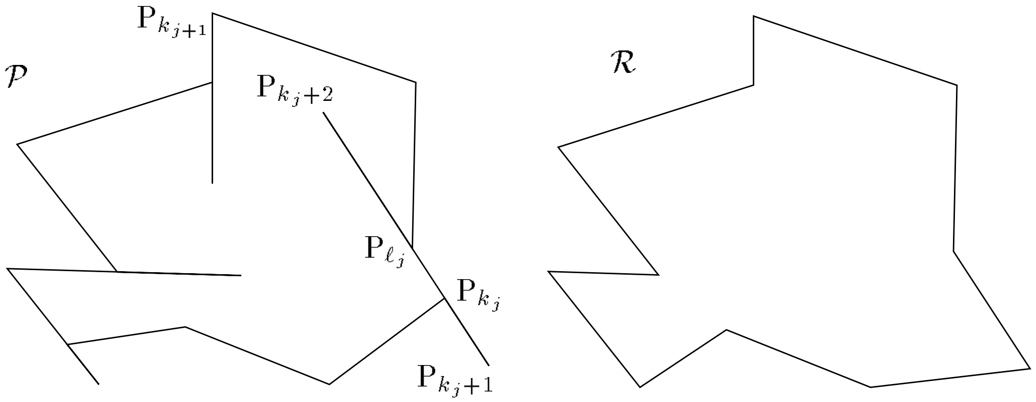


Figure II.5 *Dans ce cas, $\mathcal{R}$ est simple.*

Le polygone $\mathcal{R}$ peut ne pas être simple. Nous allons noter $r(\mathcal{R})$ l'union des toutes les parties bornées du plan ayant la frontière incluse dans $\mathcal{R}$. Évidemment $\overline{r(\mathcal{R})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et il est facile à remarquer que $\overline{r(\mathcal{R})} = \mathcal{A}$, où

$$\mathcal{A} = \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \cup \left(\bigcup_{j \in J_2 \cup J_4} \overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_j-1}\mathrm{P}_{k_j}\mathrm{P}_{r_j})} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J_2 \cup J_3} \overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{\ell_j+1}\mathrm{P}_{\ell_j}\mathrm{P}_{s_j})} \right)$$

Nous pouvons donc en déduire que $\overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{R})$. L'inclusion $\mathcal{E}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ est immédiate, car tous les sommets de $\mathcal{R}$ sont des sommets de $\mathcal{P}$. Pour démontrer l'inclusion inverse, nous montrons que $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Tous les sommets P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $i \in \left\{\ell_j + 1, \ldots, k_{j+1} - 1\right\}$ appartiennent à $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ par définition. Nous avons aussi $\forall j \in \{1, \ldots, a\}$ $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$:

- si $j \in J_1$, alors $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_2$, alors P_{r_j} et P_{s_j} sont par définition des sommets de $\mathcal{R}$ et donc P_{r_j} *et* P_{s_j} appartiennent à $\mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_3$, alors $\mathrm{P}_{r_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et pt_{s_j} est un sommet de $\mathcal{R}$ et donc $\mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_4$, alors P_{r_j} est un sommet de $\mathcal{R}$ et donc $\mathrm{P}_{r_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et $\mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Mais $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ implique $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\ \forall j \in \{1, \ldots, a\}$. En conclusion, $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et ainsi, en effet, $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Comme nous avons déjà remarqué, il est possible que le polygone $\mathcal{R}$ ne soit pas simple. Les lignes polygonales $\mathcal{P}_j = \mathrm{P}_{\ell_j+1}\mathrm{P}_{\ell_j+2} \ldots \mathrm{P}_{k_{j+1}-1}$ sont simples pour tout $j \in \{1, \ldots, a\}$ et toutes ces lignes polygonales et les segments $\left[\mathrm{P}_{r_j}\mathrm{P}_{s_j}\right]$, $j \in \{1, \ldots, a\}$, sont respectivement disjoints. Donc si $\mathcal{R}$ n'est pas simple, alors il existe $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, a\}$ tels que

$$\left]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}\right[\cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset \ \mathit{ou}\ \left]\mathrm{P}_{s_{j_1}}\mathrm{P}_{\ell_{j_1}+1}\right[\cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset$$

ou

$$\left]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}\right[\cap \left[\mathrm{P}_{r_{j_2}}\mathrm{P}_{s_{j_2}}\right] \neq \emptyset \ \mathit{ou}\ \left]\mathrm{P}_{s_{j_1}}\mathrm{P}_{\ell_{j_1}+1}\right[\cap \left[\mathrm{P}_{r_{j_2}}\mathrm{P}_{s_{j_2}}\right] \neq \emptyset$$

Supposons qu'il existe $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, a\}$ tels que $\left]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}\right[\cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset$. Alors il y aura des sommets de la ligne polygonale $\mathcal{P}_{j_2}$ qui appartiennent à $\overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{k_{j_1}}\mathrm{P}_{r_{j_1}})}$, sommets qui peuvent être consécutifs ou non. Chacun de ces sommets peut être écrit comme une combinaison convexe des points $\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}$, $\mathrm{P}_{k_{j_1}}$ et $\mathrm{P}_{r_{j_1}}$, donc en aucun cas ils ne seront des sommets de $\mathcal{Q}$, le polygone frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, donc de $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. Nous pouvons ainsi éliminer ces sommets du polygone $\mathcal{R}$ sans pour autant modifier $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. Le segment $]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[$ ne coupera plus la ligne polygonale $\mathcal{P}'_{j_2}$ restée après l'élimination des sommets appartenant à $\overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{k_{j_1}}\mathrm{P}_{r_{j_1}})}$. Par contre, cette nouvelle ligne polygonale, $\mathcal{P}'_{j_2}$, peut couper d'autres "parties" de $\mathcal{R}$ et perpétuer donc sa non-simplicité. Mais nous pouvons appliquer à $\mathcal{P}'_{j_2}$ exactement le même raisonnement qu'au segment $]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[$ et donc éliminer de nouveau certains sommets de $\mathcal{R}$ tels que la ligne polygonale $\mathcal{P}'_{j_2}$ ne coupe plus $\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}'_{j_2}$. Nous ne pouvons pas cycler indéfiniment en appliquant cette méthode, car $\mathcal{R}$ a un nombre fini de sommets, nous obtenons donc en un nombre fini de pas, en utilisant exactement le même procédé pour les trois autres cas de non-simplicité de $\mathcal{R}$, un polygone $\widetilde{\mathcal{R}}$ qui est simple et qui, compte tenant de la façon d'éliminer des sommets de $\mathcal{R}$ employée, aura la même enveloppe convexe que $\mathcal{R}$.

Il existe donc un polygone simple $\widetilde{\mathcal{R}}$ dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$ et tel que $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{R}})$ et ainsi que les indices de ses sommets soient en ordre croissant, car $\mathcal{R}$ avait cette propriété et elle ne se perd évidemment pas dans le processus d'élimination de sommets de $\mathcal{R}$. Comme $\widetilde{\mathcal{R}}$ est simple, le polygone frontière de son enveloppe convexe, $\mathcal{Q}$, aura les indices des sommets en ordre croissant parmi ses sommets, ce qui conclut la démonstration du lemme. □

II.4.3. *Pertinence topologique : définition*

Dans ce paragraphe, nous allons formaliser la notion d'identité des structures topologiques des enveloppes convexes de la polycourbe et de son polygone de contrôle.

Définition II.6. – *En utilisant les notations habituelles, soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier de polygone de contrôle $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{Q}$ le polygone frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ la courbe frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{B}$. Nous dirons que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle, $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, est topologiquement pertinente pour l'enveloppe convexe de la polycourbe de Bézier, $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(II.6.i) $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

(II.6.ii) $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\Big(\bigcup_{j\neq i} \mathcal{P}_j\Big)\Big) \Longrightarrow \mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\Big(\bigcup_{j\neq i} \mathcal{B}_j\Big)$

pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Avant de prouver que la notion de pertinence topologique est vraiment une formalisation de la notion d'identité des structures topologiques, établissons une convention concernant le polygone $\mathcal{Q}$. Ce polygone est le polygone frontière de l'enveloppe convexe du polygone $\mathcal{P}$, par conséquent, si l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, il existe $j_{i_k} \in \{0, \ldots, m_{i_k}\}$ et $\ell_{i_k} \in \{0, \ldots, m_{i_k} - j_{i_k} - 1\}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ tels que

$$\mathcal{Q} = \mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}}\mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+1}\ldots\mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+\ell_{i_1}}\mathrm{P}^{(i_2)}_{j_{i_2}}\ldots\mathrm{P}^{(i_p)}_{j_{i_p}+\ell_{i_p}} \tag{II.2}$$

Si une des extrémités des courbes de Bézier constituant la polycourbe, disons $\mathrm{P}^{(i)}_0 = \mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}}$, est un sommet de $\mathcal{Q}$, alors, dans la notation ci-dessus pour le polygone $\mathcal{Q}$, ce sommet sera toujours considéré un sommet de $\mathcal{P}_i$ et non pas un de $\mathcal{P}_{i-1}$, car pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ nous avons $j_{i_k} + \ell_{i_k} < m_{i_k}$.

La convention dont nous parlions consiste à prendre toujours le polygone $\mathcal{Q}$ maximal du point de vue du nombre de sommets, ce qui veut dire que si le sommet $\mathrm{P}_j^{(i)}$ du polygone de contrôle a la propriété $\mathrm{P}_j^{(i)} \in \delta(\mathcal{E}(\mathcal{P}))$, alors il est un sommet de $\mathcal{Q}$. Dans un cas comme celui de la figure II.6, où trois sommets de $\mathcal{P}$ sont alignés et la droite qu'ils engendrent est une droite d'appui du polygone, cette condition implique l'appartenance du sommet $\mathrm{P}_j^{(i)}$ à l'ensemble des sommets du polygone $\mathcal{Q}$.

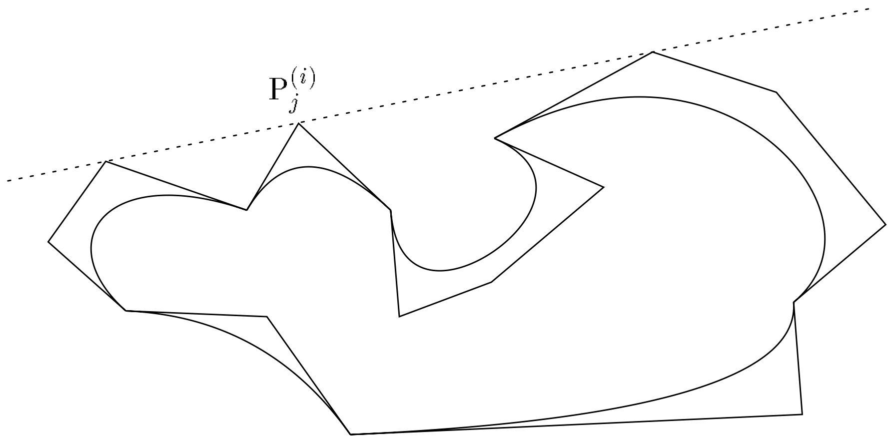


Figure II.6

La condition suivante est une conséquence immédiate de la convention que nous venons de faire :

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \Longrightarrow i \in \{i_1, \ldots, i_p\} \tag{II.3}$$

Si $\mathcal{P}$ n'a pas de sommets alignés, la condition (II.3) est évidemment satisfaite même sans aucune convention sur le polygone $\mathcal{Q}$.

Énonçons et prouvons maintenant le résultat annoncé sur la notion de pertinence topologique.

Lemme II.7. – *En utilisant les mêmes notations que dans la définition* II.6 *et la formule* (II.2), *$\mathcal{E}(\mathcal{P})$ est topologiquement pertinente pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ ssi l'ensemble $\mathcal{I}$ donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$*

Preuve – Nous commençons la preuve par l'implication directe.

Nous notons $\mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $\mathrm{I}_1 = \big\{i \in \mathrm{I} \mid \mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset\big\}$ et $\mathrm{I}_2 = \big\{i \in \mathrm{I} \mid \mathcal{E} \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j\big)\big\}$. Il est facile à remarquer que $\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1$. En effet, si $i \notin \mathrm{I}_1$, alors $\mathcal{B}_i \subset reg(\mathcal{E})$, car $\mathcal{B}_i \subset \overline{reg(\mathcal{E})} = \mathcal{E}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Mais alors $\mathcal{E}\big(\cup j \neq i \mathcal{B}_j\big) = \mathcal{E}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{E}$, donc $i \notin \mathrm{I}_2$. Donc $\mathrm{I} \setminus \mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I} \setminus \mathrm{I}_2$ et ainsi $\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1$. La remarque à faire est que si $\mathcal{B}$ est "en position générale", alors $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1$. Par contre, si un cas dégénéré apparaît (c'est-à-dire si plusieurs courbes de Bézier admettent une tangente commune qui est aussi une droite d'appui de la polycourbe, comme dans l'exemple de la figure II.7), alors $\mathrm{I}_1 \setminus \mathrm{I}_2 \neq \emptyset$.

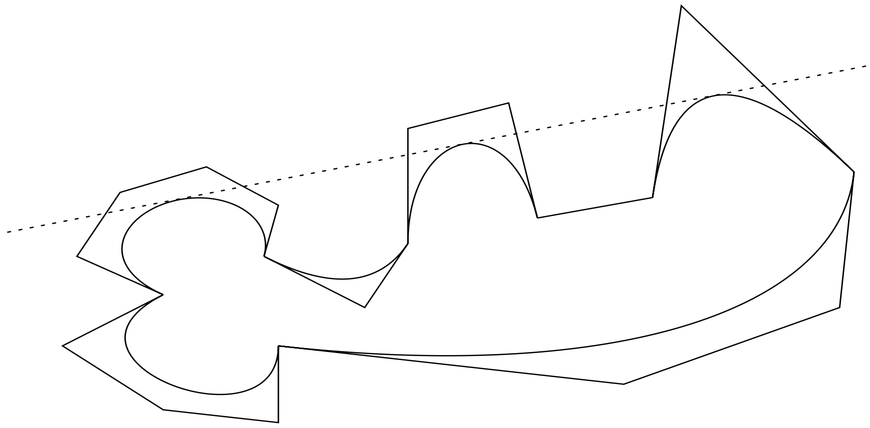


Figure II.7

Nous voulons maintenant prouver que $\mathrm{I}_2 \subset \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \mathrm{I}_1$.
Soit $i \in \mathrm{I}_2$. Alors $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j)$. Comme évidemment $\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j \subset \mathcal{E}(\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j)$ et $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\mathcal{B}))$, nous obtenons $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j)$. Conformément à (II.6.ii), nous aurons alors $\mathcal{P}_i \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j)$, ce qui nous donne tout de suite $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$.
Soit maintenant $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$. Alors $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ et conformément à (II.6.i) $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, donc $i \in \mathrm{I}_1$. Ainsi, les deux inclusions écrites ci-dessus sont prouvées.
Nous pouvons voir tout de suite que $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\cup_{i\in \mathrm{I}_2}\mathcal{B}_i))$. Nous écrivons

$$\mathrm{I}_2 = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_r\} ,$$

où $r = \mathrm{card}(\mathrm{I}_2) \leq p$, et alors pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$ il existe $t_0^{(j_k)} \leq t_1^{(j_k)} \in [0,1]$ tels que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{r} \left(\mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} ; [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}]) \cup [\mathrm{R}'_{j_k}\mathrm{R}_{j_{k+1}}]\right) ,$$

où $\mathrm{R}_{j_k} = \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} ; t_0^{(j_k)})$, $\mathrm{R}'_{j_k} = \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} ; t_1^{(j_k)})$ et $j_0 = j_r$.
Si $\mathrm{I}_2 = \{i_1, \ldots, i_p\}$, nous aurons $r = p$ et $i_k = j_k$ $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$ et la preuve de l'implication directe est finie, car il est évident que

$$\mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} ; [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}]) = \mathcal{B}_{j_k}\big|_{[\mathrm{R}_{j_k}\mathrm{R}'_{j_k}]}$$

Si $\mathrm{I}_2 \neq \{i_1, \ldots, i_p\}$, soit $i \in \{i_1, \ldots, i_p\} \setminus \mathrm{I}_2$. Comme $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \mathrm{I}_1$, il vient $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Évidemment,

$$\mathcal{B}_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^{r} \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} ; [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}])\right) = \emptyset,$$

car $\mathcal{B}$ est une courbe simple et $i \notin \mathrm{I}_2$. Il reste donc

$$\mathcal{B}_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^{r} [\mathrm{R}'_{j_k}\mathrm{R}_{j_{k+1}}]\right) \neq \emptyset$$

L'intersection de $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{E}$ ne peut ainsi être qu'un point ou, dans certaines conditions, un segment. Dans les deux cas, il existe $t_0^{(i)} \leq t_1^{(i)} \in [0,1]$ tels que

$$\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = \mathrm{B}_i(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} ; [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}])$$

Si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}$ est un point, alors $t_0^{(i)} = t_1^{(i)}$, et si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}$ est un segment, ce segment est forcément $\mathcal{B}_i$ et alors $t_0^{(i)} = 0$ et $t_1^{(i)} = 1$. De toute façon, si nous considérons $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que

$j_k < i < j_{k+1}$ (un tel k existe et est unique), alors évidemment

$$[R'_{j_k} R_{j_{k+1}}] = [R'_{j_k} R_i] \cup B_{m_i}(P_0^{(i)}, \ldots, P_{m_i}^{(i)} ; [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}]) \cup [R'_i R_{j_{k+1}}]$$

et par conséquent nous pouvons "insérer" l'indice i parmi les j_k dans l'expression de $\mathcal{E}$. Comme ce raisonnement est valable pour tout élément i de l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ qui n'est pas dans I_2, nous finissons par obtenir pour $\mathcal{E}$ l'expression de la définition II.4 avec l'ensemble $\mathcal{I}$ identifié par l'expression de $\mathcal{Q}$. L'implication directe est ainsi vraie dans tous les cas.

La preuve de l'implication inverse est immédiate. Supposons que $\mathcal{E}$ a la forme donnée dans l'énoncé. Soit $i \in I$ tel que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Conformément à la condition (II.3), nous aurons alors $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ et donc

$$\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = B_{m_i}(P_0^{(i)}, \ldots, P_{m_i}^{(i)} ; [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}]) \neq \emptyset$$

Si $i \in I$ est tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\big(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j\big)\Big)$, alors $i \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$. Dans ce cas, nous aurons

$$\overline{reg(\mathcal{E})} = \mathcal{E}\left(\bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_{i_k}\right) \subset \mathcal{E}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i)$$

et par conséquent $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\big(\cup_{j \neq i} \mathcal{P}_j\big)$.

□

II.4.4. *Pertinence topologique : existence du "bon" polygone de contrôle*

La conséquence immédiate du résultat précédent est que nous pourrons déterminer la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe en travaillant uniquement sur son polygone de contrôle si et seulement si nous pouvons trouver par subdivisions de de Casteljau successives un polygone de contrôle dont l'enveloppe convexe soit topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe. Avant de donner le théorème montrant que ceci est possible, énonçons un lemme qui nous sera nécessaire.

Lemme II.8. – *En utilisant les notations habituelles, soit $\mathcal{B}$ une polycourbe convexe. Alors son polygone de contrôle $\mathcal{P}$ est simple et convexe.*

La preuve formelle de ce résultat très intuitif se trouve dans l'annexe de ce chapitre.

Théorème II.9. – *Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure et soit $\mathcal{P}$ son polygone de contrôle. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ soit topologiquement pertinente pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ pour toute écriture de $\mathcal{B}$ comme $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ satisfaisant*

$$\max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta^{H}(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i) < \varepsilon_0$$

Preuve – Soit $\mathcal{E} = \delta\big(\mathcal{E}(\mathcal{B})\big)$ la courbe frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe $\mathcal{B}$ et de même soit $\mathcal{Q} = \delta\big(\mathcal{E}(\mathcal{P})\big)$. Si la polycourbe est convexe, alors nous aurons $\mathcal{E} = \mathcal{B}$. Le lemme précédent nous dit que dans ce cas le polygone de contrôle $\mathcal{P}$ est lui aussi convexe et par conséquent $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$. Il est alors très facile à voir que les conditions (II.6.i) et (II.6.ii) sont vérifiées et la conclusion du théorème est vraie pour tout $\varepsilon_0 > 0$.

Supposons que $\mathcal{B}$ n'est pas convexe et soit n_0 le nombre de courbes de Bézier de sa composition initiale.

Soit $\mathcal{J} = \{j_1 < \ldots < j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\}$ un ensemble donnant la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, où la polycourbe est dans son écriture initiale, donc composée de n_0 courbes de Bézier. Nous pouvons donc écrire, comme dans la définition II.4

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{r} \left(\mathcal{B}_{j_k}\big|_{[\mathrm{R}_{j_k}\mathrm{R}'_{j_k}]} \cup [\mathrm{R}'_{j_k}\mathrm{R}_{j_{k+1}}]\right)$$

Définissons alors

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \min_{\kappa \in \{1,\ldots,r\}} \left\{ \min_{i \in \{1,\ldots,n_0\} \setminus \{j_{k-1}, j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big) \right\}$$

Il y a plusieurs possibilités pour $\widetilde{\varepsilon}_0$.

Cas 1. $\widetilde{\varepsilon}_0 = +\infty$
Ce cas apparaît si $n_0 = 2$, donc si le minimum ci-dessus est indexé avec $i \in \emptyset$. Nous avons deux sous-cas.

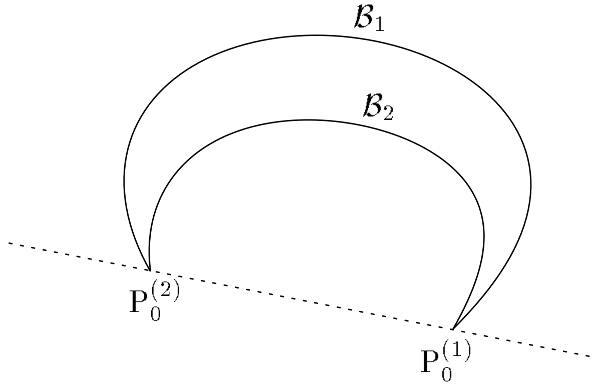


Figure II.8

1.a $\mathcal{B}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathcal{B}_1\big)}$ (figure II.8).
Prenons $\varepsilon_0 = \gamma_0$, la constante donnée par le théorème I.24. Alors $\delta_{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) < \varepsilon_0$ impliquera $\mathcal{P}$ pseudo-simple et nous aurons $\mathcal{Q} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)} \ldots \mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}$, en supposant que $\mathcal{B}_2 \subset \overline{reg\big(\mathcal{B}_1, \big]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\big[\big)}$. D'un autre côté, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 \cup \big[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}\big]$, par conséquent

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset \quad \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_i \neq \emptyset \quad i = 1, 2$$

et conformément à la définition $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ est topologiquement pertinente pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$.
1.b $\mathcal{B}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathcal{B}_1\big)}$.
Dans ce cas, comme nous avons vu dans la preuve du théorème I.24, le polygone $\mathcal{P}$ est toujours pseudo-simple et il est facile à voir que la pertinence topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ est aussi toujours vérifiée. En effet, il est évident que nous ne pouvons en aucun cas avoir $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ ou $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, car les deux courbes se trouvent dans des demi-plans opposés par rapport à la droite $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}$ et leur B-polygones aussi. De la même façon, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et ainsi les conditions de la définition de la pertinence topologique sont satisfaites. Comme pour le cas d'une polycourbe convexe, la valeur de la distance de Hausdorff entre la polycourbe et son polygone de contrôle ne joue aucun rôle.
Cas 2 $\widetilde{\varepsilon}_0 = 0$
C'est un cas dégénéré, le cas des tangentes multiples (figure II.6).
Remarque. Un cas de tangentes multiples ne pourra pas, généralement, être décelé à l'aide des polygones de contrôle. Mais si nous pouvons nous assurer de la pertinence

topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe, le lemme II.7 nous dit que même dans un tel cas nous pouvons trouver la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Dans ce cas, soit

$$K = \big\{k \in \{1,\ldots,r\} \mid \min_{i\in\{1,\ldots,n_0\}\setminus\{j_{k-1},j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k},\mathcal{B}_i\big)=0\big\}$$

Évidemment, $k \neq \emptyset$. Pour tout $k \in K$ nous prenons

$$\mathrm{I}_k = \big\{i \in \{1,\ldots,n_0\} \mid \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k},\mathcal{B}_i\big)=0\big\}$$

Nous aurons, bien sûr, $i_{k-1}, i_k \in \mathrm{I}_k$ et soit

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \min_{i\in\{1,\ldots,n_0\}\setminus \mathrm{I}_k} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k},\mathcal{B}_i\big)$$

Nous redéfinissons alors $\widetilde{\varepsilon}_0$:

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\left\{\min_{j\in\{1,\ldots,r\}\setminus K}\left\{\min_{i\in\{1,\ldots,n_0\}\setminus\{j_{k-1},j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k},\mathcal{B}_i\big)\right\}, \min_{k\in K}\widetilde{\varepsilon}_k\right\}$$

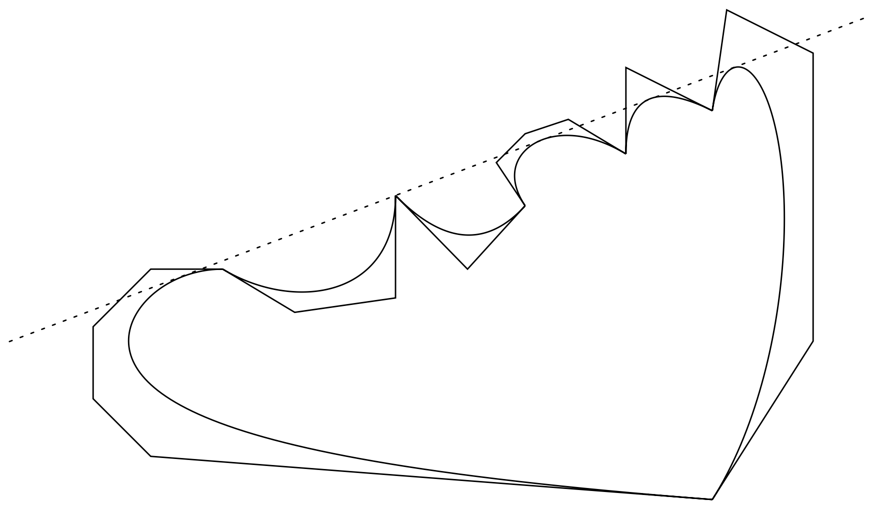


Figure II.9

Le nouveau $\widetilde{\varepsilon}_0$ sera non-nul, mais il peut être $+\infty$. Ce cas est présenté dans la figure II.9 et il n'est pas difficile à voir que d'un côté $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n_0\}$ et de l'autre côté il y a exactement deux courbes $\mathcal{B}_{j_1}$ et $\mathcal{B}_{j_2}$ telles que $\mathcal{B}_{j_k} \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{i\neq j_k}\mathcal{B}_i\big)$ pour $k=1,2$ et pour ces deux courbe nous aurons $\mathcal{P}_{j_k} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $k=1,2$.

Cas 3 $\widetilde{\varepsilon}_0 \in]0,+\infty[$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ nous considérons

$$\overline{\varepsilon}_i = \sup_{\mathrm{P}\in\mathcal{B}_i} \mathrm{d}\big(\mathrm{P},\mathcal{E}(\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i)\big)$$

et nous prenons

$$\overline{\varepsilon}_0 = \min_{\substack{i\in\{1,\ldots,n_0\}\\ \overline{\varepsilon}_i\neq 0}} \overline{\varepsilon}_i$$

Posons alors

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\gamma_0, \frac{\widetilde{\varepsilon}_0}{2}, \frac{\overline{\varepsilon}_0}{2}\right\},$$

ou γ_0 est la constante donnée par le théorème de pseudo-simplicité du polygone de contrôle. Nous remarquons que $\overline{\varepsilon}_0$ ne peut pas être nul. Par contre, il peut être $+\infty$, mais ça ne pose aucun problème pour la définition de ε_0.

Nous supposons avoir maintenant une écriture de la polycourbe $\mathcal{B}$ comme union de n courbes de Bézier satisfaisant $\max_{1\leq i\leq n} \mathrm{d}\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i\big) < \varepsilon_0$ et nous prouverons que (II.6.i) et (II.6.ii) sont satisfaites.

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Nous voulons prouver que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. La preuve sera faite par l'absurde, en supposant que $\mathcal{B}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\mathcal{B})\big)$. Comme $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, il existe $k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $i = i_k$. Nous aurons alors la situation de la figure II.10.

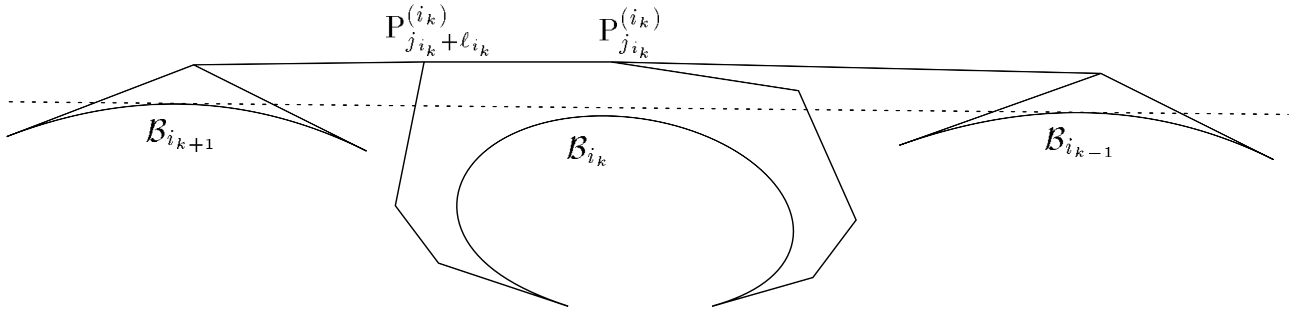


Figure II.10

Mais dans ce cas nous pouvons écrire

$$\widetilde{\varepsilon}_0 \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_{k+1}}, \mathcal{B}_{i_k}\big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}}, \mathcal{B}_{i_k}\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{P}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}\big) < \varepsilon_0,$$

ce qui contredit la définition de ε_0.

Soit maintenant $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_i)\big)$ et nous voulons prouver que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\big(\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i\big)$. Nous allons faire de nouveau une preuve par l'absurde, en supposant que $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}\big(\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i\big)$. Alors il existe $k \in \{1,\ldots,p\}$ tel que cette situation soit celle présentée figure II.11.

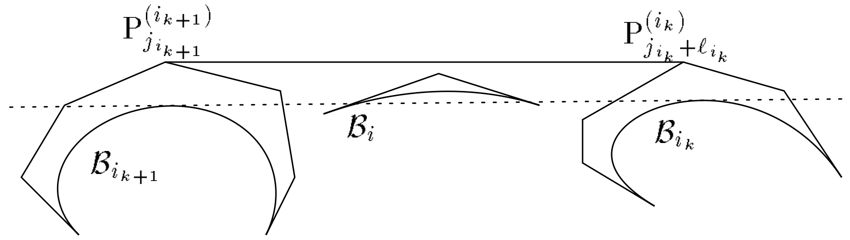


Figure II.11

Dans ce cas, notons $\widetilde{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i \setminus \Big(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}\big(\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i\big)\Big)$ et nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_0 \leq \sup_{\mathrm{P}\in\widetilde{\mathcal{B}}_i} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{R}'\mathrm{R}'') &< \max\big\{\mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}, \mathrm{R}'\mathrm{R}''\big), \mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}, \mathrm{R}'\mathrm{R}''\big)\big\}\\ &\leq \max\big\{\delta^{\mathrm{H}}\big(pg_{i_k}, pb_{i_k}\big), \delta^{\mathrm{H}}\big(pg_{i_{k+1}}, \mathcal{B}_{i_{k+1}}\big)\big\} < \varepsilon_0,\end{aligned}$$

encore une fois un résultat qui contredit la définition de ε_0.

Ainsi, la pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour l'enveloppe convexe de la polycourbe est prouvée si la distance de Hausdorff entre chaque courbe de Bézier composant la polycourbe et son polygone de contrôle est inférieure à ε_0, et avec cette preuve la démonstration du théorème est elle aussi finie.

$\square$

II.4.5. *Les points* R_{i_k} *et* R'_{i_k}

Supposons que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$ est topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ pour lequel le polygone $\mathcal{Q}$ a l'expression de la formule (II.2) donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. Comme annoncé dans le paragraphe II.4.1, nous présentons ici les systèmes d'équations dont la résolution fournit explicitement les coordonnées des points R_{i_k} et R'_{i_k} définis par la formule (II.1). Si les solutions exactes de ces systèmes peuvent être obtenues, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors cette formule donne de manière explicite et exacte la frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ nous donnons le système d'équations Σ_{i_k} qui a comme solution la paire de paramètres $(t'_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ telle que

$$\mathrm{R}'_{i_k} = \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k}) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_{i_{k+1}} = \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t'_{i_{k+1}})$$

En fonction des indices $j_{i_k} + \ell_{i_k}$ et $j_{i_{k+1}}$, nous avons plusieurs cas pour le système Σ_{i_k}.

Cas 1. $j_{i_k} + \ell_{i_k} = 0$, $j_{i_{k+1}} = 0$
Dans ce cas, il n'y a pas d'équation à résoudre, il est très facile à voir que les paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$ sont connus de façon exacte et ils sont tous les deux égaux à 0 : $t'_{i_k} = t_{i_{k+1}} = 0$.

Cas 2. $j_{i_k} + \ell_{i_k} \neq 0$, $j_{i_{k+1}} \neq 0$
Soient les matrices A'_{i_k} et $A_{i_{k+1}}$ des matrices carrées avec deux lignes et deux colonnes définies par $A'_{i_k} = (v_{i_k, i_{k+1}}, v'_{i_k})$ et $A_{i_{k+1}} = (v_{i_k, i_{k+1}}, v_{i_{k+1}})$, où les vecteurs $v_{i_k, i_{k+1}}$, v'_{i_k} et $v_{i_{k+1}}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
v_{i_k, i_{k+1}} &= \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t'_{i_{k+1}}) - \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k}) \\
v'_{i_k} &= \mathrm{B}'_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k}) \\
v_{i_{k+1}} &= \mathrm{B}'_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t_{i_{k+1}})
\end{aligned}$$

Pour que la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ soit une tangente commune des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$, les déterminants de ces deux matrices doivent s'annuler pour des valeurs des paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$ comprises entre 0 et 1. Le système d'équations Σ'_{i_k} donnant les tangentes communes des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ sera donc

$$(\Sigma'_{i_k}) \begin{cases} t'_{i_k}, t_{i_{k+1}} \in [0, 1] \\ \det(A'_{i_k}) = 0 \\ \det(A_{i_{k+1}}) = 0 \end{cases}$$

La pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe et le cas dans lequel nous nous situons pour les indices $j_{i_k} + \ell_{i_k}$ et $j_{i_{k+1}}$ nous disent que ce système a une solution. Mais il peut avoir plusieurs, car deux courbes peuvent admettre jusqu'à quatre tangentes communes. Nous devons donc imposer des conditions supplémentaires pour nous assurer que la solution obtenue sera celle souhaitée.

Soient $\tau'_{i_k} \in [0,1] \setminus \{t'_{i_k}\}$ et $\tau_{i_{k+1}} \in [0,1] \setminus \{t_{i_{k+1}}\}$. Nous définissons les vecteurs

$$u'_{i_k} = \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, \tau'_{i_k}) - \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k})$$

$$u_{i_{k+1}} = \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, \tau_{i_{k+1}}) - \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, \tau_{i_{k+1}})$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ soit incluse dans le demi-plan fermé gauche déterminé par la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est $\det(v_{i_k,i_{k+1}}, u'_{i_k}) > 0$. De même, une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ soit incluse dans le demi-plan fermé gauche déterminé par la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est $\det(v_{i_k,i_{k+1}}, u_{i_{k+1}}) > 0$.

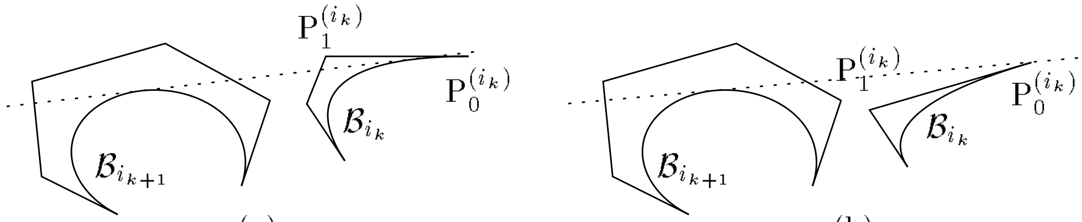
Ainsi, le système d'équations Σ_{i_k} sera

$$(\Sigma_{i_k}) \quad \begin{cases} t'_{i_k}, t_{i_{k+1}} \in [0,1] \\ \det(A'_{i_k}) = 0 \\ \det(A_{i_{k+1}}) = 0 \\ \det(v_{i_k,i_{k+1}}, u'_{i_k}) > 0 \\ \det(v_{i_k,i_{k+1}}, u_{i_{k+1}}) > 0 \end{cases}$$

Évidemment, ce système peut être développé, en remplaçant les vecteurs v_α et u_β avec leurs expressions respectives, et en écrivant aussi B_{i_k}, B'_{i_k}, $\mathrm{B}_{i_{k+1}}$ et $\mathrm{B}'_{i_{k+1}}$ en fonction des points de contrôle des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ et des paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$. Comme nous ne nous proposons pas de discuter la résolution de ce système, nous ne donnons pas sa forme finale. Nous pouvons quand même remarquer que le degré maximal des équations le composant est $\max\{m_{i_k}(m_{i_{k+1}}-1), (m_{i_k}-1)m_{i_{k+1}}, m_{i_k}^2, m_{i_{k+1}}^2\}$.

Cas 3. $j_{i_k} + \ell_{i_k} = 0$, $j_{i_{k+1}} \neq 0$

Dans cette situation, nous pouvons distinguer deux sous-cas, comme présenté dans la figure II.12.



(a) (b)

Figure II.12

Il est facile à voir que le deux cas sont différenciés par la position de la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ par rapport à la droite $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$: si $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ est contenue dans le demi-plan gauche ouvert délimité par $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$, alors la droite d'appui commune de $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ “touchera” $\mathcal{B}_{i_k}$ dans un point qui n'est pas $\mathrm{P}_0^{(i_k)}$, et sinon cette droite d'appui commune passera par $\mathrm{P}_0^{(i_k)}$. La question à poser pour départager les deux cas est donc : la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ a-t-elle des points sur ou à droite de $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$? Répondre à cette question revient à décider si l'inéquation

$$\det\big(\mathrm{P}_1^{(i_k)} - \mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{B}_{i_{k+1}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t) - \mathrm{P}_0^{(i_k)}\big) \leq 0$$

a au moins une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

Si la réponse à cette question est non, nous serons dans le cas de la figure II.12(a) et le système Σ_{i_k} sera celui présenté pour le cas 2.

Si la réponse est oui, nous sommes dans le cas de la figure II.12(b) et le paramètre t'_{i_k} sera connu et égal à 0. Le système Σ_{i_k} aura alors une seule inconnue et il sera

$$(\Sigma_{i_k}) \begin{cases} t_{i_{k+1}} \in [0,1] \\ \det\big(\mathrm{R}_{i_{k+1}} - \mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{B}'_{i_{k+1}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})}\,;\, t_{i_{k+1}})\big) = 0 \\ \det\big(\mathrm{R}_{i_{k+1}} - \mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{R} - \mathrm{P}_0^{(i_k)}\big) > 0 \end{cases},$$

où $\mathrm{R}_{i_{k+1}} = \mathrm{B}_{i_{k+1}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})}\,;\, t_{i_{k+1}})$, $\mathrm{R} = \mathrm{B}_{i_{k+1}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})}\,;\, \tau_{i_{k+1}})$, $\tau_{i_{k+1}}$ étant un paramètre compris entre 0 et 1 et différent de $t_{i_{k+1}}$.

Cas 4. $j_{i_k} + \ell_{i_k} \neq 0$, $j_{i_{k+1}} = 0$

Ce cas est symétrique avec le cas 3, cette fois nous devons nous poser le problème de la position de la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ par rapport à la droite $\mathrm{P}_{m_{i_{k+1}-1}-1}^{(i_{k+1}-1)}\mathrm{P}_{m_{i_{k+1}-1}}^{(i_{k+1}-1)}$ et la discussion à faire est tout à fait similaire à la précédente.

Annexe

Définition II.10. – *Soit* $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ *un polygone simple. Pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *nous définissons* $\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$ *comme étant celui des deux demi-plans ouverts déterminés par* $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ *qui satisfait*

$$\forall \mathrm{P} \in \left]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}\right[\ \exists \varepsilon_{\mathrm{P}} > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{P}} \ \mathrm{B}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}) \subset reg(\mathcal{P}) \tag{II.4}$$

et

$$\mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}) = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})}$$

Définition II.11. – *Soit* $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ *un polygone simple. Alors*

(II.11.i) P_i *est un sommet concave si et seulement si* $\mathrm{P}_{i+1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)$

(II.11.ii) P_i *est un sommet convexe si et seulement si* $\mathrm{P}_{i+1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)}$

Remarques

1. $\mathrm{P}_{i+1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i) \iff \mathrm{P}_{i-1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$
2. $\mathrm{P}_{i+1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)} \iff \mathrm{P}_{i-1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})}$

En utilisant ces définitions, nous démontrons le lemme II.8.

Preuve du lemme II.8 – Nous commençons cette démonstration par montrer que $\mathcal{P}$ est simple, car pour la preuve de la convexité nous utiliserons la notion de sommet concave, qui n'a pas de sens si $\mathcal{P}$ n'est pas simple.

Considérons le polygone $\mathcal{P}' = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}\ldots\mathrm{P}_0^{(n)}$ (figure II.13). Évidemment, $\mathcal{P}'$ est un polygone simple et convexe. En plus, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ nous avons

$$\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)},\mathcal{B}_i) = \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{P}'))$$

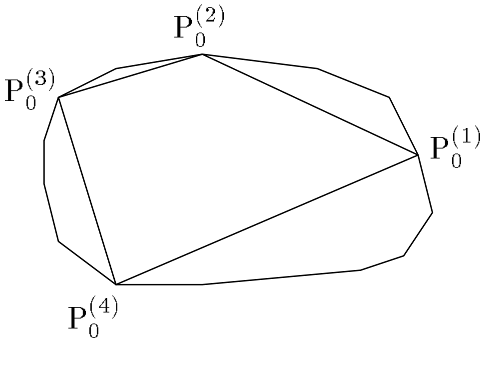


Figure II.13

Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas simple. Alors il existe $1 \leq i < j \leq n$ et $k_i \in \{0,1,\ldots,m_i-1\}$, $k_j \in \{0,1,\ldots,m_j-1\}$ tels que $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$ et, en plus, si $j = i+1$ alors si $k_i = m_i - 1$ et $k_j = 0$ nous devons avoir $\mathrm{card}([\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}]) = +\infty$. $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ étant des polygones convexes, il résulte

$$\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)},\mathcal{B}_i)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)},\mathcal{B}_j)}$$

Alors

$$[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)},\mathcal{B}_i)} \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)},\mathcal{B}_j)}$$

Nous pouvons supposer, sans réduire la généralité, que $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \subset [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}$. Nous savons que $\mathcal{P}'$ est convexe et alors nous aurons les points suivants ordonnés dans cet ordre sur la droite $\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}$ (figure II.14) :

$$\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_0^{(i+1)}, \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i+2)}, \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(i+2)}\mathrm{P}_0^{(i+3)}, \ldots, \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)}$$

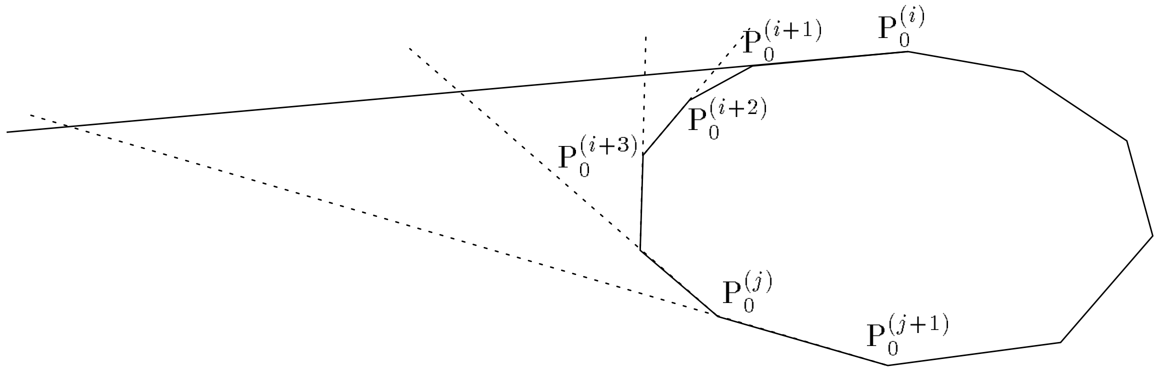


Figure II.14

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}, reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)\big)} \\ &\quad \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_{i+1},]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}[)\big)} \end{aligned}$$

Nous traitons séparément les deux cas suivants :

Cas 1. $j = i + 1$

Les points $\mathrm{P}_0^{(i+1)}$, $\mathrm{P}_1^{(i+1)}$ et $\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ sont alors colinéaires et $\mathrm{P}_1^{(i+1)} \in]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$. Mais $\mathcal{B}$ est convexe, nous aurons donc

$$\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[) = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir $\mathrm{P}_1^{(i+1)} \in \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)$, car, conformément aux propriétés des courbes de Bézier, cela impliquerait

$$\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big) \cap reg(\mathcal{B}_i + 1,]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i+1}^{(i+1)}[) \neq \emptyset$$

(figure II.15(a)), d'où la contradiction.

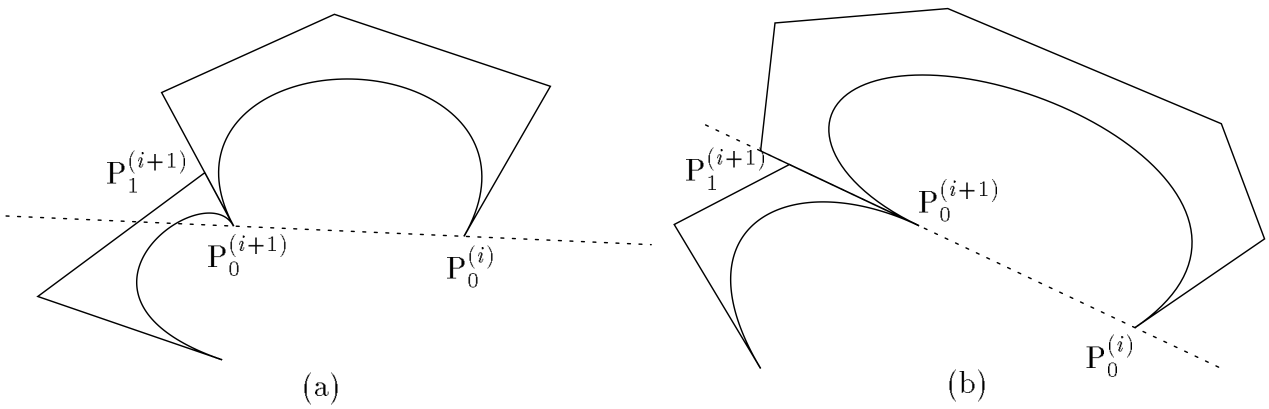


Figure II.15

D'un autre côté,

$$]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)}$$

et ainsi nous pouvons déduire que $\mathrm{P}_1^{(i+1)}, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \in \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}$ (figure II.15(b)). Dans ce cas, aucune droite passant par $\mathrm{P}_0^{(i+1)}$ ne peut séparer les régions $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_{i+1},]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}[)$, à part $\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}$. Nous en déduisons que tous les sommets de $\mathcal{P}_{i+1}$ sont colinéaires et donc que $\mathcal{B}_{i+1}$ est un segment. $\mathcal{B}$ étant convexe, la droite $\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}$, qui est la droite support de $\mathcal{B}_{i+1}$, doit laisser la polycourbe dans un seul des deux demi-plans qu'elle détermine. Nous aurons ainsi

$$\mathcal{B} \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big) = \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big),$$

relation qui donne évidemment une contradiction avec la convexité de $\mathcal{B}$. Il en résulte que l'hypothèse $\mathrm{P}_1^{(i+1)} \in]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ est fausse. Le raisonnement fait est valable seulement si la courbe $\mathcal{B}_i$ n'est pas un segment, mais si ses points de contrôle sont colinéaires alors un raisonnement similaire nous mène toujours à une contradiction.

Cas 2 $j > i+1$

Nous pouvons distinguer deux sous-cas :

2.a $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} = \{\mathrm{P}_0^{(i+1)}\}$

Comme $\mathcal{B} \setminus \{\mathcal{B}_j\}$ doit être incluse dans un des deux demi-plans fermés déterminés par $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)}$, nous pouvons voir tout de suite que les courbes $\mathcal{B}_{i+1}$, $\mathcal{B}_{i+2}$, …, $\mathcal{B}_{j-1}$ sont des segments colinéaires. En appliquant le même raisonnement à $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i+1}$, nous obtenons que la courbe $\mathcal{B}_j$ doit elle aussi être un segment, inclus lui aussi dans la droite support des tous les autres, $\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(j+1)}$. Les points $\mathrm{P}_0^{(i+1)}$, $\mathrm{P}_0^{(i+2)}$, …, $\mathrm{P}_0^{(j)}$ étant tous distincts, nous aurons

$$\mathcal{P}_j \subset [\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)}] \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, \mathrm{P}_0^{(i+2)}\big) = \mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)$$

Mais le polygone $\mathcal{P}_i$ est inclus dans $\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)}$, en raison de sa convexité, donc $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$, d'où la contradiction.

2.b $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)} \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \subset \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)} \setminus [\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i)}$

Dans ce cas, nous avons la relation

$$\begin{aligned}&\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j+1)}, reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)\big)}\\ \subset&\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big)\end{aligned}$$

Nous déduisons donc

$$\mathcal{P}_i \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big) \neq \emptyset$$

D'un autre côté, $\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_0^{(i)}\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\big)}$ et nous avons aussi $\mathrm{P}_0^{(i)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big)$. Pour que

$$\mathcal{P}_i \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big) \neq \emptyset,$$

la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(i1)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ doit être incluse dans ce demi-plan (figure II.16).

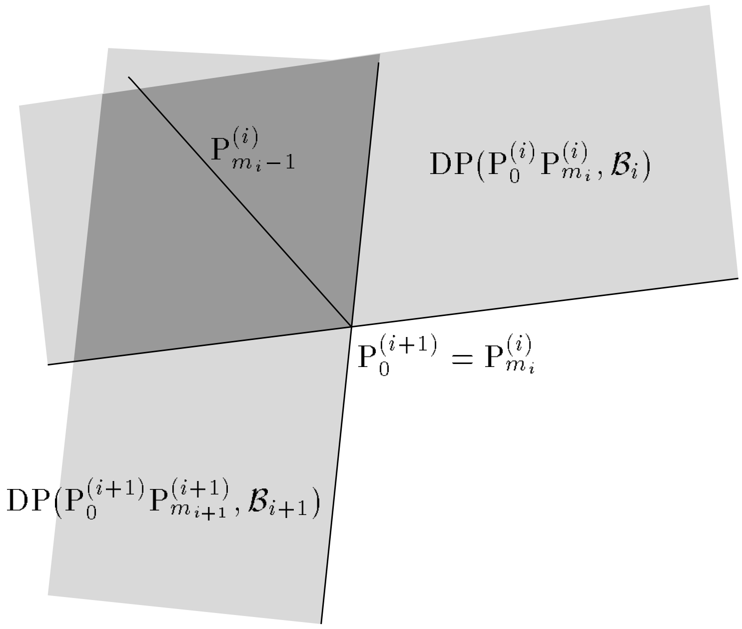


Figure II.16

Suite aux propriétés des courbes de Bézier, nous aurons alors

$$\mathcal{B}_i \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+2)}_0, reg\big(\mathcal{B}_i + 1,]\,\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_i+1}\,[\big)\big) \neq \emptyset,$$

d'où la contradiction avec la convexité de la polycourbe $\mathcal{B}$.

Ainsi, l'hypothèse $\mathcal{P}$ non-simple nous a menés, dans tous les cas, à une contradiction, elle est donc fausse. Prouvons maintenant que $\mathcal{P}$ est aussi un polygone convexe.

Si nous supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas convexe, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $k_i \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$ tels que $\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}$ soit un sommet concave de $\mathcal{P}$. Si $\kappa_i \neq 0$, alors tous les sommets $\mathrm{P}^{(i)}_k$, $k \in \{1, \ldots, m_i - 1\}$, doivent être des sommets concaves de $\mathcal{P}$, car le polygone $\overline{\mathcal{P}_i}$ est convexe. Nous obtenons alors une contradiction avec la convexité de $\mathcal{B}$, car nous aurons

$$reg\big(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[\big) \subset reg\big(\overline{\mathcal{P}_i}\big) \subset reg(\mathcal{P}')$$

Donc forcément $k_i = 0$. Conformément à la définition, $\mathrm{P}^{(i)}_1 \in \mathrm{DP}_{ext}\big(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0\big)$. Nous aurons alors

$$\mathcal{B}_i \cap \mathrm{DP}_{ext}\big(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0\big) \neq \emptyset$$

Mais $\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0$ est tangente à $\mathcal{B}_{i-1}$ en $\mathrm{P}^{(i)}_0$ et donc, $\mathcal{B}$ étant convexe, est une droite d'appui de $\mathcal{B}$, d'où la contradiction avec la relation écrite ci-dessus, car évidemment

$$\mathcal{B}_{i-1} \subset \overline{reg\big(\mathcal{P}_{i-1}\big)} \subset \overline{\mathrm{DP}_{int}\big(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0\big)}.$$

Le polygone $\mathcal{P}$ est ainsi simple et convexe et la preuve du lemme est achevée. $\square$

Chapitre III

Algorithmes de calcul de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier

III.1. Introduction

Les résultats du chapitre précédent nous permettent d'affirmer que la suite des enveloppes convexes des polygones de contrôle successifs, obtenus par subdivision de de Casteljau, d'une polycourbe de Bézier converge, aussi bien au sens de la distance de Hausdorff qu'au sens topologique, et que la limite de cette suite est l'enveloppe convexe de la polycourbe de Bézier elle-même. Ces résultats nous permettent d'affirmer que des algorithmes calculant l'enveloppe convexe (topologique ou approchée) d'une polycourbe en utilisant la subdivision de de Casteljau convergent. Par contre, si dans le cas de l'enveloppe convexe approchée le test d'arrêt de l'algorithme est assez naturel, dans celui de la structure topologique de l'enveloppe convexe d'une polycourbe nous sommes loin d'avoir établi des critères d'arrêt. En effet, le théorème II.9 nous fournit un critère de pertinence topologique inutilisable algorithmiquement, car la valeur ε_0 définie dans sa preuve n'est pas calculable uniquement à partir du polygone de contrôle de la polycourbe. Nous devrons ainsi concevoir des conditions suffisantes pour la pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe qui en plus doivent être facilement implémentables.

Nous commençons ce chapitre par la présentation de quelques types de données et algorithmes de base, dans la section III.3. Dans la section suivante, nous donnons quelques résultats, certains permettant de réduire les coûts de l'algorithme de calcul d'une approximation de l'enveloppe convexe d'une polycourbe et d'autres justifiant notre algorithme, et ensuite nous présentons cet algorithme en faisant aussi une discussion sur sa complexité. La cinquième section est consacrée au calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe d'une polycourbe et a la même composition que la quatrième (la précédente). La sixième section présente quelques considérations sur le calcul d'un polygone de contrôle fournissant en même temps une approximation de l'enveloppe convexe de sa polycourbe et la structure topologique de celle-ci, et les deux dernières sections contiennent des résultats numériques obtenus par l'implémentation des algorithmes présentés précédemment et respectivement quelques exemples.

III.2. Concentré de chapitre (III)

Dans ce chapitre, vous trouverez la méthode par laquelle, pour une polycourbe de Bézier donnée, peut être calculée une approximation, au sens de la distance de Hausdorff, de son enveloppe convexe, ou un polygone de contrôle fournissant la structure topologique de cette enveloppe convexe, ou même un polygone de contrôle qui en même temps fournit la structure topologique et une approximation de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Je préviens le lecteur que l'implémentation de tous les algorithmes a été faite en C++, et par conséquent j'en ai plus ou moins emprunté le jargon pour décrire les structures de données et pour donner les schémas des algorithmes.

Ce chapitre est bien "touffu", et il est très possible qu'une lecture (presqu') intégrale vous parraîsse moins fatigante que des suivre les conseils de lecture "écourtée" - j'ai du mal moi-même à me suivre. En plus, dans les descriptions d'algorithme le chapitre a un peu la structure d'un fichier source C++, les procédures appelées par plusieurs programmes se trouvent au début, le plus facile étant alors de "sauter" la sous-section III.3.2 et d'y revenir à chaque fois qu'une procédure y étant décrite est utilisée.

Premier niveau. La section III.3 peut être complétement ignorée, mises à part les quelques premières phrases de chacun des paragraphes de la sous-section III.3.2, qui présentent brièvement les procédures qui seront appelées aussi bien dans le calcul d'une approximation de l'enveloppe convexe que dans celui de la structure topologique. Dans la sous-section III.4.1, les preuves des résultats n'ont pas à être lues, comme d'habitude, mais suivez bien les énoncés et les explications intercalées. Dans la sous-section III.4.2, le paragraphe III.4.2.1 est de moindre importance, sa première phrase expliquant ce que la procédure incriminée fait. Elle, avec les quelques autres de la section III.3, devrait vous permettre de suivre le fonctionnement de l'algorithme `Enveloppe_convexe_approchée`, paragraphe III.4.2.2. La sous-section III.4.3 est très importante pour comprendre les opérations executées par l'algorithme, et c'est une discussion utile pour la section III.5, où nous étudions la structure topologique de l'enveloppe convexe et où cette analyse ne sera plus faite. L'évaluation de coût se trouvant en fin de sous-section ne peut pas être suivie à ce niveau de lecture, mais la complexité totale est indiquée. Pour la section III.5, le procédé de lecture est identique : la section III.5.1 doit être lue en entier, mises à part les démonstrations (la notion, extrêmement importante, de dégénérescence, et celle apparentée de dégénérescence à ε-près sont introduites ici, paragraphes III.5.1.3 et III.5.1.4 - ne les ratez surtout pas) ; dans la sous-section III.5.2, lisez III.5.2.2 et le résultat obtenu en fin de III.5.2.6, plus III.5.2.7. Les sections III.6 à III.8 sont à lire intégralement.
Deuxième niveau. Mises à part les preuves (surtout celles de la sous-section III.5.1, qui sont pour la plupart des études de cas assez techniques), tout est à lire.

Avant de commencer, rappelons quelques conventions et notations couramment utilisées. Nous allons étudier, dans tous les cas, uniquement des polycourbes sans tangence intérieure, sans en faire la précision à chaque fois. En plus, nous considérerons toujours que le polygone de contrôle de la polycourbe est pseudo-simple. $\mathcal{B}$ désignera toujours une polycourbe de Bézier de polygone de contrôle $\mathcal{P}$. On notera $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ l'enveloppe convexe du polygone de contrôle $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} = \delta(\mathcal{E}(\mathcal{P}))$ le polygone frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, et $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ l'enveloppe convexe de la polycourbe et $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\mathcal{B}))$ la courbe frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, le polygone $\mathcal{Q}$ s'écrit

$$\mathcal{Q} = \mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}}\mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+1}\ldots\mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+\ell_{i_1}}\mathrm{P}^{(i_2)}_{j_{i_2}}\ldots\mathrm{P}^{(i_p)}_{j_{i_p}+\ell_{i_p}},$$

avec $p \leq n$, $i_1, i_2, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ et $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

III.3. Structures de données et algorithmes généraux

Dans cette section, nous présentons les structures de données et les algorithmes que nous allons utiliser aussi bien pour le calcul d'une enveloppe convexe approchée pour une polycourbe donnée que pour calculer la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe. L'implémentation de ces algorithmes ayant été faite en C++, le vocabulaire que nous utiliserons est emprunté à ce langage. Nous précisons aussi que tous les tableaux sont indexés à partir de 0, allant ainsi jusqu'à $n-1$, si n est le nombre d'éléments du tableau.

III.3.1. *Structures de données*

La classe de base que nous avons créée est le `méta_polygone`, classe paramètrée par le

type des membres de son champ `éléments`, et presque toutes les autres classes que nous présentons ici sont ses héritières. Cette classe a deux champs :
- `taille` : le nombre de membres du `méta_polygone` ;
- `éléments` : un tableau contenant les `taille` composantes du `méta_polygone`.

Cette classe est une généralisation (par paramétrisation par type) du modèle classique codant un polygone. Si $\mathcal{M}$ est un `méta-polygone`, $\mathcal{M}$`.éléments` désignera le tableau de ses composantes et pour un indice `i`$\in \{0, \ldots, \texttt{taille}-1\}$ $\mathcal{M}$`.éléments(i)` sera son `i`-ème composante. Pour simplifier, nous utiliserons $\mathcal{M}$`[i]` pour designer $\mathcal{M}$`.éléments(i)`.

La classe `polygone` code uniquement les polygones pour lesquels un intérieur peut être défini de manière cohérente (il n'y a pas que les polygones simples qui satisfont cette propriété) ; `polygone` n'est en fait qu'un autre nom donné à `méta_polygone<point>`, où le type `point` est une paire de réels représentant les coordonnées d'un point. Les sommets d'un polygone donnés dans le tableau de `points` du champ `éléments` sont ordonnés trigonométriquement.

La `courbe_de_Bézier` est une classe qui hérite la classe `polygone`, mais pour laquelle nous définissons en plus les champs suivants :
- `degré` : le degré de la courbe Bézier ;
- `rang` : l'indice que la courbe de Bézier de laquelle la courbe courante provient avait dans la structure initiale de la polycourbe ;
- `profondeur` : le nombre de subdivisions appliquées à la courbe $\mathcal{B}_{\text{rang}}$ de la composition initiale de la polycourbe pour obtenir la courbe courante ;
- `intervalle` : une paire de réels définissant l'intervalle de paramètres auquel la courbe courante correspond par rapport à $\mathcal{B}_{\text{rang}}$.

Le B-polygone d'une `courbe_de_Bézier` sera bien sur donné par le champ `éléments` que celle-ci hérite du `polygone`.
Les champs de la `courbe_de_Bézier` sont liés par certaines relations. Par exemple, `éléments` contient `degré`+1 =`taille` points et en considérant `intervalle`= (a, b) a et b seront de la forme

$$a = k/2^{\text{profondeur}} \qquad b = (k+1)/2^{\text{profondeur}}$$

où $0 \leq k \leq 2^{\text{profondeur}} - 1$.

La classe codant une polycourbe de Bézier, nommée `polycourbe`, n'est pas une héritière de `méta_polygone`, mais une liste doublement chaînée de `courbes_de_Bézier` dans laquelle les courbes de la composition de la polycourbe sont ordonnées en sens trigonométrique. Ce choix est motivé par la nature des opérations les plus fréquemment effectuées sur une `polycourbe`, qui sont la recherche d'un de ses éléments et l'insertion de nouveaux éléments (suite aux subdivisions). Ainsi, la recherche s'effectue dans tous les cas “pas à pas”, c'est-à-dire que nous ne cherchons pas directement la i-ème courbe de Bézier de la polycourbe, mais la (les quelques) courbe(s) suivant - ou précédant - la courbe courante, donc la recherche se fait en temps constant aussi bien dans un tableau que dans la liste doublement chaînée. Par contre, l'insertion d'un nouveau élément se fait toujours en temps constant dans la liste doublement chaînée, mais en $\mathcal{O}(n-i)$ dans un tableau, où n est la taille du tableau et i la position où le nouvel élément est introduit.

La dernière classe que nous introduisons ici est la `liste_courbes`, le nom que nous utiliserons pour `méta_polygone<courbe_impliquée>`, chaque `courbe_impliquée` ayant deux champs :

- `ident_courbe` : un pointeur à la courbe de Bézier courante dans la structure de la polycourbe;
- `état_courbe` : un caractère, qui sera "n" si il existe des sommets de $\mathcal{Q}$ qui ne sont pas des sommets du polygone associé à `*ident_courbe` et au moins une des conditions suivantes est satisfaite, et "y" dans le cas contraire :
  - tous les sommets du polygone associé à `*ident_courbe` sont des sommets de $\mathcal{Q}$;
  - les polygones `*ident_courbe` et $\mathcal{Q}$ n'ont pas de sommet commun autre que les extrémités de `*ident_courbe`.

Nous verrons dans la sous-section III.4.1 que les courbes de Bézier pour lesquelles `courbe_-impliquée.état_courbe` est "n" n'ont pas à être subdivisées dans le processus de construction de l'enveloppe convexe (approchée ou topologique) de la polycourbe.

III.3.2. *Algorithmes*

Nous donnons ici quelques algorithmes qui ne sont pas spécifiques au type d'enveloppe convexe que nous voulons calculer, étant ainsi nécessaires dans les deux sections suivantes de ce chapitre : l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe d'un polygone pseudo-simple, l'algorithme qui construit, en utilisant le précédent, l'enveloppe convexe du polygone de contrôle d'une polycourbe et finalement l'algorithme de subdivision d'une courbe de Bézier vue comme une arête d'une polycourbe. À la fin de chacun des paragraphes nous évaluons les coûts des algorithmes présentés.

III.3.2.1. L'enveloppe convexe d'un polygone pseudo-simple

La procédure que nous présentons ici, appelée `enveloppe_convexe_polygone`, est une variante de l'algorithme de Graham et Yao de calcul de l'enveloppe convexe d'un polygone simple [Gra83] qui est conçue pour fonctionner sur des polygones pseudo-simples et en plus rend en résultat un polygone avec le maximum de sommets possible.

Plus exactement, quand trois (ou plusieurs) sommets d'un polygone $\mathcal{P}$ sont colinéaires, bien ordonnés et se situent tous les trois sur la frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$, tous les trois seront des sommets de $\mathcal{Q}$, le polygone frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$. Une telle situation est présentée dans la figure III.1(a). La figure III.1(b) nous présente le cas de trois sommets qui sont colinéaires, mais ne sont pas correctement ordonnés et ne peuvent pas tous être des sommets de $\mathcal{Q}$. Nous avons vu dans la sous-section II.4.3 pourquoi il est nécessaire de construire un polygone $\mathcal{Q}$ maximal du point de vue du nombre de sommets.

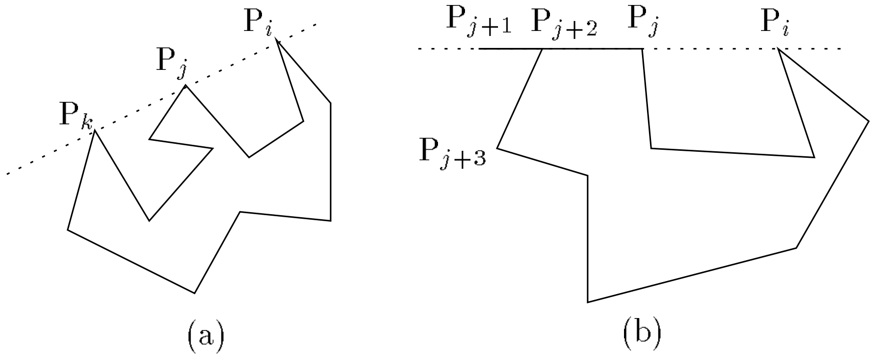


Figure III.1 (a) P_i, P_j, P_k *sont sommets de* $\mathcal{Q}$; (b) P_{j+2} *n'est pas sommet de* $\mathcal{Q}$

Nous supposons que l'abscisse du sommet $\mathcal{P}(0)$, le premier sommet de $\mathcal{P}$, est minimale dans l'ensemble des abscisses des sommets de $\mathcal{P}$. Avant tout appel de cette procédure par un autre algorithme nous nous assurerons que cette condition est satisfaite. Sans trop entrer dans les détails (démonstration de correction ou de convergence), nous présentons la structure de la procédure `enveloppe_convexe_polygone` :

```
1.   Enveloppe_convexe_polygone(polygone $\mathcal{P}$, ensemble_entiers K)
2.   entier n= nombre de sommets de $\mathcal{P}$
3.   entier i
4.   begin
5.   ajouter 0 à K
6.   pour i allant de 1 à n-1
7.        begin
8.        si K a un seul élément
9.             ajouter i à K
10.       sinon
11.            begin
12.            tant que K a au moins deux éléments et
                         $\mathcal{P}(i) \notin DP_{gauche}(\mathcal{P}(K_{avant-dernier}), \mathcal{P}(K_{dernier}))$ et
                         $\mathcal{P}(K_{dernier}) \notin ]\mathcal{P}(i), \mathcal{P}(K_{avant-dernier})[$
13.                 éliminer dernier de K
14.            ajouter i à K
15.            i = i + 1
16.            si      i est inférieur ou égal à n-1 et
                       $\mathcal{P}(i) \in DP_{gauche}(\mathcal{P}(K_{avant-dernier}), \mathcal{P}(K_{dernier}))$ et
                       $\mathcal{P}(i) \in DP_{droit}(\mathcal{P}(K_{dernier} - 1), \mathcal{P}(K_{dernier}))$
17.                 tant que i ne dépasse pas n-1 et
                           $\mathcal{P}(i) \in DP_{gauche}(\mathcal{P}(K_{avant-dernier}), \mathcal{P}(K_{dernier}))$
18.                      i = i + 1
19.            si i est inférieur ou égal à n-1)
20.                 aller à la ligne 12
21.            end
22.       end
23.  tant que $\mathcal{P}(0) \notin DP_{gauche}(\mathcal{P}(K_{avant-dernier}), \mathcal{P}(K_{dernier}))$ et
              $\mathcal{P}(K_{dernier}) \notin ]\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(K_{avant-dernier})[$
24.       éliminer dernier de K
25.  end
```

La troisième condition de la ligne 12 (qui est la même que la deuxième condition de la ligne 23, mais pour d'autres indices des sommets concernés) est celle qui confère à l'algorithme les propriétés annoncées. Le polygone $\mathcal{Q}$ est identifié par l'ensemble `K` des indices que les sommets respectifs de $\mathcal{Q}$ ont dans l'écriture du polygone $\mathcal{P}$. Il est très facile de voir que cet algorithme est linéaire en le nombre de sommets du polygone pour lequel nous voulons calculer l'enveloppe convexe.

III.3.2.2. L'enveloppe convexe du polygone de contrôle

En utilisant la procédure présentée dans le paragraphe précédent, cet algorithme calcule, pour une polycourbe codée en un objet de type `polycourbe`, l'enveloppe convexe du polygone de contrôle. Ce qui nous intéressera dans les sections suivantes ne sera en fait pas le polygone $\mathcal{Q}$. Ce polygone nous sert uniquement pour identifier les courbes de Bézier qui doivent être subdivisées, et donc la procédure suivante aura comme résultat une `liste_courbes`. Le schéma de l'algorithme est le suivant :

1. `Enveloppe_convexe_polygone_contrôle`(`polycourbe` $\mathcal{B}$, `liste_courbes` $\mathcal{L}$)
2. `polygone` $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$
3. `ensemble_entiers I, K`
4. `entier minim`
5. `begin`
6. `polygone_de_contrôle`($\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$)
7. `abscisse_minimale`($\mathcal{P}$, `minim`)
8. `renumérotage_polygone`($\mathcal{P}$, `minim`, $\mathcal{P}_1$)
9. `enveloppe_convexe_polygone`($\mathcal{P}_1$, `K`)
10. `renumérotage`(`K`, `minim`, `I`)
11. `identification_courbes`(`I`, $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}$)
12. `end`

La procédure `polygone_de_contrôle`, de la ligne 6, construit le polygone de contrôle d'une polycourbe donnée, en concatenant les B-polygones donnés par le champ `éléments` de chacune des `courbes_de_Bézier` de la `polycourbe`. La concatenation est faite tel que les sommets extrémités des courbes de Bézier n'apparaîssent pas deux fois dans le tableau `polygone.éléments`. La complexité de cet algorithme est $\mathcal{O}(M)$, où $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est le nombre de sommets du polygone de contrôle de la polycourbe, il y a $\mathcal{O}(1)$ opérations à exécuter pour chaque sommet de $\mathcal{P}$.

La procédure `abscisse_minimale` retourne, pour un polygone donné, l'indice que le sommet d'abscisse minimale a dans la liste de sommets du polygone. Si plusieurs sommets ont la même abscisse, qui est l'abscisse minimale des tous les sommets du polygone, alors la procédure retourne le plus petit des indices des ces sommets. Cet algorithme aussi est linéaire en M, c'est l'algorithme classique de calcul du plus petit élément d'un vecteur.

La procédure `renumérotage_polygone` construit, à partir du polygone $\mathcal{P}$ et de l'entier `minim` (qui est l'indice d'un des sommets de $\mathcal{P}$), le polygone $\mathcal{P}_1$ qui a les mêmes sommets que $\mathcal{P}$, mais avec une rotation des indices telle que le sommet qui avait l'indice `minim` dans le polygone $\mathcal{P}$ ait l'indice 0 dans le polygone $\mathcal{P}_1$. La complexité de la procédure est toujours $\mathcal{O}(M)$, chacun des sommets est manipulé une seule fois.

La procédure `renumérotage` recupère, à partir de l'ensemble `K` et de l'entier `minim`, l'ensemble `I` des indices des sommets de $\mathcal{P}$ qui sont des sommets de $\mathcal{Q}$ (rappellons que l'ensemble `K` contient les indices des sommets du polygone $\mathcal{P}_1$ qui sont des sommets de $\mathcal{Q}$, il faut donc retrouver la correspondance entre les sommets de $\mathcal{P}_1$ et ceux de $\mathcal{P}$). L'ensemble `I` sera ensuite ordonné, la sortie de cette procédure étant ainsi une suite strictement croissante d'indices de sommets du polygone $\mathcal{P}$. La complexité de cette procédure est $\mathcal{O}(\text{cardinal}(\texttt{K}))$, et nous aurons toujours $\text{cardinal}(\texttt{K}) \leq M$.

Enfin, la dernière procédure de `enveloppe_convexe_polygone_contrôle`, `identification_courbes`, construit, à partir de l'ensemble d'entiers `I` et de $\mathcal{B}$, la `liste_courbes` $\mathcal{L}$ qui indique les courbes de Bézier de la composition de la polycourbe qui sont susceptibles de devoir être subdivisées. Cette construction se fait comme la définition de la classe `liste_courbes` l'indique : toute courbe de Bézier dont au moins un point de contrôle est un sommet de $\mathcal{Q}$ apparaîtra dans $\mathcal{L}$, et à chacune de ces courbes un caractère, “n” ou “y”, sera associé comme décrit dans la sous-section III.2.1. Cette procédure est linéaire en le nombre d'éléments de l'ensemble `I`, qui est inférieur ou égal à M.

Nous pouvons maintenant voir que la complexité de la procédure `enveloppe_convexe_polygone_contrôle` est $\mathcal{O}(M)$, car chacune des procédures qu'elle appelle, `enveloppe_convexe_polygone` comprise, a cette complexité.

III.3.2.3. La subdivision d'une courbe de Bézier

Nous allons présenter dans ce paragraphe une procédure un peu plus complexe que ne le serait une calculant uniquement les deux `courbes_de_Bézier` obtenues par la subdivision d'une `courbe_de_Bézier` donnée. La raison est que nous n'aurons jamais besoin de subdiviser une courbe de Bézier isolée. Nous aurons besoin de calculer, pour une polycourbe $\mathcal{B}$ ayant une structure courante $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$, la structure obtenue après la subdivision de certaines des courbes de Bézier de sa composition. Les courbes à subdiviser seront identifiées par un tableau de pointeurs.

Le schéma de la procédure `subdivision` est extrêmement simple :

```
Subdivision(polycourbe $\mathcal{B}$, tableau_pointeurs J)
courbe_de_Bézier $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$
entier k, i
begin
k = nombre d'éléments de J
pour i allant de 0 à k-1
     begin
     subdiviser(*J(i), $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$)
     remplacer *J(i) par $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$
     introduire $\mathcal{B}''$ dans $\mathcal{B}$ juste après $\mathcal{B}'$
     end
end
```

Cette procédure modifie la structure de la `polycourbe` $\mathcal{B}$, en subdivisant toutes les courbes de Bézier identifiées par le `tableau_pointeurs J` et en remplaçant chacune des courbes à subdiviser par les deux courbes obtenues après subdivision. Elle fait appel à une seule autre procédure, `subdiviser`. Cette procédure prend comme paramètre une `courbe_de_Bézier` $\mathcal{B}$ et retourne deux `courbe_de_Bézier` $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$, dont les champs ont les valeurs suivantes :

- $\mathcal{B}'$.`taille` $=$ $\mathcal{B}''$.`taille` $=$ $\mathcal{B}$.`taille` ;
- $\mathcal{B}'$.`degré` $=$ $\mathcal{B}''$.`degré` $=$ $\mathcal{B}$.`degré` ;
- $\mathcal{B}'$.`rang` $=$ $\mathcal{B}''$.`rang` $=$ $\mathcal{B}$.`rang` ;
- $\mathcal{B}'$.`profondeur` $=$ $\mathcal{B}'$.`profondeur` $=$ $\mathcal{B}$.`profondeur` $+ 1$;
- si $\mathcal{B}$.`interval` est donné par la paire de réels (a, b), alors $\mathcal{B}'$.`interval` sera donné par $(a, (a+b)/2)$ et $\mathcal{B}''$.`interval` sera donné par $((a+b)/2, b)$;
- si $\mathcal{B}$.`éléments` $= \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$, alors $\mathcal{B}'$.`éléments` $= \mathrm{P}'_0\mathrm{P}'_1 \ldots \mathrm{P}'_m$ et $\mathcal{B}''$.`éléments` $=$

$P''_0 P''_1 \dots P''_m$, où

$$P'_i = \frac{1}{2^i}\sum_{k=0}^{i} C_i^k P_k \qquad P''_i = \frac{1}{2^{n-i}}\sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k P_{i+k} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

Pour calculer la complexité de cette procédure, il faut étudier le coût du calcul des sommets des polygones de contrôle des deux courbes de Bézier obtenues après subdivision, car il est évident que le calcul des autres champs des `courbes_de_Bézier` $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ se fait en $\mathcal{O}(1)$. Si nous supposons que les valeurs des combinaisons C_i^k sont connues pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, où m est le degré de la courbe de Bézier à subdiviser, et pour tout $k \in \{0, \dots, i\}$, alors le calcul des points P'_i et P''_i, pour $i \in \{0, \dots, m\}$, se fait en $\mathcal{O}(m(m+1)/2)$, ou plus grossièrement en $\mathcal{O}(m^2)$. Si elles ne sont pas connues, les calculer coûte aussi $\mathcal{O}(m(m+1)/2)$ et si l'algorithme ne les stocke pas et les recalcule à chaque fois, le coût total de l'algorithme devient $\mathcal{O}(m^4)$. D'un autre côté, le stockage de toutes ces valeurs prendra, dans la mémoire, $\mathcal{O}(m(m+1)/2)$ entiers. Nous pouvons donc adapter la façon de calculer les points P'_i et P''_i, pour $i \in \{0, \dots, m\}$, aux caractéristiques de l'ordinateur sur lequel nous voulons implémenter l'algorithme. En plus, le coût du calcul des combinaisons peut être réduit de manière significative en utilisant des formules de récurrence. Nous allons donc considerer que la complexité de cette procédure est $\mathcal{O}(m^2)$. Mais si pour le calcul des points de contrôle des courbes $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ nous n'utilisons pas les formules ci-dessus, mais le tableau de la subdivision de de Casteljau (sous-section I.7.3), le coût sera $\mathcal{O}(m^2)$ sans que de l'espace mémoire supplémentaire dûsse être aloué. C'est cette dernière solution que nous avons adoptée.

Pour évaluer le coût de la procédure `subdivision`, nous devons regarder les coût des opérations effectuées aux lignes 9 et 10 et il est facile à voir, que le choix des structures de données que nous avons fait rend les deux instructions exécutables en temps constant à chaque itération du cycle des lignes 6-11. Par conséquent, le coût global de l'exécution de ces deux lignes, sommé pour toutes les itérations du cycle, est $\mathcal{O}(\mathrm{card}(\mathtt{J}))$, donc dans le cas le pire $\mathcal{O}(n)$.

La complexité totale de l'algorithme sera (dans le cas le pire), en sommant les coûts des opérations effectuées, $\mathcal{O}(nd^2)$, où $d = \max_{i=1}^{n} m_i$.

III.4. L'enveloppe convexe approchée

Dans cette section, nous présentons un algorithme calculant une approximation à ε-près (au sens de la distance de Hausdorff) de l'enveloppe convexe d'une polycourbe donnée, pour un ε donné lui aussi par l'utilisateur. Nous commençons par énoncer et prouver les résultats qui justifient notre algorithme, ensuite nous décrivons cet algorithme et dans la dernière sous-section nous évaluons sa complexité.

III.4.1. *Résultats théoriques*

Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe et $\varepsilon > 0$. Supposons que l'on veut calculer une approximation de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ avec une erreur inférieure à ε, au sens de la distance de Hausdorff. Nous allons avoir besoin de connaître , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la distance de Hausdorff entre $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{P}_i$, $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)$. Comme la distance de Hausdorff entre une courbe de Bézier et son polygone de contrôle n'est pas calculable algorithmiquement, nous allons utiliser la majoration donnée par le lemme suivant.

Lemme III.1. – *Soit $\mathcal{B}_0$ une courbe de Bézier complètement convexe de polygone de contrôle $\mathcal{P}_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$. Alors*
$$\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_0, \mathcal{P}_0) \leq \delta^{\mathrm{H}}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m], \mathcal{P}_0)$$

Preuve – Pour démontrer cette inégalité, nous allons utiliser pour la distance de Hausdorff la formule (I.4) et prouver les inclusions
$$\mathcal{B}_0 \subset \mathrm{B}(\mathcal{P}_0, R) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_0 \subset \mathrm{B}(\mathcal{B}_0, R),$$
où $R = \delta^{\mathrm{H}}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m], \mathcal{P}_0)$. Nous ferons, pour les deux inclusions, une preuve par l'absurde.

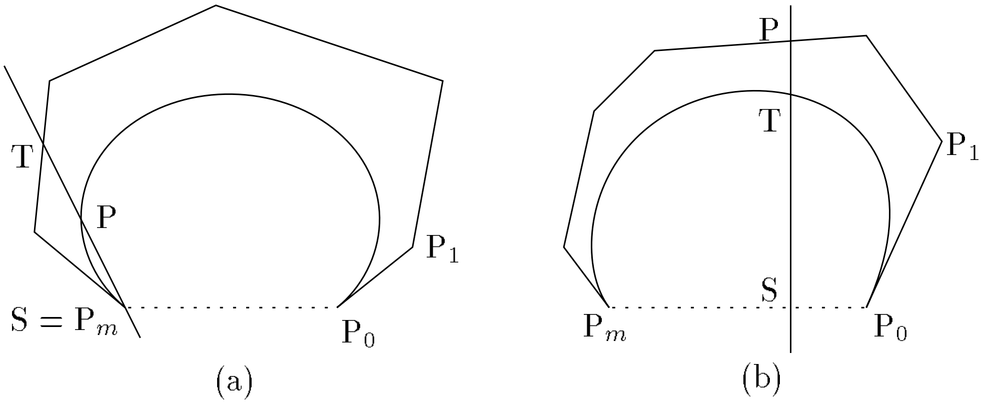


Figure III.2

Supposons que $\mathcal{B}_0 \not\subset \mathrm{B}(\mathcal{P}_0, R)$ et soit $\mathrm{P} \in \mathcal{B}_0$ tel que $\mathrm{P} \notin \mathrm{B}(\mathcal{P}_0, R)$. Évidemment, le point P ne peut pas être P_0 ou P_m. Nous notons S un point de $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ qui satisfait $\mathrm{d}(\mathrm{P}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{S})$ et soit $\mathrm{T} = \mathrm{PS} \cap \big(\mathcal{P}_0 \setminus \{\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_m\}\big)$ (figure III.2(a)). La courbe de Bézier étant complètement convexe, il est évident que le point T est unique et $\mathrm{P} \in]\mathrm{TS}[$. Il est alors facile à voir que $\mathrm{d}(\mathrm{T}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) = \mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S})$; en effet, si nous supposons qu'il existe $\mathrm{S}' \in [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ tel que $\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S}') < \mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S})$, soit $\mathrm{P}' \in [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ satisfaisant $\mathrm{PP}' \parallel \mathrm{TS}'$ (figure III.3).

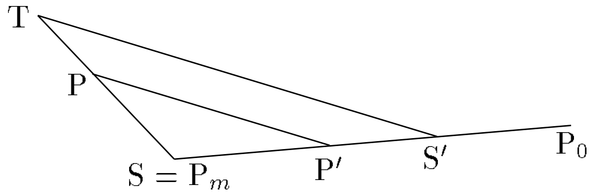


Figure III.3

Alors les triangles PP′S et TS′S sont semblables et nous avons
$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S}')}{\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S})}{\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{S})}, \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')}{\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{S})} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S}')}{\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S})} < 1$$
d'où une contradiction avec le choix du point S (ceci est un cas particulier du résultat de [McM71] p31).

Mais le point T doit appartenir à $\mathrm{B}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m], R)$, de par la définition de R, et comme S est le point de $[\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ le plus près de lui, nous obtenons $\mathrm{d}(\mathrm{T}, \mathrm{S}) \leq R$ et par conséquent

$d(P, T) \le R$. Nous avons ainsi trouvé un point $T \in \mathcal{P}_0$ tel que $P \in B(T, R)$, d'où la contradiction avec l'hypothèse $P \notin B(\mathcal{P}_0, R)$.

Pour démontrer la deuxième inclusion, supposons qu'il existe un point $P \in \mathcal{P}_0$ tel que $P \notin B(\mathcal{B}_0, R)$. Remarquons cette fois aussi que $P \notin \{P_0, P_m\}$ et soit $S \in [P_0 P_m]$ tel que $d(P, [P_0 P_m]) = d(P, S)$. Nous notons $T = PS \cap \big(\mathcal{B}_0 \setminus \{P_0, P_m\}\big)$ (figure III.2(b)) et évidemment $T \in]PS[$. De la même manière, nous avons $d(P, S) \le R$ et donc $d(P, T) \le R$, contradiction avec l'hypothèse $P \notin B(\mathcal{B}_0, R)$. □

La méthode "bête et méchante" de calcul de l'approximation voulue serait de subdiviser toutes les courbes $\mathcal{B}_i$ de la composition de la polycourbe jusqu'au moment où $\delta^{H}([P_0^{(i)} P_{m_i}^{(i)}], \mathcal{P}_i) < \varepsilon$ et ensuite construire l'enveloppe convexe du polygone de contrôle obtenu. Cette méthode est justifiée par les lemmes II.1 et II.3, qui impliquent que l'enveloppe convexe ainsi obtenue est une approximation à ε-près de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Bien sur, cet algorithme est loin d'être optimal et nous cherchons des critères pour réduire le nombre de courbes de Bézier à subdiviser. Le lemme suivant nous fournit un tel critère.

Lemme III.2. – *Soit $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ tel que le polygone frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, $\mathcal{Q}$, s'écrive sous la forme de* (II.2) *et soient*

$$\mathcal{I}_1 = \big\{ i \in \mathcal{I} \mid \ell_1 = 0 \text{ et } P_{j_i}^{(i)} \in \{P_0^{(i)}, P_{m_i}^{(i)}\} \big\}$$
$$\mathcal{I}_2 = \big\{ i \in \mathcal{I} \mid \ell_1 = 1 \text{ et } P_{j_i}^{(i)} = P_0^{(i)}, P_{j_i+\ell_i}^{(i)} = P_{m_i}^{(i)} \big\}$$

Nous posons $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$ et alors

$$\delta^{H}\big(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \mathcal{E}(\mathcal{P})\big) \le \max_{i \in \mathcal{I}_0} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)$$

Preuve – Pour démontrer l'inégalité de l'énoncé, nous devons prouver les deux inclusions suivantes :

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset B\big(\mathcal{E}(\mathcal{P}), \max_{i \in \mathcal{I}_0} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)\big) \qquad \mathcal{E}(\mathcal{P}) \subset B\big(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \max_{i \in \mathcal{I}_0} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)\big)$$

Mais nous savons $\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{P})$, donc la première inclusion est vérifiée et il nous reste à prouver que la deuxième l'est aussi. Dans ce but, nous remarquons que l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ est égale à l'enveloppe convexe des sommets du polygone $\mathcal{Q}$, nous pouvons ainsi écrire $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{A})$, où

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_0} \mathcal{P}_i \cup \big\{P_0^{(i)} \mid i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2\big\} \cup \big\{P_{m_i}^{(i)} \mid i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2\big\},$$

car $P_{j_{i_k}}^{(i_k)}, P_{j_{i_k}+1}^{(i_k)}, \dots, P_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}^{(i_k)} \in \mathcal{A}$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

Il est facile à voir que la boule de centre un ensemble convexe est un ensemble convexe, et ainsi il nous reste à prouver

$$\mathcal{A} \subset B\big(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \max_{i \in \mathcal{I}_0} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)\big),$$

car $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ est convexe, donc $B\big(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \max_{i \in \mathcal{I}_0} \delta^{H}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)\big)$ est convexe et alors l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ sera incluse dans cette boule.

Les points $P_0^{(i)}$ et $P_{m_i}^{(i)}$ sont des points de $\mathcal{B}$ pour tout $i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. D'un autre côté, si nous considérons $i \in \mathcal{I}_0$ et $P \in \mathcal{P}_i$, alors

$$d(P, \mathcal{E}(\mathcal{B})) \le d(P, \mathcal{B}) \le d(P, \mathcal{B}_i) \le \delta^{H}(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i)$$

et donc nous aurons

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}_0} \mathcal{P}_i \subset \mathrm{B}\big(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \max_{i\in\mathcal{I}_0} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)\big)$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est inclus dans la boule centrée en $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ et de rayon $\max\limits_{i\in\mathcal{I}_0} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)$ et la preuve du lemme est finie. $\square$

Ce lemme nous permet de subdiviser uniquement les courbes $\mathcal{B}_i$ avec $i \in \mathcal{I}_0$, donc celles dont le polygone de contrôle participe à la frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ avec des sommets autres que les extrémités $\mathrm{P}_0^{(i)}$ et $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$. Mais même parmi les courbes décrites ici il existe certaines qui ne doivent pas être subdivisées, un autre lemme justifiant leur élimination de la liste de courbes à subdiviser.

Lemme III.3. – *Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que tous les sommets de $\mathcal{P}_i$ soient des sommets de $\mathcal{Q}$ et supposons que $\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j \not\subset reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i) \cup \mathcal{P}_i$. Alors $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\mathcal{B}))$.*

Preuve – Si la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$ est un segment, l'affirmation de l'énoncé est évidemment vraie, car nous aurons $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{Q}$ et comme $\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{P})$ il en résulte tout de suite $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}$. Supposons donc que $\mathcal{B}_i$ n'est pas un segment et soit

$$\mathcal{R}_i = \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_1^{(i)},\mathcal{B}_i\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)},\mathcal{B}_i\big) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m_i-2} \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_k^{(i)}\mathrm{P}_{k+1}^{(i)},\mathcal{B}_i\big)\right)$$

Cette région est convexe, étant une intersection de demi-plans, non-vide, car le polygone $\mathcal{P}_i$ est convexe, et elle peut être bornée ou non, comme nous pouvons le voire figure III.4.

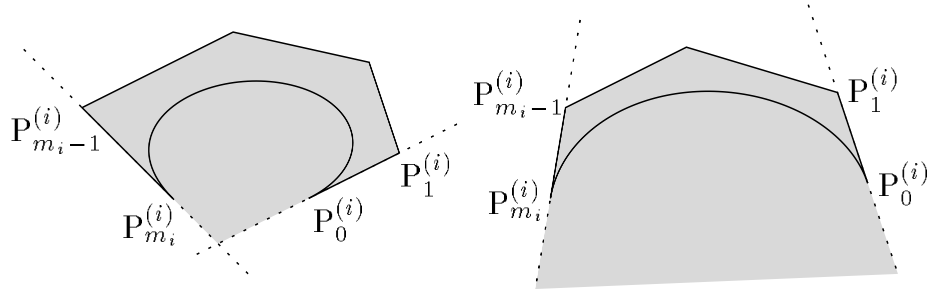


Figure III.4

L'hypothèse du lemme implique $\mathcal{E}(\mathcal{P}) \subset \overline{\mathcal{R}}_i$, donc $\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset \overline{\mathcal{R}}_i$ et donc $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{R}}_i$. La polycourbe étant une courbe simple, nous en déduisons

$$\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i \subset \overline{reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)}\setminus\mathcal{B}_i \quad \text{ou} \quad \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i \subset \overline{\mathcal{R}}_i\setminus\overline{reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)}$$

La première de ces deux inclusions est exclue par hypothèse. Par conséquent, nous aurons $\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_i \subset \overline{\mathcal{R}}_i\setminus\overline{reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)}$ et nous en déduisons tout de suite l'inclusion

$$\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{R}}_i \setminus \big(reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{B}_i\big)$$

En notant $\Delta_{\mathcal{B}_i}(t)$ la droite tangente à $\mathcal{B}_i$ en $\mathrm{P}_t = \mathrm{B}_{m_i}\big(\mathrm{P}_0^{(i)},\dots,\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\,;\,t\big)$, une conséquence directe des propriétés des courbes de Bézier et de la convexité de $\mathcal{B}_i$ sera l'égalité

$$\overline{\mathcal{R}}_i \setminus \big(reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{P}_i\big) = \bigcap_{t\in[0,1]} \overline{\mathrm{DP}\big(\Delta_{\mathcal{B}_i}(t),\mathcal{B}_i\big)}$$

et le fait que cet ensemble est convexe. Comme la polycourbe $\mathcal{B}$ est incluse dans cet ensemble, son enveloppe convexe le sera aussi. Mais la courbe $\mathcal{B}_i$ est complètement incluse dans la frontière de $\overline{\mathcal{R}}_i \setminus \big(reg(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{P}_i\big)$ et donc nous aurons $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}$. $\square$

La conséquence de ce résultat est que, après avoir une fois subdivisé toutes les courbes de Bézier de la composition de la polycourbe identifiées par le lemme III.2, nous pouvons ne plus subdiviser celles d'entre elles dont le polygone de contrôle a tous les sommets sur la frontière $\mathcal{Q}$ de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle de la polycourbe. En effet, une démonstration très semblable à celle du lemme III.2 nous permet de prouver que, si on considère $\mathcal{AE}$ la courbe obtenue à partir du polygone $\mathcal{Q}$ en remplaçant le polygone $\mathcal{P}_i$, à chaque fois que tous ses sommets sont des sommets de $\mathcal{Q}$, par la courbe de Bézier correspondante $\mathcal{B}_i$ et on note $\mathcal{R}$ la région bornée par $\mathcal{AE}$, alors

$$\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{E}(\mathcal{B}), \mathcal{R}) \leq \max_{i \in \widetilde{\mathcal{I}}_0} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i),$$

où

$$\widetilde{\mathcal{I}}_0 = \left\{ i \in \mathcal{I}_0 \mid \exists k \in \{0, \ldots, m_i\} \text{ tel que } \mathrm{P}_k^{(i)} \text{ n'est pas un sommet de } \mathcal{Q} \right\} \tag{III.1}$$

.

La condition indispensable pour prouver le lemme est

$$\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i \cap \overline{reg(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)} \setminus \mathcal{B}_i = \emptyset$$

et nous cherchons une condition nécessaire pour que les deux ensembles ci-dessus soient disjoints. Comme nous supposons que le polygone de contrôle de la polycourbe est pseudo-simple, la seule configuration possible dans la quelle cette condition n'est pas satisfaite est présentée dans la figure III.5, où $\mathcal{B}_{i-1}$ et $\mathcal{B}_{i+1}$ sont des segments.

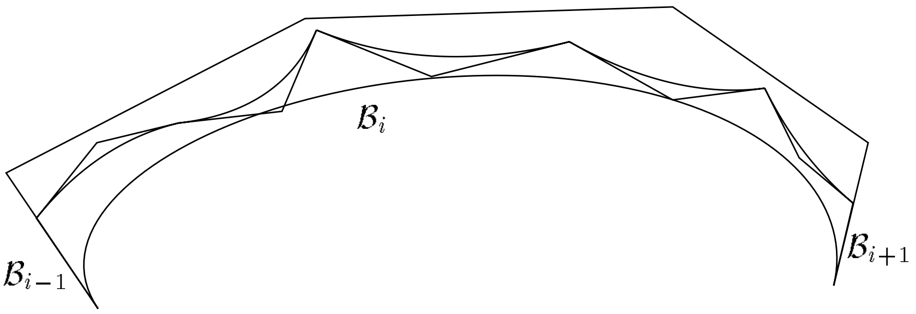


Figure III.5

Nous avons vu dans le paragraphe III.2.2.1 comment fonctionne la procédure que nous utiliserons pour calculer l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$. Ainsi, nous saurons que pour la polycourbe de la figure III.5 le polygone $\mathcal{Q}$ est égale au polygone $\mathcal{P}_i$ et, plus généralement, $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_i$ si et seulement si le polygone $\mathcal{P}$ est contenu dans la zone fermée délimitée par le polygone $\mathcal{P}_i$ sans le segment $]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[$, $\overline{reg(\mathcal{P}_i)} \setminus]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[$. Donc la condition à imposer à un polygone de contrôle $\mathcal{P}_i$ dont les sommets sont tous des sommets de $\mathcal{Q}$ pour que la courbe de Bézier correspondante ne soit pas subdivisée sera simplement que le polygone $\mathcal{Q}$ ait d'autres sommets que ceux de $\mathcal{P}_i$. Si cette condition n'est pas satisfaite, nous devons subdiviser la courbe $\mathcal{B}_i$, pour trancher entre la situation de la figure III.5 et celle de la figure III.6.

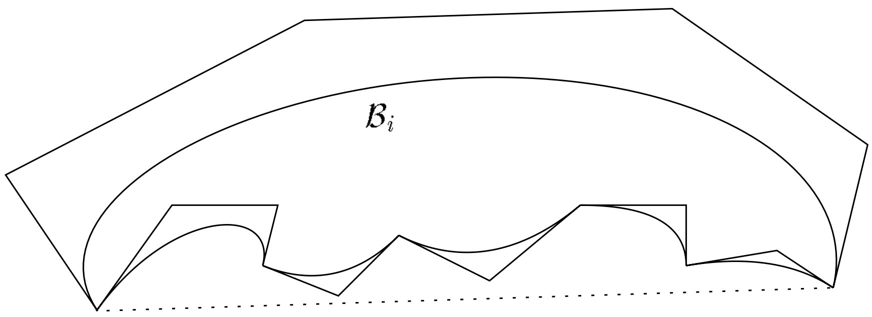


Figure III.6

III.4.2. *Présentation de l'algorithme*

Pour commencer cette sous-section, remarquons qu'en fait nous ne construisons pas une approximation polygonale à ε-près de l'enveloppe convexe d'une polycourbe, mais un objet qui approche cette enveloppe convexe à ε-près et a l'inconvénient de ne pas être un polygone et l'avantage d'avoir une construction beaucoup moins coûteuse qu'un polygone satisfaisant cette propriété. En effet, à chaque fois qu'une courbe de Bézier correspond aux conditions du lemme III.3, nous arrêtons de la subdiviser, même si la distance de Hausdorff entre elle et son B-polygone est supérieure à la valeur ε donnée, et au moment de l'écriture des résultats de l'algorithme nous remplaçons tout simplement le B-polygone par la courbe. Ceci fait que dans le cas d'une polycourbe convexe, par exemple, aucune subdivision ne sera nécessaire et l'algorithme nous rendra comme frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe la polycourbe elle-même. Dans le cas général (d'une polycourbe non-convexe), le résultat de l'algorithme sera une liste d'objets qui forment, en ordre trigonométrique, la frontière de l'approximation de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Ces objets peuvent être soit des segments, soit des `courbes_de_Bézier`. Les segments pouvant eux aussi être écrits comme des `courbes_de_Bézier`, le résultat sera en fait une `polycourbe`.

Voici quelle est la structure de l'algorithme que nous proposons pour le calcul d'une approximation à ε près, pour un ε donné, de l'enveloppe convexe d'une polycourbe :

```
Enveloppe_convexe_approchée(polycourbe ℬ, réel ε, polycourbe 𝒜ℰ)
tableau_pointeurs I
liste_courbes ℒ
begin
lecture_données(ℬ,ε)
enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,ℒ)
dist_inf_eps(ℬ,ℒ,ε,I)
tant que I≠ ∅
     begin
     subdivision(ℬ,I)
     enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,ℒ)
     dist_inf_eps(ℬ,ℒ,ε,I)
     end
écriture_resultats(ℬ,𝒜ℰ)
end
```

La seule procédure appelée par ce programme qui n'a pas encore été présentée est `dist_inf_eps` (lignes 7, 12). Nous la détaillons donc avant de commenter l'algorithme `Enveloppe_convexe_approchée`.

III.4.2.1. La procédure `dist_inf_eps`

Cette procédure prend comme paramètre la `polycourbe` $\mathcal{B}$, la `liste_courbes` $\mathcal{L}$ calculée par la procédure `enveloppe_convexe_polygone_contrôle` et le `réel` ε et retourne le `tableau_pointeurs J` qui identifie les courbes de Bézier de la composition de la polycourbe qui doivent être subdivisées. Une courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$ de la structure de la polycourbe doit être subdivisée si, premièrement, elle se retrouve dans $\mathcal{L}$ avec le caractère associé "y" (voir le paragraphe III.3.2.2 pour précisions), et deuxièmement, nous ne pouvons pas affirmer que la distance de Hausdorff entre elle et son B-polygone, $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i)$, est inférieure à ε. Voilà maintenant le schéma de cet algorithme :

1. `Dist_inf_eps(polycourbe` $\mathcal{B}$, `liste_courbes` $\mathcal{L}$, `réel` ε, `tableau_pointeurs I)`
2. `entiers k, i`
3. `begin`
4. `k = nombre d'éléments de` $\mathcal{L}$
5. `pour i allant de 0 à k-1`
6.   `si` $\mathcal{L}$`[i].état_courbe = "y"` *et* $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{\mathrm{j}}, [\mathrm{P}_0^{(\mathrm{j})}\mathrm{P}_{m_{\mathrm{j}}}^{(\mathrm{j})}]) \geq \varepsilon$
7.   `ajouter` $\mathcal{L}$`[i].ident_courbe à I`
8. `end`

La deuxième condition du test de la ligne 6 est celle donnée par le lemme III.1. Mais, en utilisant les notations du lemme, il est facile à voir que

$$\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_0, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) = \max_{i\in\{0,\ldots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$$

En effet, nous avons

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) \leq \max\{\mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]), \mathrm{d}(\mathrm{P}_{i+1}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])\} \qquad \forall \mathrm{P} \in [\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}]$$

et nous obtenons tout de suite $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_0, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) \leq \max_{i\in\{0,\ldots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$. Pour l'inégalité inverse, si nous supposons $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_0, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]) < \max_{i\in\{0,\ldots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ nous déduisons immédiatement que le (ou les) sommet qui réalise(nt) $\max_{i\in\{0,\ldots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ ne peu(ven)t pas appartenir à $\mathrm{B}([\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m], \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_0, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$, d'où une contradiction. L'égalité ci-dessus est donc vérifiée. Notre algorithme va alors tester, pour toutes les courbes identifiées par la `liste_courbes` $\mathcal{L}$ comme étant "subdivisables", donc celle pour lesquelles le champ `état_courbe` est égal à "y", si le maximum des distances des sommets du polygone de contrôle au segment $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m$ joignant les extrémités de la courbe est inférieur à ε, et si ce n'est pas le cas un pointeur à la courbe est ajouté à la liste `I`. La complexité de ce test est linéaire en le nombre de sommets du B-polygone à tester.

Pour trouver la complexité du cycle des lignes 5-7, il faut sommer pour `i` allant de 0 à `k-1` les complexités des pas. En notant ℓ_i le nombre de sommets du B-polygone donné par *($\mathcal{L}$`[i].ident_courbe`), le pas `i` est linéaire en ℓ_i, car le premier teste de la condition `si` et l'instruction à exécuter si les deux testes de cette condition sont satisfaits sont de complexité $\mathcal{O}(1)$ et le deuxième teste de la condition `si` est de complexité $\mathcal{O}(\ell_i)$. La complexité du cycle sera alors $\sum_{i=0}^{\mathrm{k}-1} \ell_i$, somme qui est inférieure ou égale à $M+n$, où n est le nombre de courbes de Bézier composant la polycourbe (l'égalité est atteinte si toutes les courbes de la composition de la polycourbe sont identifiées par la `liste_courbes` $\mathcal{L}$, car les sommets du polygone $\mathcal{P}$ qui sont des extrémités de courbe de Bézier de la composition de la polycourbe devront être comptés deux fois). La procédure `dist_inf_eps` sera donc linéaire en M.

III.4.2.2. Commentaire de l'algorithme `Enveloppe_convexe_approchée`

Toutes les procédures auxquelles cet algorithme fait appel étant présentées en détail, le fonctionnement du programme est facile à suivre. Le premier pas est le calcul de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle de la polycourbe et l'obtention de la liste $\mathcal{L}$ des courbes de Bézier susceptibles de devoir être subdivisées ; ceci est fait par l'appel de `enveloppe_convexe_polygone_contrôle` de la ligne 6. Ensuite, la procédure `dist_inf_eps` établit lesquelles des courbes de Bézier apparaissant dans la liste $\mathcal{L}$ doivent vraiment être subdivisées, en vérifiant pour chacune si la majoration (donnée par le lemme III.1) de la distance de Hausdorff entre la courbe et son B-polygone est inférieure à ε. Des pointeurs identifiant toutes les courbes de Bézier qui devront être subdivisées se trouveront ainsi dans l'ensemble `I`. Évidemment, si cet ensemble est vide, il n'y a aucune subdivision à faire et nous finissons en écrivant le résultat obtenu. Si `I` est non-vide, les courbes qu'il désignes sont subdivisées et la composition de la polycourbe $\mathcal{B}$ est mise à jour par la procédure `subdivision` ; après, nous recommençons ces mêmes opérations jusqu'à l'obtention d'un ensemble `I` vide. La convergence de cet algorithme est assurée par la convergence du B-polygone vers la courbe de Bézier qui lui est associée par la subdivision de de Casteljau.

III.4.3. *La complexité de l'algorithme* `Enveloppe_convexe_approchée`

Commençons par étudier l'évolution de la taille de la polycourbe (le nombre de courbes de Bézier la composant) au fur à mesure qu'elle passe par les itérations du cycle des lignes 8-13.

Supposons que la polycourbe initiale s'écrit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n_0}\mathcal{B}_i$. En considérant qu'après k itérations la courbe $\mathcal{B}_i$ est décomposée en l'union des courbes de Bézier $\mathcal{B}_i^1, \mathcal{B}_i^2, \ldots, \mathcal{B}_i^{k_0}$, il est évident que si deux des points de contrôle de cette union de courbes sont des sommets de $\mathcal{Q}$, alors tous les points de contrôle qui sont "entre eux" seront des sommets de $\mathcal{Q}$. Autrement dit, si nous notons

$$\widetilde{\mathcal{P}}_i = \bigcup_{j=0}^{k_0} \mathcal{P}_i^j = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i)}\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i)}\ldots\widetilde{\mathrm{P}}_{k_0m_i}^{(i)}$$

alors soit tous les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_i$ sont des sommets de $\mathcal{Q}$, cas auquel il n'y a aucune des courbes $\mathcal{B}_i^1, \ldots, \mathcal{B}_i^{k_0}$ à subdiviser, soit aucun des sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_i$ n'est un sommet de $\mathcal{Q}$, cas auquel il n'y a toujours aucune courbe à subdiviser, soit il existe $\ell_1, \ell_2 \in \{0, 1, \ldots, k_0m_i\}$ tel que $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i)}, \widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i)}, \ldots, \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_1-1}^{(i)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_2+1}^{(i)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_2+2}^{(i)}, \ldots, \widetilde{\mathrm{P}}_{k_0m_i}^{(i)}$ ne soient pas des sommets de $\mathcal{Q}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_1}^{(i)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_1+1}^{(i)}, \ldots, \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_2}^{(i)}$ le soient, où ℓ_1 peut être égal à 0 et ℓ_2 peut être égal à k_0m_i, mais pas les deux en même temps. Cette propriété est due au fait que la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$ est complètement convexe, ce qui impliquera la convexité du polygone $\widetilde{\mathcal{P}}_i$. Alors les seules courbes qui peuvent avoir à être subdivisées sont celles dont les points $\widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_1}^{(i)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{\ell_2}^{(i)}$ sont, respectivement, des points de contrôle, donc il y aura au plus deux courbes à subdiviser (il peut toutefois n'y avoir qu'une seule ou même aucune dans ce cas aussi). Donc pour chacune des courbes de la composition initiale de la polycourbe il y a au plus deux courbes à subdiviser à chaque itération.

En conclusion, à chaque itération il y a au plus $2n_0$ courbes de Bézier à subdiviser, et par conséquent après k itérations la polycourbe sera composée d'au plus $2kn_0$ courbes de Bézier.

Pour calculer la complexité de `Enveloppe_convexe_approchée`, nous devons d'abord trouver une estimation pour le nombre d'itérations nécessaires pour que la procédure `dist_inf_eps` construise un ensemble `I` vide, car c'est celle-là la condition de sortie du cycle `tant que` des lignes 8-13. Ce qui nous intéresse est donc le nombre de subdivisions qui doivent être appliquées à une courbe de Bézier donnée $\mathcal{B}_i$ pour que la deuxième condition du test de la ligne 8 de la procédure `dist_inf_eps` soit satisfaite par les (au plus deux) courbes de Bézier $\mathcal{B}_i^{k_1}$ et $\mathcal{B}_i^{k_2}$ (de la composition de $\mathcal{B}_i$ après subdivision) dont le champ associé dans la `liste_courbes` $\mathcal{L}$ n'a pas la valeur "n". En notant $\mathcal{B}_i(k)$ une des courbes obtenues de $\mathcal{B}_i$ après k subdivisions, nous savons que $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i(k), [\mathrm{P}_0^{(i)}(k)\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}(k)])$ converge vers 0 quand k tend vers l'infini et nous voulons estimer sa vitesse de convergence.

Si $\mathcal{B}_0$ est une courbe de Bézier et $\mathcal{B}_0'$ et $\mathcal{B}_0''$ sont les deux courbes de Bézier obtenues de $\mathcal{B}_0$ par l'application une fois de la subdivision de de Casteljau de rapport 1/2, alors nous avons l'inégalité [Fio87]

$$\max\{\max_{i\in\{0,\dots,m-1\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i', \mathrm{P}_{i+1}'), \max_{i\in\{0,\dots,m-1\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i'', \mathrm{P}_{i+1}'')\} \le \frac{1}{2} \max_{i\in\{0,\dots,m-1\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1})$$

Nous obtenons par récurrence

$$\max_{j\in\{1,\dots,2^k\}} \max_{i\in\{0,\dots,m-1\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i^j, \mathrm{P}_{i+1}^j) \le \frac{1}{2^k} \max_{i\in\{0,\dots,m-1\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

où $\mathrm{P}_0^j\mathrm{P}_1^j\dots\mathrm{P}_m^j$ est le polygone de contrôle de la j-ème courbe de la structure de $\mathcal{B}_0$ après k subdivisions.

Malheureusement, l'inégalité similaire pour les distances des points de contrôle au segment $[\mathrm{P}_0^j\mathrm{P}_m^j]$ n'est pas vérifiée, car nous pouvons prouver par un calcul simple que pour le cas de la figure III.7 nous avons la relation

$$2\mathrm{d}(\mathrm{P}_2', [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_5']) = 2\mathrm{d}(\mathrm{P}_2', \mathrm{P}_0) > \mathrm{d}(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_0) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_3, \mathrm{P}_5) = \max_{0\le i\le 5} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_5])$$

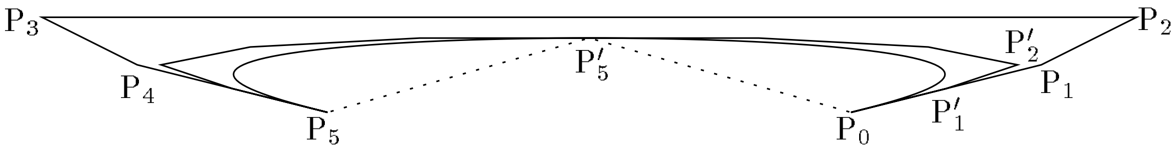


Figure III.7

Par conséquent, nous allons utiliser la majoration

$$\max_{i\in\{0,\dots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i^j, [\mathrm{P}_0^j\mathrm{P}_m^j]) < \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i^j, \mathrm{P}_{i+1}^j),$$

qui est évidemment vérifiée et qui nous permet d'écrire

$$\max_{i\in\{0,\dots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i^j, [\mathrm{P}_0^j\mathrm{P}_m^j]) < \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1})$$

ou encore $\max\limits_{i\in\{0,\ldots,m\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_i^j, [\mathrm{P}_0^j\mathrm{P}_m^j]) < \dfrac{1}{2^k}S$, où S est une constante qui dépend de la courbe de Bézier.

Supposons que la condition qui nous intéresse est satisfaite après k_0 itération. Nous aurons alors la suite d'implications

$$\frac{1}{2^{k_0}}S < \varepsilon \Longrightarrow 2^{k_0} > \frac{S}{\varepsilon} \Longrightarrow k_0 > \log_2 \frac{S}{\varepsilon}$$

ce qui nous donne le nombre d'itérations nécessaires pour que la `condition_arrêt` soit satisfaite comme étant le plus petit entier supérieur à $\log_2(S/\varepsilon)$.

Soit d le maximum des degrés des n_0 courbes de Bézier composant la polycourbe initiale. Son polygone de contrôle a au plus $n_0 d$ sommets. Nous avons vu qu'après k itérations la polycourbe sera composée d'au plus $2kn_0$ courbes de Bézier, pour $k > 0$. Ainsi, le polygone de contrôle de la polycourbe aura, après k itérations, au plus $2n_0dk$ sommets.

Pour calculer la complexité de l'algorithme `enveloppe_convexe_approchée`, il faut sommer les coûts des procédures appelées par cet algorithme. La procédure de la ligne 6 est de complexité $\mathcal{O}(n_0 d)$ et celle de la ligne 7 aussi. Pour calculer le coût du cycle des lignes 8-13, il faut sommer les coûts de la k-ième itération pour k allant de 1 à $\big[\log_2(S/\varepsilon)\big] + 1 = \lceil \log_2(S/\varepsilon) \rceil$, où $\big[x\big]$ désigne la partie entière de x. À la k-ième itération, la procédure de la ligne 10 coûtera $\mathcal{O}(n_0 d^2 k)$, celle de la ligne 11 coutera $\mathcal{O}(n_0 dk)$ et celle de la ligne 12 coutera aussi $\mathcal{O}(n_0 dk)$. Nous obtenons donc la complexité de la k-ième itération du cycle égale à $\mathcal{O}(n_0 d^2 k)$. En sommant, la complexité du cycle entier sera

$$\mathcal{O}\big(n_0 d^2 \lceil \log_2(S/\varepsilon) \rceil (\lceil \log_2(S/\varepsilon) \rceil + 1)\big)$$

ou, plus grossiérement, $\mathcal{O}\big(n_0 d^2 \lceil \log_2(S/\varepsilon) \rceil^2\big)$. Évidemment, le coût de l'algorithme sera, au total, le même, et nous rappelons que S est une constante, qui dépend de la polycourbe.

III.5. L'enveloppe convexe topologique

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure converge topologiquement vers l'enveloppe convexe de la polycourbe si on applique au polygone de contrôle un nombre suffisant de subdivisions. Nous donnerons dans ce paragraphe un algorithme qui calcule pour une polycourbe donnée par son polygone de contrôle initial un polygone de contrôle tel que son enveloppe convexe soit topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe.

La condition de pertinence topologique donnée par la preuve du théorème II.9 est suffisante, mais pas nécessaire, et elle est évidemment inutilisable pour notre algorithme, faisant intervenir des distances qui ne sont pas calculables uniquement à partir du polygone de contrôle de la polycourbe. L'idéal serait bien sûr de trouver une condition nécessaire et suffisante, une telle condition minimisant le nombre de subdivisions à faire, mais la notion de pertinence topologique dont nous avons besoin est par trop heuristique et nous avons seulement trouvé des conditions suffisantes pour notre problème.

III.5.1. *Résultats théoriques*

En utilisant les notations de l'énoncé du lemme III.2, soient $\mathcal{K} = \{1, \ldots, p\}$ et $\mathcal{K}_\alpha = \big\{k \in \mathcal{K} \mid i_k \in \mathcal{I}_\alpha\big\}$ pour $\alpha = 0, 1, 2$. Pour éviter les cas similaires au celui de la figure III.4, nous supposerons card $\mathcal{K} > 1$.

III.5.1.1. Conditions suffisantes pour la pertinence topologique

Proposition III.4. – *Si les trois conditions suivantes sont satisfaites, alors l'enveloppe convexe du polygone de contrôle, $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, est topologiquement pertinente pour l'enveloppe convexe de la polycourbe, $\mathcal{E}(\mathcal{B})$:*

(III.4.i) *si* P *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *tel que* $\mathrm{P} \notin \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}\big)$, *alors* P *est un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ *;*

(III.4.ii) *si* P *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *tel que* $\mathrm{P} \notin \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}\big)$, *alors* P *est un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k+1}}$ *;*

(III.4.iii) *si* $\mathcal{B}_{i_{k-1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$ *et* $\mathcal{B}_{i_{k+1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$, *alors*

$$\{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}}\big),$$

où P *est un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ *et* Q *un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k+1}}$ *tels que le segment* [PQ] *soit une arête du polygone frontière de* $\mathcal{E}\big(\cup_{\alpha\neq k}\mathcal{P}_{i_\alpha}\big)$.

Les deux figures suivantes illustrent les trois conditions données par cette proposition.

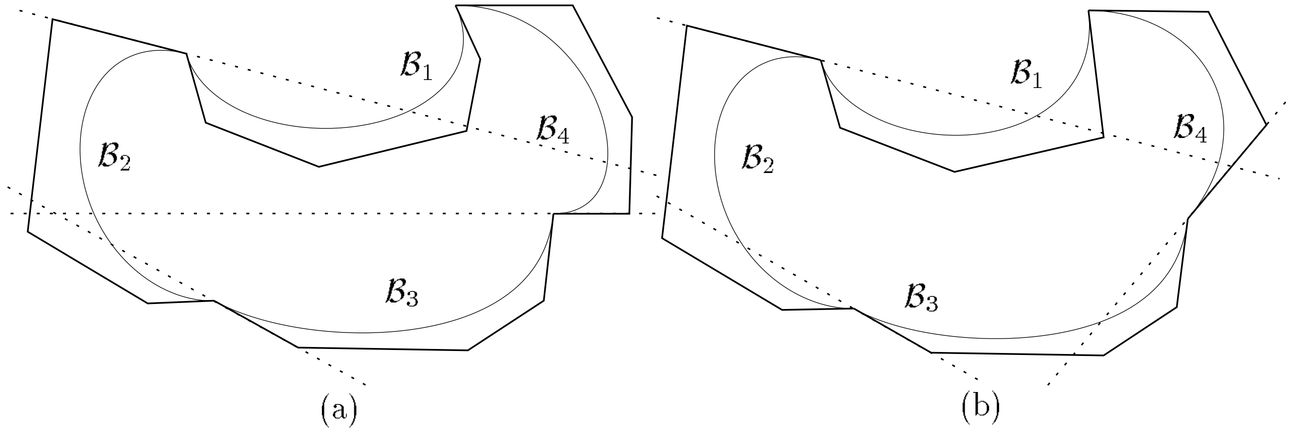


Figure III.8 (a) *les courbes* $\mathcal{B}_2$ *et* $\mathcal{B}_4$ *ne vérifient pas la condition* (III.4.i) *;* (b) *la condition* (III.4.i) *est vérifiée* $\forall k \in \mathcal{K}$. *La propriété* (III.4.ii) *est symétrique avec* (III.4.i).

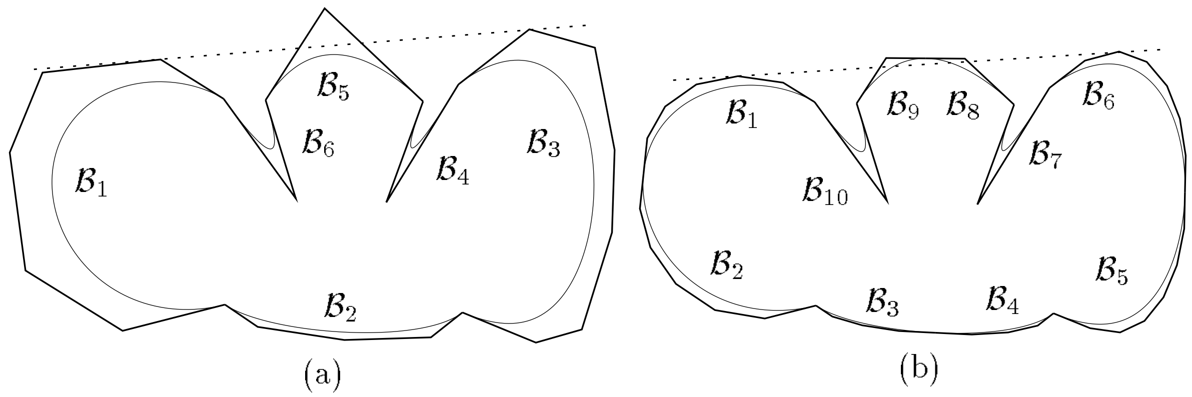


Figure III.9 (a) *la courbe* $\mathcal{B}_5$ *ne satisfait pas la condition* (III.4.iii) *;* (b) *après une itération, les courbes* $\mathcal{B}_8$ *et* $\mathcal{B}_9$ *obtenues par subdivision de la courbe mentionnée avant satisfont toutes les deux cette condition.*

Preuve de la proposition – Nous allons démontrer que si les trois conditions ci-dessus sont satisfaites, alors les deux propriétés de la définition II.6 de la pertinence topologique sont vérifiées par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$. Nous commençons par prouver que (II.6.i) est satisfaite.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Alors il existe $k \in \mathcal{K}$ tel que $i = i_k$. Si $k \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, alors $\mathcal{P}_{i_k} \cap \mathcal{Q} \subset \{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\} \subset \mathcal{B}_{i_k}$ et, comme $\mathcal{E}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{P})$, le fait que $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas disjoints impliquera $\mathcal{B}_{i_k} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

Si $k \in \mathcal{K}_0$, supposons que $\mathcal{B}_{i_{k-1}}.\texttt{rang} = \mathcal{B}_{i_k}.\texttt{rang}$. Le polygone

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k} = \bigcup_{\mathcal{B}_i.\mathrm{rang} = \mathcal{B}_{i_k}.\mathrm{rang}} \mathcal{P}_i$$

étant convexe, nous aurons forcément $i_{k-1} = i_k - 1$, car, comme nous avons déjà vu dans le paragraphe III.4.3, si deux sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ sont des sommets de $\mathcal{Q}$, alors tous les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ situés "entre" les deux seront des sommets de $\mathcal{Q}$. Par conséquent, $\mathrm{P}_0^{(i_k)}$ est un sommet de $\mathcal{Q}$ et nous sommes de nouveau dans la situation $\mathcal{B}_{i_k} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Un raisonnement tout à fait identique nous mène à la même conclusion si nous supposons $\mathcal{B}_{i_{k+1}}.\texttt{rang} = \mathcal{B}_{i_k}.\texttt{rang}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}_{i_{k-1}}.\texttt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\texttt{rang}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}.\texttt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\texttt{rang}$. Nous allons prouver que $\mathcal{B}_{i_k} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ par l'absurde, en supposant $\mathcal{B}_{i_k} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\cup_{i \neq i_k} \mathcal{B}_i)\big)$. Comme $\{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\} \not\subset \mathrm{DP}(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_k})$, avec P et Q définis comme dans la condition (III.4.iii), nous aurons $\{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\} \not\subset \mathcal{E}(\cup_{\alpha \neq k} \mathcal{P}_{i_\alpha})$, donc $\mathcal{B}_{i_k} \not\subset \mathcal{E}(\cup_{\alpha \neq k} \mathcal{P}_{i_\alpha})$. Mais $\mathcal{B}_{i_k} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\cup_{i \neq i_k} \mathcal{B}_i)\big)$, par conséquent il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\mathcal{B}_{i_0} \not\subset \mathcal{E}\Big(\bigcup_{\alpha \neq k} \mathcal{B}_{i_\alpha} \cup \mathcal{B}_{i_k}\Big) = \mathcal{E}\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_\alpha}\Big)$$

D'un autre côté, si nous notons

$$\mathcal{R}_{i_k} = \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}),$$

nous aurons (conformément aux conditions (III.4.i) et (III.4.iii)), $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_{k+1}\}} \mathcal{P}_i \subset \mathcal{R}_{i_k}$ et aussi, évidemment, $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}_{i_k}$.

L'ensemble $\mathcal{R}_{i_k} \setminus \mathcal{B}_{i_k}$ a deux composantes connexes,

$$\mathcal{R}'_{i_k} = \bigcap_{t \in [0,1]} \mathrm{DP}(\Delta_t, \mathcal{B}_{i_k}) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}''_{i_k} = \mathcal{R}_{i_k} \setminus \big(\mathcal{R}'_{i_k} \cup \mathcal{B}_{i_k}\big),$$

où Δ_t est la droite tangente à la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ en le point $\mathrm{B}_{m_{i_k}}\big(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_1^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\,;\, t\big)$.

Nous aurons soit $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}'_{i_k}$, soit $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}''_{i_k}$, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple et donc $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i$, qui est une courbe continue, ne peut pas "traverser" $\mathcal{B}_{i_k}$, la séparation entre les deux régions $\mathcal{R}'_{i_k}$ et $\mathcal{R}''_{i_k}$.

En supposant $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}'_{i_k}$, nous aurons $\mathcal{E}\big(\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i\big) \subset \mathcal{R}'_{i_k}$, car $\mathcal{R}'_{i_k}$ est convexe et, comme $\mathcal{B}_{i_k} \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq k} \mathcal{B}_{i_\alpha}\big)$, nous obtenons tout de suite une contradiction avec l'hypothèse $\mathcal{B}_{i_k} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\cup_{i \neq i_k} \mathcal{B}_i)\big)$. Il nous reste ainsi $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}''_{i_k}$. Cette région est encore séparée en deux parties connexes par la ligne polygonale $\mathcal{P}_{i_k}$, les deux parties étant $reg(\mathcal{P}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k})$ et $\mathcal{R}'''_{i_k} = \mathcal{R}''_{i_k} \setminus \big(reg(\mathcal{P}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}) \cup \mathcal{P}_{i_k}\big)$. Le polygone de contrôle de la polycourbe $\mathcal{P}$ est pseudo-simple et card $\mathcal{K} > 1$, ce qui implique $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{E}(\mathcal{P}_{i_k})$, d'où il résulte $\mathcal{P} \cap reg(\mathcal{P}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}) = \emptyset$. Alors $\cup_{i \notin \{i_{k-1}, i_k, i_{k+1}\}} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}'''_{i_k}$ et comme le polygone $\mathcal{P}$ est une courbe fermée nous obtenons immédiatement

$$\mathcal{P}_{i_k} \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}\} \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\big(\bigcup_{i \neq i_k} \mathcal{P}_{i_k}\big)\Big),$$

ce qui contredit l'hypothèse dans la quelle nous travaillons, $k \in \mathcal{K}_0$.

Ainsi, l'hypothèse $\mathcal{B}_{i_k} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}\big(\cup_{i \neq i_k} \mathcal{B}_i\big)\big)$ nous a menés dans tous les cas à une contradiction, donc elle est fausse et la première propriété de la définition de la pertinence topologique est prouvée.

Pour la deuxième propriété de cette définition, (II.6.ii), nous allons faire aussi une preuve par l'absurde. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq i} \mathcal{P}_\alpha\big)\big)$ et $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq i} \mathcal{B}_\alpha\big)$. La condition $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq i} \mathcal{P}_\alpha\big)\big)$ implique $i \notin \mathcal{I} = \{i_k \mid k \in \mathcal{K}\}$. Des conditions $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq i} \mathcal{B}_\alpha\big)$ et $i \notin \mathcal{I} = \{i_k \mid k \in \mathcal{K}\}$ nous déduisons immédiatement $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big)$. Nous aurons alors soit $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big) = \emptyset$, soit $\mathcal{B}_i \cap \delta\big(\mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big)\big) \neq \emptyset$. Dans les deux cas, il doit exister $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\mathcal{B}_{i_0} \cap \delta\big(\mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big)\big) \neq \emptyset$. Mais $\mathcal{B}$ est une courbe simple, donc il existe $k \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{B}_{i_0} \cap]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\neq \emptyset$, où $\mathrm{R}'_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathrm{R}_{i_{k+1}} \in \mathcal{B}_{i_{k+1}}$ sont deux points tels que la droite $\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}$ soit une tangente commune des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ et que $[\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}] \subset \delta\big(\mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big)\big)$.

En utilisant les notations de la première partie de cette démonstration, les conditions (III.4.i) et (III.4.ii) impliquent $\mathcal{P}_{i_0} \subset \mathcal{R}_{i_k} \cap \mathcal{R}_{i_{k+1}}$ et, suite aux propriétés des courbes de Bézier, $\mathcal{B}_{i_0} \subset \mathcal{R}_{i_k} \cap \mathcal{R}_{i_{k+1}}$. Nous aurons alors $\mathcal{A} =]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \big(\mathcal{R}_{i_k} \cap \mathcal{R}_{i_{k+1}}\big) \neq \emptyset$. Comme $]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \mathcal{B}_{i_k} = \emptyset$ et $]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \mathcal{B}_{i_{k+1}} = \emptyset$, nous serons dans un des quatre cas suivants :

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}'_{i_k} \cap \mathcal{R}'_{i_{k+1}}$	(ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}'_{i_k} \cap \mathcal{R}''_{i_{k+1}}$
(iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}''_{i_k} \cap \mathcal{R}'_{i_{k+1}}$	(iv) $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}''_{i_k} \cap \mathcal{R}''_{i_{k+1}}$

Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}'_{i_k}$, alors $\mathrm{R}'_{i_k} = \mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}}$. En effet, soit $t_0 \in [0, 1]$ tel que

$$\mathrm{R}'_{i_k} = \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}^{(i_k)}_0, \dots, \mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}}; t_0)$$

Si $t_0 \in]0, 1[$, nous aurons évidemment $]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \mathcal{R}'_{i_k} = \emptyset$, car la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ est convexe. Aussi, si $t_0 = 0$, alors en posant la condition $]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \mathcal{R}'_{i_k} \neq \emptyset$ nous imposons un mauvais ordre entre les points R'_{i_k} et $\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ sur la frontière de $\mathcal{E}\big(\cup_{k \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_{i_k}\big)$. Il reste donc $t_0 = 1$, avec la remarque que la droite $\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}$ ne doit pas être tangente à la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ en $\mathrm{P}_{m_{i_k}}$ pour avoir $]\mathrm{R}'_{i_k} \mathrm{R}_{i_{k+1}}[\cap \mathcal{R}'_{i_k} \neq \emptyset$.

De la même manière, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}'_{i_{k+1}}$, alors $\mathrm{R}_{i_{k+1}} = \mathrm{P}^{(i_{k+1})}_0$. Les cas (i) à (iv) sont présentés figure III.10.

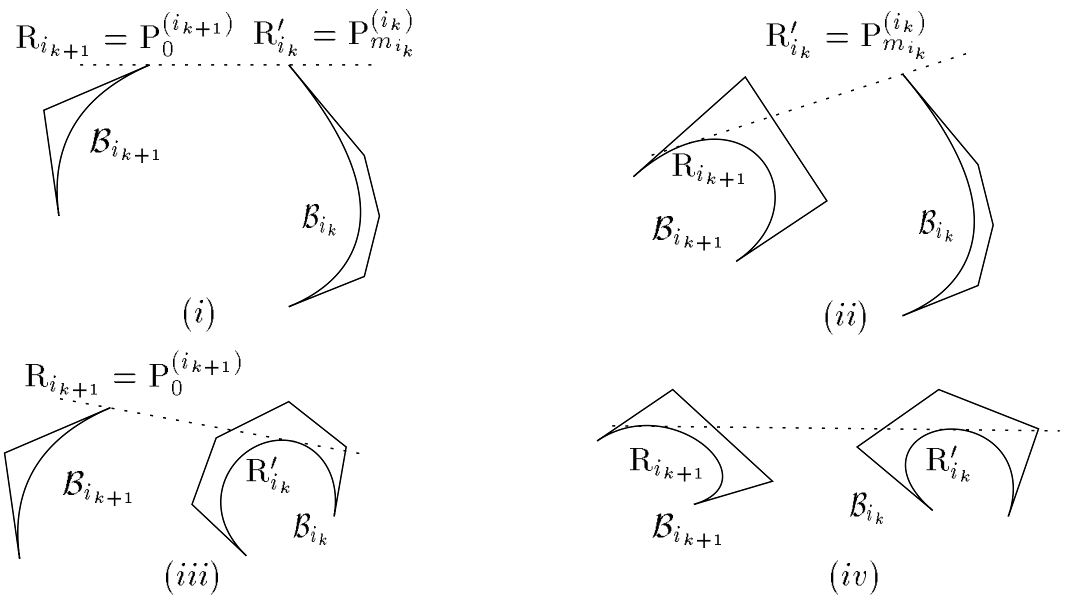


Figure III.10 *Les quatre positions relatives possibles des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$*

Le cas (i) nous mène rapidement à une contradiction. En effet, $\mathcal{B}_{i_0} \cap]\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}[\neq \emptyset$ implique $\mathcal{P}_{i_0} \cap \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})} \neq \emptyset$, et comme $[\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}]$ est, dans ce cas, une arête du polygone $\mathcal{Q}$, nous avons obtenu une contradiction.

Les cas (ii) et (iii) étant symétriques, nous étudierons uniquement le cas (ii). Il y a deux situation possibles : soit $i_0 \in \{i_k+1, \ldots, i_{k+1}-1\}$, soit $i_0 \in \{i_{k+1}+1, \ldots, i_k-1\}$, l'ensemble d'indices $\mathcal{I}$ étant considéré circulaire. Supposons $i_0 \in \{i_k+1, \ldots, i_{k+1}-1\}$ et étudions la position possible de la ligne polygonale $\cup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i$. Cette ligne polygonale doit joindre les points $\mathrm{P}_{m_{i_0}}^{(i_0)}$ et $\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}$ et tous ses sommets, à part $\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}$, doivent appartenir à la région $\mathcal{R}_{i_{k+1}}$, car évidemment $i_{k+2} \notin \{i_0+1, \ldots, i_{k+1}-1\}$. Cette région est séparée en deux par la ligne polygonale $\mathrm{P}_1^{(i_{k+1})}\mathrm{P}_2^{(i_{k+1})} \ldots \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}-1}^{(i_{k+1})}$:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} = \bigcap_{j=0}^{m_{i_{k+1}}-1} \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_j^{(i_{k+1})}\mathrm{P}_{j+1}^{(i_{k+1})}, \mathcal{P}_{i_{k+1}}\big)$$

$$\overline{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} = \mathcal{R}_{i_{k+1}} \setminus \Big(\widetilde{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} \cup \bigcup_{j=1}^{m_{i_{k+1}}-2} [\mathrm{P}_j^{(i_{k+1})}\mathrm{P}_{j+1}^{(i_{k+1})}]\Big)$$

et, le polygone $\mathcal{P}$ étant pseudo-simple, les deux lignes polygonales, $\mathrm{P}_1^{(i_{k+1})} \ldots \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}-1}^{(i_{k+1})}$ et $\cup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i$, doivent être disjointes. Mais, d'un côté, $\mathrm{P}_{m_{i_0}}^{(i_{k+1})} \in \overline{\mathcal{R}}_{i_{k+1}}$, comme nous avons déjà vu pour un cas similaire dans la première partie de cette démonstration, et d'un autre côté il existe évidemment un voisinage $\mathcal{V}$ du point $\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})} = \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}-1}^{(i_{k+1}-1)}$ tel que

$$\mathcal{V} \cap \widetilde{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} \cap]\mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}-1}^{(i_{k+1}-1)}\mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}-2}^{(i_{k+1}-1)}] \neq \emptyset$$

Ainsi, nous avons

$$\bigcup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i_{k+1}-1)}_{m_{i_{k+1}}-1}\} \subset \mathcal{R}_{i_{k+1}}$$

$$\Big(\bigcup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i_{k+1}-1)}_{m_{i_{k+1}}-1}\}\Big) \cap \widetilde{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} \neq \emptyset \qquad \Big(\bigcup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i_{k+1}-1)}_{m_{i_{k+1}}-1}\}\Big) \cap \overline{\mathcal{R}}_{i_{k+1}} \neq \emptyset$$

et par conséquent

$$\Big(\bigcup_{i=i_0+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}^{(i_{k+1}-1)}_{m_{i_{k+1}}-1}\}\Big) \cap \bigcup_{j=1}^{m_{i_{k+1}}-2}[\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_j\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j+1}] \neq \emptyset,$$

d'où la contradiction.

Supposons maintenant que $i_0 \in \{i_{k+1}+1,\ldots,i_k-1\}$. Soit $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{B}_{i_0} \cap]\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}[$ tel que

$$\left(\bigcup_{i=i_{k+1}+1}^{i_0-1}\mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_{i_0}\Big|_{]\mathrm{P}^{(i_0)}_0\mathrm{P}_0[}\right) \cap]\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}[= \emptyset,$$

où $\mathcal{B}_{i_0}\big|_{]\mathrm{P}^{(i_0)}_0\mathrm{P}_0[}$ est la partie de la courbe $\mathcal{B}_{i_0}$ comprise entre les points $\mathrm{P}^{(i_0)}_0$ et P_0, sans ces deux-là. Soit

$$\mathcal{L} = \left(\bigcup_{i=i_{k+1}+1}^{i_0-1}\mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_{i_0}\Big|_{]\mathrm{P}^{(i_0)}_0\mathrm{P}_0[}\right) \cup [\mathrm{P}_0\mathrm{R}_{i_{k+1}}] \cup \mathcal{B}_{i_{k+1}}\Big|_{]\mathrm{R}_{i_{k+1}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{m_{i_{k+1}}}[}$$

De par sa définition, la courbe $\mathcal{L}$ est simple et fermée. En plus, nous pouvons voir facilement que $\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_0 \in reg(\mathcal{L})$ et $\mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}} \notin \overline{reg(\mathcal{L})}$, et par conséquent $\cup_{i=i_k+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{B}_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Mais $\mathcal{B}$ est une courbe simple, donc la relation ci-dessus implique $\cup_{i=i_k+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{B}_i \cap]\mathrm{P}_0\mathrm{R}_{i_{k+1}}[\neq \emptyset$. Ainsi, il doit exister $i'_0 \in \{i_k+1,\ldots,i_{k+1}-1\}$ tel que $\mathcal{B}_{i'_0} \cap]\mathrm{P}_0\mathrm{R}_{i_{k+1}}[\neq \emptyset$, donc tel que $\mathcal{B}_{i'_0} \cap]\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}[\neq \emptyset$.

Pour conclure la preuve pour le cas (ii), si $i_0 \in \{i_k+1,\ldots,i_{k+1}-1\}$, alors nous obtenons une contradiction, et si $i_0 \in \{i_{k+1}+1,\ldots,i_k-1\}$, alors il existe $i'_0 \in \{i_k+1,\ldots,i_{k+1}-1\}$ ayant les propriétés de i_0 qui nous mènent à une contradiction.

Il est facile à voir que le même raisonnement peut être fait aussi si nous nous situons dans le cas (iv), et ainsi dans ce cas-là également nous obtenons une contradiction.

En conclusion, l'hypothèse

$$\text{il existe } i_0 \in \{1,\ldots,n\} \text{ tel que } \mathcal{P}_{i_0} \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\big(\bigcup_{i\neq i_0}\mathcal{B}_i\big)\Big) \text{ et } \mathcal{B}_{i_0} \not\subset \mathcal{E}\big(\bigcup_{i\neq i_0}\mathcal{B}_i\big)$$

nous a menés dans tous les cas à une contradiction, donc elle est fausse et ainsi la deuxième propriété de la définition de la pertinence topologique est prouvée et la démonstration de la proposition est achevée. □

Cette proposition nous permet de concevoir un test d'arrêt pour l'algorithme de calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe, en vérifiant pour chaque B-polygone de courbe de Bézier qui participe à l'enveloppe convexe du polygone de contrôle de la polycourbe si les conditions (III.4.i), (III.4.ii) et (III.4.iii) sont satisfaites, et en subdivisant ce B-polygone si elles ne le sont pas.

III.5.1.2. Pertinence topologique restreinte

Malheureusement, nous ne pouvons pas prouver que l'algorithme utilisant le test d'arrêt ci-dessus converge. Supposons qu'au pas ℓ la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ ne satisfait pas la condition (III.4.i), et supposons aussi que la courbe $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ ne satisfait elle non plus une des trois conditions, et doit être subdivisée. De manière intuitive, il est facile à voir que le diamètre de l'ensemble de points qui "ont le droit" de se trouver dans le demi-plan $\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$ decroît au fur à mesure que des subdivisions sont appliquées à la courbe $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$, donc il y aura de plus en plus de chances que des sommets autres que ceux de $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ se trouvent dans ce demi-plan.

Comme nous ne sommes pas arrivés à trouver une condition d'arrêt nous permettant de prouver en même temps la pertinence topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ au moment où cette condition est satisfaite et la convergence de l'algorithme utilisant cette condition, nous nous sommes vus contraints de restreindre la notion de pertinence topologique pour pouvoir donner un algorithme de calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Définition III.5. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure de polygone de contrôle pseudo-simple $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i$. Pour une courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$ de la composition de la polycourbe, soit $\widetilde{\mathcal{B}}_i$ l'union des toutes les courbes $\mathcal{B}_j$ qui proviennent, par subdivision, de la même courbe initiale que $\mathcal{B}_i$: $\widetilde{\mathcal{B}}_i = \bigcup_{\mathcal{B}_j.\mathrm{rang}=\mathcal{B}_i.\mathrm{rang}} \mathcal{B}_j$. De la même manière nous définissons, pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$ donné, la ligne polygonale $\widetilde{\mathcal{P}}_i$. Nous dirons que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle $\mathcal{P}$ est topologiquement pertinente au sens restreint pour l'enveloppe convexe de la polycourbe si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(III.5.i) $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$;

(III.5.ii) $\widetilde{\mathcal{P}}_i \subset \mathrm{Int}\left(\mathcal{E}\left(\bigcup_{\widetilde{\mathcal{B}}_j \neq \widetilde{\mathcal{B}}_i} \widetilde{\mathcal{P}}_j\right)\right) \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}}_i \subset \mathcal{E}\left(\bigcup_{\widetilde{\mathcal{B}}_j \neq \widetilde{\mathcal{B}}_i} \widetilde{\mathcal{B}}_j\right)$

pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Évidemment, la pertinence topologique implique la pertinence topologique au sens restreint et la réciproque n'est pas vraie (figure III.11 : pour la structure courante de la polycourbe, figure (b), la ligne support des polygones $\widetilde{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_1$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_3 = \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4 \cup \mathcal{P}_5 \cup \mathcal{P}_6$ "touche" $\widetilde{\mathcal{P}}_3$ en un sommet de $\mathcal{P}_4$, tandis que la ligne support des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{B}_1$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_3 = \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ "touche" $\widetilde{\mathcal{B}}_3$ en un point de $\mathcal{B}_3$; pour une meilleure visibilité, le polygone $\mathcal{P}_3$ n'a pas été représenté). Nous remarquons aussi que la notion de pertinence topologique au sens restreint n'est pas intrinsèque, car pour une polycourbe donnée il y a plusieurs "structures initiales" possibles. Toutefois, ceci n'est pas gênant pour notre algorithme, qui considère comme structure initiale de la polycourbe celle lue à l'entrée du programme, une polycourbe donnée ayant ainsi une unique structure initiale.

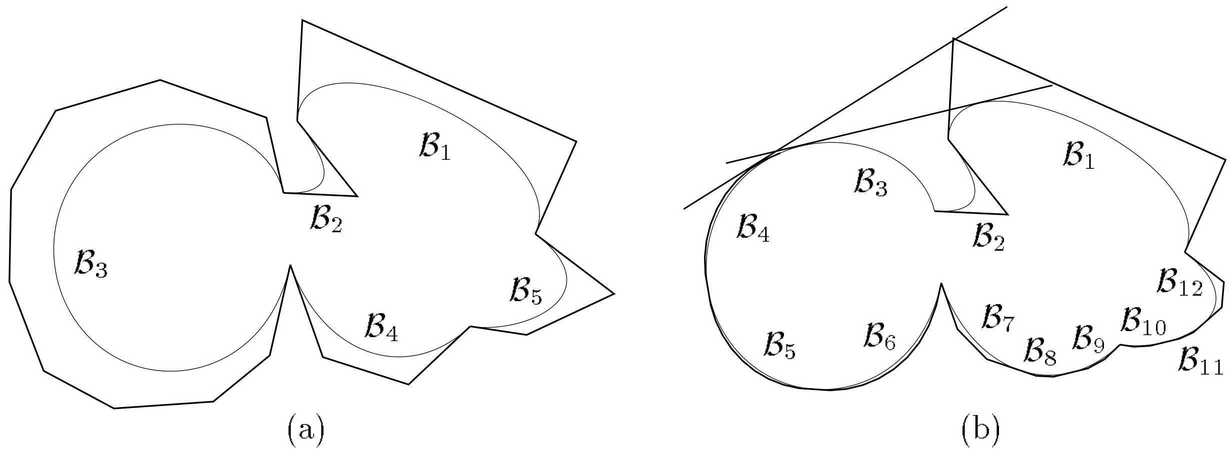


Figure III.11 (a) *Structure initiale de la polycourbe ;* (b) $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ *est topologiquement pertinente au sens restreint pour* $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ *sans être topologiquement pertinente, car la condition* (III.5.ii) *est satisfaite et* (II.6.ii) *ne l'est pas pour* $i = 3$.

Nous pouvons maintenant énoncer un lemme donnant une condition suffisante pour la pertinence topologique restreinte de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe :

Lemme III.6. – *En utilisant les mêmes notations, si pour tout* $k \in \mathcal{K}$ *les trois conditions suivantes sont satisfaites, alors l'enveloppe convexe du polygone de contrôle* $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ *est topologiquement pertinente au sens restreint pour l'enveloppe convexe de la polycourbe* $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ *:*

(III.6.i) *si* P *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *tel que* $\mathrm{P} \notin \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}\big)$, *alors* P *est un sommet de* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k-1}}$ *;*

(III.6.ii) *si* P *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *tel que* $\mathrm{P} \notin \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k}\big)$, *alors* P *est un sommet de* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k+1}}$ *;*

(III.6.iii) *si* $\mathcal{B}_{i_{k-1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$ *et* $\mathcal{B}_{i_{k+1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$, *alors*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_k} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}}\big),$$

où P *est un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ *et* Q *un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k+1}}$ *tels que le segment* $[\mathrm{PQ}]$ *soit une arête du polygone frontière de* $\mathcal{E}\big(\cup_{\alpha \neq k}\mathcal{P}_{i_\alpha}\big)$.

Preuve – La démonstration de ce lemme est en tout point semblable à celle de la proposition III.4, les modifications des conditions(III.4.i), (III.4.ii) et (III.4.iii) correspondant à la différence entre la pertinence topologique et la pertinence topologique restreinte. Pour prouver la propriété (III.5.i) de la définition de la pertinence topologique restreinte (qui est la même que (II.6.i)), nous utilisons la convexité du polygone $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ pour démontrer que $\{\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}}\big)$, avec l'observation que si deux sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ appartiennent au demi-plan $\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}}\big)$, alors tous les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ qui sont "entre" les deux premiers appartiendront eux aussi à ce demi-plan (cette propriété résulte de la convexité du polygone $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$, corroborée avec la position que $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k}$ doit avoir par rapport à la droite PQ). La preuve pour la deuxième propriété de la définition de la pertinence topologique restreinte, (III.5.ii), ne présente pas d'aspect nouveau par rapport à celle faite pour la deuxième propriété de la pertinence topologique, (II.6.ii). □

Remarque. Les conditions (III.4.iii) et (III.6.iii) sont en fait équivalentes. Il est évident que (III.4.iii) implique (III.6.iii). Pour l'implication inverse, nous utilisons la remarque, faite dans l'esquisse de preuve ci-dessus, que si deux sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ appartiennent au demi-plan $\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}})$, alors tous les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ qui sont "entre" les deux premiers appartiendront eux aussi à ce demi-plan. Le polygone $\mathcal{P}_{i_k}$ a forcément un sommet dans le demi-plan $\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}})$, soit S_1 ce sommet. De par la condition (III.6.iii), il existe un sommet de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ qui est en même temps un point de $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k}$ se trouvant dans le demi-plan cité, et soit S_2 ce sommet. Si S_2 est un sommet de $\mathcal{P}_{i_k}$, il ne peut être que $\mathrm{P}_0^{(i_k)}$ ou $\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}$ et la preuve est finie. S'il n'est pas un sommet de $\mathcal{P}_{i_k}$, alors tous les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ situés entre S_1 et S_2 se trouvent dans le demi-plan $\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}})$, et parmi ces sommets il doit y avoir aussi une des extrémités de $\mathcal{P}_{i_k}$.

Pour pouvoir utiliser les conditions (III.6.i), (III.6.ii) et (III.6.iii) pour la conception d'un test d'arrêt pour notre algorithme, il nous reste à prouver la convergence de l'algorithme qui utilise ce test d'arrêt. Nous devons donc prouver qu'après un nombre fini d'itérations les conditions (III.6.i), (III.6.ii) et (III.6.iii) sont satisfaites par le polygone de contrôle de la polycourbe.

III.5.1.3. Dégénérescence

Malheureusement, l'affirmation ci-dessus n'est toujours pas vraie, à cause de l'existence des cas décrits par la définition suivante :

Définition III.7. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier et soit $\mathcal{E}$ la courbe frontière de son enveloppe convexe. Nous dirons que la polycourbe est dégénérée (ou qu'elle présente une dégénéréscence, ou encore que nous avons un cas dégénéré) s'il existe $i < j < k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que les courbes $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}_k$ admettent une tangente commune Δ_{ijk} et que $[\mathrm{PQ}] \subset \mathcal{E}$, où $\mathrm{P} = \Delta_{ijk} \cap \mathcal{B}_i$ et $\mathrm{Q} = \Delta_{ijk} \cap \mathcal{B}_k$.*

Nous pouvons voir immédiatement que si une polycourbe est dégénérée, alors aucune des trois conditions ne sera satisfaite, au moins que les paramètres donnant, respectivement, les points de tangence de cette tangente commune sur chacune des courbes de Bézier concernées soient tous de la forme $\alpha/2^\beta$, avec $\alpha \in \{0, 1, \ldots, 2^\beta\}$. Dans ce dernier cas, après $\gamma = \max\{\beta\}$ itérations tous ces points de tangence sont retrouvés sur leurs courbes respectives comme étant l'extrémité d'une (ou deux si $\alpha \notin \{0, 2^\beta\}$) des courbes obtenues par subdivision, et les droites $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$ respectives seront confondues, et aussi les droites $\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}$ (figure III.12).

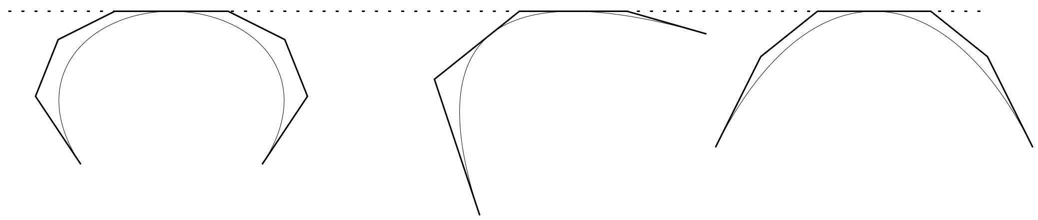


Figure III.12

III.5.1.4. Dégénérescence à ε-près

Si nous avons un cas dégénéré, il est très rare que les points de tangence de la tangente commune aux courbes impliquées soient tous de la forme donnée ci-dessus, et même quand ils le sont, le nombre d'itérations nécessaires pour les retrouver peut être trop élevé. Par conséquent, nous introduisons une nouvelle notion :

Définition III.8. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier et ε un réel non-négatif. Nous dirons que $\mathcal{B}$ présente une dégénérescence à ε près s'il existe $i < j < k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tels que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, $\mathcal{B}_k \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et que l'ensemble $\mathcal{B}_j \cap \mathrm{B}(\mathrm{PQ}, \varepsilon)$ soit un ensemble non vide et connexe, où $\mathrm{P} \in \mathcal{B}_i$ et $\mathrm{Q} \in \mathcal{B}_k$ sont tels que la droite PQ soit la tangente commune des courbes $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_k$ qui réalise l'enveloppe convexe droite de ces deux courbes, et*

$$\mathrm{B}(\mathrm{PQ}, \varepsilon) = \left\{ \mathrm{M} \in I\!R^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathrm{PQ}) \leq \varepsilon \right\}$$

La figure III.13 illustre cette définition.

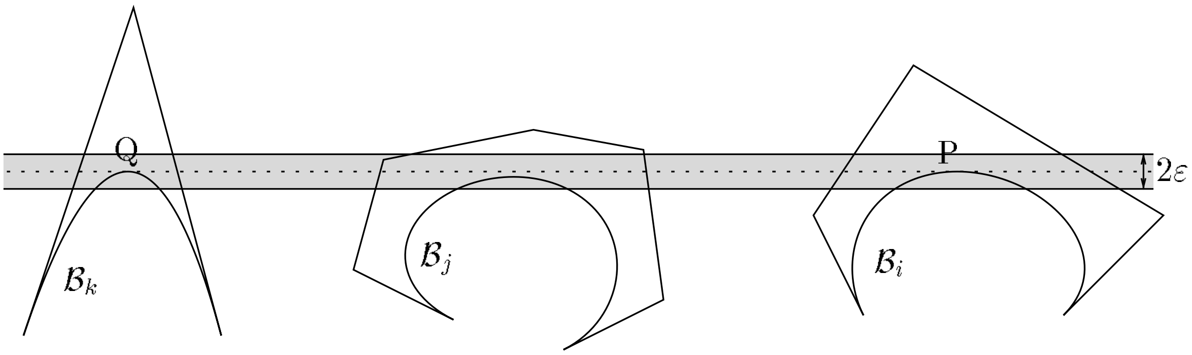


Figure III.13 $\mathcal{B}_j \cap \mathrm{B}(\mathrm{PQ}, \varepsilon)$ *est non-vide et connexe.*

Conformement à la définition, pour ε suffisament grand toute polycourbe sera dégénérée à ε près, mais bien sûr nous allons nous intéresser uniquement aux polycourbes étant dégénérées à ε près pour ε suffisament petit. Dans cette définition, la courbe $\mathcal{B}_j$ peut participer ou pas à la frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe, et il est facile à voir que pour $\varepsilon = 0$ nous retrouvons la définition de la dégénéréscence.

Nous allons étudier le cas où après ℓ itérations une des conditions (III.6.i), (III.6.ii) ou (III.6.iii) n'est pas satisfaite, en trouvant des estimations pour le ε pour lequel la polycourbe est dégénérée à ε près. Un rôle important dans ces estimations est joué par l'angle entre les deux tangentes aux extrémités des courbes des Bézier qui sont concernées par la condition n'étant pas satisfaite, nous devons donc commencer par évaluer la valeur de cet angle après ℓ subdivisions d'une courbe de Bézier.

Soit $\mathcal{B}_0$ une courbe de Bézier de B-polygone $\mathcal{P}_0 = \mathrm{P}_o\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$. L'angle θ_0 entre les deux tangentes aux extrémités de cette courbe est donné par

$$\theta_0 = angle(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_m - \mathrm{P}_{m-1}) = \left| \int_0^1 \kappa(t)\mathrm{d}t \right| ,$$

où

$$\kappa(t) = \frac{\mathrm{B}'_m(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m; t) \times \mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m; t)}{\| \mathrm{B}'_m(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m; t) \|^3} \quad \forall t \in [0, 1]$$

est la courbure de la courbe de Bézier. Une courbe obtenue à partir de $\mathcal{B}_0$ après ℓ subdivisions sera de la forme $\mathrm{B}_m(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m; [j/2^\ell, (j+1)/2^\ell])$, avec $j \in \{0, 1, \ldots, 2^\ell - 1\}$, et ainsi l'angle entre les tangentes en ses extrémités sera

$$\theta_{\ell j} = \left| \int_{\frac{j}{2^\ell}}^{\frac{j+1}{2^\ell}} \kappa(t)\mathrm{d}t \right| < \left| \int_{\frac{j}{2^\ell}}^{\frac{j+1}{2^\ell}} \kappa_M \mathrm{d}t \right| = \frac{1}{2^\ell} \left| \kappa_M \right| \ ,$$

où $\kappa_M = \max_{t\in[0,1]} \kappa(t)$. Nous pouvons faire cette majoration, car une courbe de Bézier ne pouvant pas être un cercle la courbure ne peut pas être constante. Cette majoration est d'autant plus grossière que la forme du B-polygone $\mathcal{P}_0$ est irrégulière, en comprenant par là que le rapport entre sa plus grande et sa plus petite arête est grand ou qu'il existe un ou plusieurs sommets de ce polygone pour lesquels l'angle intérieur est petit. Ce type d'irrégularité du B-polygone impliquera une forte variation de la courbure pour t allant de 0 à 1, et par conséquent la majoration de la courbure par son maximum faite dans la rélation ci-dessus sera assez bonne pour certaines valeurs de j et très grossière pour d'autres. Nous n'avons pas pu établir une évaluation précise de κ_M en fonction du polygone $\mathcal{P}_0$, ni une meilleure majoration pour l'angle $\theta_{\ell j}$, mais la majoration donnée nous fournit une bonne idée du comportement de cet angle quand ℓ varie (donc quand le nombre de subdivisions varie).

Supposons maintenant qu'après ℓ itérations la condition (III.6.i) n'est pas satisfaite, et soit $k \in \mathcal{K}_0$ et $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_{k-1}$, $j \in \{0,1,\ldots,m_i\}$ tels que $\mathrm{P}_j^{(i)} \notin \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$, où $\mathcal{I}_{k-1} = \{h \in \mathcal{I} \mid \widetilde{\mathcal{B}}_h = \widetilde{\mathcal{B}}_{i_{k-1}}\}$. Il est facile à voir que le point $\mathrm{P}_j^{(i)}$ doit appartenir à $\overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})} \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})}$, car s'il appartient à la région $\overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})} \cap \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$ nous obtenons une contradiction avec $k \in \mathcal{K}_0$. Le point $\mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}$, le dernier des sommets de $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ qui est un sommet de $\mathcal{Q}$, doit se trouver lui aussi dans la région $\overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})} \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})}$, de par la définition du polygone $\mathcal{Q}$. D'un autre côté, toute droite tangente à la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ aura la pente comprise entre la pente de $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$ et celle de $\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}$. De ces trois dernières remarques nous pouvons déduire que l'angle formé par la droite $\mathrm{P}_{j_{i_k}}\mathrm{P}_j^{(i)}$ et $\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}$, la tangente commune des courbes $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ et $\mathcal{B}_{i_k}$, sera inférieur à θ_{i_k}.

Soit Δ la parallèle à $\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}$ passant par $\mathrm{P}_{j_{i_k}}$. Alors

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \Delta) + \mathrm{d}(\Delta, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}_{j_{i_k}}, \mathrm{P}_j^{(i)}) \sin\theta_{i_k} + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}])$$

où $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}])$ représente évidemment un majorant pour la distance de Hausdorff $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_{i_k}, \mathcal{P}_{i_k})$, qui à son tour majore $\mathrm{d}(\Delta, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k})$. La majoration $\mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \Delta) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}_{j_{i_k}}, \mathrm{P}_j^{(i)}) \sin\theta_{i_k}$ peut être faite grace au fait que l'angle θ_{i_k} est compris entre 0 et $\pi/4$ pour ℓ suffisament grand, intervalle sur lequel la fonction sin est croissante.

Considérons maintenant

$$\varepsilon_M = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \mathrm{B}(\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}, \varepsilon) \cap \mathcal{B}_i \text{ est non} - \text{vide et connexe}\}$$

Nous avons deux possibilités pour les positions relatives de la courbe $\mathcal{B}_i$ et la droite $\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}$. Si $\mathcal{B}_i \cap \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k} = \emptyset$, alors $\varepsilon_M = \mathrm{d}(\mathcal{B}_i, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k})$, car suite à la convexité de la courbe $\mathcal{B}_i$ l'ensemble $\mathrm{B}(\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}, \varepsilon) \cap \mathcal{B}_i$ ne peut pas être non-connexe, mais peut être vide. Si $\mathcal{B}_i \cap \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k} \neq \emptyset$, alors $\varepsilon_M = \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i \cap \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}), \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k})$, dans ce cas l'ensemble ci-dessus pouvant être non-connexe, mais pas vide. Dans tous les cas, nous avons la majoration

$$\varepsilon_M \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, si

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_{j_{i_k}}, \mathrm{P}_j^{(i)}) \sin\theta_{i_k} + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}]) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]) \leq \varepsilon$$

et la condition (III.6.i) n'est pas satisfaite, alors nous pouvons conclure que la polycourbe est dégénérée à ε près.

Le raisonnement est tout à fait symétrique si nous supposons qu'après ℓ itérations la condition (III.6.ii) n'est pas satisfaite. Si nous supposons que c'est la condition (III.6.iii) qui n'est pas satisfaite pour $k \in \mathcal{K}_0$, la majoration voulue est encore plus simple :

$$\begin{aligned}\varepsilon_M &\leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_{i_k}, \mathcal{P}_{i_k}) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}^{(i_{k-1})}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}]) + \delta^{\mathrm{H}}([\mathrm{P}^{(i_{k-1})}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}], [\mathrm{PQ}])\\ &\leq \delta^{\mathrm{H}}([\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}], \mathcal{P}_{i_k}) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}^{(i_{k-1})}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}]) + \delta^{\mathrm{H}}([\mathrm{P}^{(i_{k-1})}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}], [\mathrm{PQ}])\end{aligned}$$

où les points P et Q sont définis, de la même manière que précédemment, comme étant les points de $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ et respectivement $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ tels que PQ soit la droite d'appui commune de ces deux courbes qui réalise leur enveloppe convexe droite. Pour nous assurer de la dégénérescence à ε près de la polycourbe dans ce cas, il nous suffit donc d'imposer la majoration du membre droit de cette inégalité par ε.

Toutes ces majorations dépendent directement de la structure de la polycourbe après ℓ itérations, et nous ne pouvons pas les utiliser pour déduire combien d'itérations seront nécessaires pour pouvoir conclure, si une des conditions (III.6.i), (III.6.ii) ou (III.6.iii) n'est pas satisfaite, que la polycourbe est dégénérée à ε près, pour un ε donné. Aussi, si la polycourbe est "en position générale", la forme des conditions (III.6.i), (III.6.ii) et (III.6.iii) ne nous permet pas d'évaluer le nombre d'itérations nécessaires pour que ces trois conditions soient satisfaites. Par conséquent, le coût de notre algorithme dépendra des résultats obtenus et nous pourrons avoir des coûts très différents pour le traitement de deux polycourbes impliquant des données de la même taille, mais ayant des "facteurs de forme" différents.

III.5.1.5. "Localisation" des conditions (III.6.i) et (III.6.ii)

Nous voyons facilement que la condition (III.6.iii) est "locale", elle implique uniquement les polygones $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k-1}}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k+1}}$, tandis que les conditions (III.6.i) et (III.6.ii) sont "globales", elles impliquent tous les B-polygones des courbes composant la polycourbe. Le résultat suivant nous dit que ces deux conditions peuvent elles aussi être exprimées de manière locale.

Lemme III.9. – *Si les trois conditions suivantes sont satisfaites pout tout $k \in \mathcal{K}$, alors l'enveloppe convexe du polygone de contrôle est topologiquement pertinente au sens restreint pour l'enveloppe convexe de la polycourbe :*

(III.9.i) *si le point* P *est un sommet de* $\cup_{i=i_{k-1}+1}^{i_k-1}\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_{i_{k-2}}$ *qui se trouve dans le demi-plan* $\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$*, alors* P *est un sommet de* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k-1}}$ *;*

(III.9.ii) *si le point* P *est un sommet de* $\cup_{i=i_k+1}^{i_{k+1}-1}\mathcal{P}_i \cup \mathcal{P}_{i_{k+2}}$ *qui se trouve dans le demi-plan* $\mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_{i_k}-1}^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$*, alors* P *est un sommet de* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_{k+1}}$ *;*

(III.9.iii) *si* $\mathcal{B}_{i_{k-1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$ *et* $\mathcal{B}_{i_{k+1}}.\mathtt{rang} \neq \mathcal{B}_{i_k}.\mathtt{rang}$*, alors*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_k} \not\subset \mathrm{DP}(\mathrm{PQ}, \mathcal{B}_{i_{k-1}}),$$

où P *est un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k-1}}$ *et* Q *un sommet de* $\mathcal{P}_{i_{k+1}}$ *tels que le segment* [PQ] *soit une arête du polygone frontière de* $\mathcal{E}\big(\cup_{\alpha\neq k}\mathcal{P}_{i_\alpha}\big)$.

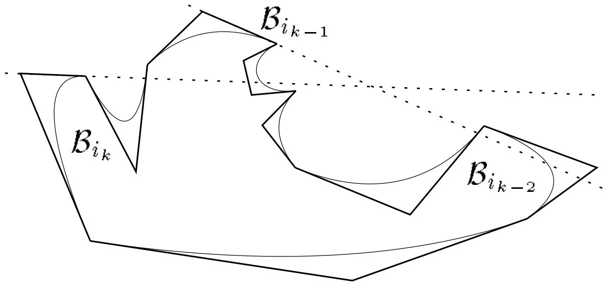


Figure III.14

Il est évident que la condition (III.6.i) implique la condition (III.9.i), et la même rélation existe entre (III.6.ii) et (III.9.ii). La réciproque n'est pas vraie, la figure III.14 présente un cas où la condition (III.9.i) est satisfaite et (III.6.i) pas. La condition (III.9.iii) est identique à (III.6.iii) qui, comme nous avons vu, est équivalente à (III.4.iii).

Preuve du lemme – Nous commencerons cette démonstration par la preuve de la condition (III.5.ii), deuxième de la définition de la pertinence topologique restreinte, preuve qui sera faite par l'absurd. Supposons donc qu'il existe $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\cup_{\alpha\neq i}\mathcal{P}_\alpha)\big)$ et $\mathcal{B}_i \not\subset \big(\mathcal{E}(\cup_{\alpha\neq i}\mathcal{B}_\alpha)\big)$. Comme nous avons déjà vu dans la démonstration de la proposition III.4, et en utilisant les mêmes notations, il existe alors $k \in \mathcal{K}$ et $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tels que $\mathcal{B}_{i_0} \cap [\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}] \neq \emptyset$. Si $i_0 \in \{i_k+1,\ldots,i_{k+1}-1\}$, le raisonnement à faire pour l'obtention d'une contradiction est identique au celui fait dans la preuve de la proposition III.4, nous devons seulement remplacer la région $\mathcal{R}_{i_k}$ par $\mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}}\mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}-1},\mathcal{B}_{i_k})\cap\mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}},\mathcal{B}_{i_k})$ (où les points $\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}$ et $\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}$ sont identifiés par la définition du polygone $\mathcal{Q}$) et la région $\mathcal{R}_{i_{k+1}}$ par $\mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_0\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_1,\mathcal{B}_{i_{k+1}})\cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}},\mathcal{B}_{i_k})$. Nous avons aussi vu comment $i_0 \in \{i_{k+1}+1,\ldots,i_k-1\}$ implique l'existence d'un indice $i'_0 \in \{i_k+1,\ldots,i_{k+1}-1\}$ tel que $\mathcal{B}_{i'_0} \cap [\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}] \neq \emptyset$, en menant ainsi à une contradiction, et en conclusion la propriété (III.5.ii) est vérifiée.

Pour la propriété (III.5.i), la démonstration sera aussi faite par l'absurd. En supposant qu'il existe $k \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{B}_{i_k}\cap\mathcal{E} = \emptyset$ (car l'existence d'un $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $\mathcal{P}_i\cap\mathcal{Q} \neq \emptyset$ entraîne l'existence d'un $k \in \mathcal{K}$ tel que $i = i_k$), nous montrons qu'il existe $i_0 \in \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $\mathcal{B}_{i_0} \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{k\in\mathcal{K}}\mathcal{B}_{i_k}\big)$ comme nous l'avons fait pour la preuve de la proposition III.4, la seule propriété utilisée étant l'équivalence de (III.9.iii) à (III.4.iii). Nous avons déjà prouvé que ceci impliquera l'existence d'un indice $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ et d'un autre indice $k \in \mathcal{K}$ tels que $\mathcal{B}_i\cap]\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}[\neq \emptyset$, relation qui a mené, dans la preuve ci-dessus pour la deuxième propriété de la définition de la pertinence topologique au sens restreint, à une contradiction. Ainsi, l'hypothèse faite est fausse et la première condition de la définition III.5 est elle aussi vérifiée. □

III.5.2. *Présentation des algorithmes*

Dans cette sous-section, nous décrivons deux algorithmes de calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe d'une polycourbe. Ils représentent deux approches légérement différentes du problème, leurs complexités et précisions respectives offrant le choix en fonction des ressources de l'ordinateur sur lequel une implémentation est envisagée et des résultats attendus.

III.5.2.1. Structures de données spécifiques

Pour exprimer la structure topologique de l'enveloppe convexe que nous aurons calculée, nous avons besoin d'une nouvelle classe, car nous ne nous contenterons pas de fournir l'ensemble $\mathcal{I}$ de la définition II.4, mais essayerons de donner plus de précisions sur la courbe $\mathcal{E}$, frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe. $\mathcal{E}$ est formée par une union d'objets de deux types, d'un côté des parties des courbes de Bézier composant la polycourbe, et de l'autre côté des segments reliant ces parties de courbe. Un tel segment appartient à une droite d'appui commune des courbes dont les parties sont jointes par lui, droite d'appui qui réalise l'enveloppe convexe droite de ces deux courbes.

Nous voulons coder les deux types de composantes de la courbe $\mathcal{E}$ par un seul type de données, les `comp_ec`, et pour ce faire nous avons besoin d'introduire l'`identificateur_point`. Un objet de ce type donne une localisation d'un point d'une des courbes de Bézier composant la polycourbe, par un pointeur à la courbe dans la structure de la polycourbe et un intervalle de paramètres tel que le paramètre correspondant, par la paramétrisation de Bézier, au point soit compris dans cet intervalle. Il aura donc les champs :
- `courbe` : un pointeur à une courbe de Bézier ;
- `intervalle` : une paire de réels.

Remarque. Nous nous référons ici à la structure **initiale** de la polycourbe, car nous avons vu qu'un polygone de contrôle dont l'enveloppe convexe soit topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe ne peut pas être toujours obtenu et nous cherchons donc un polygone de contrôle satisfaisant les conditions de pertinence topologique au sens restreint.

Une `comp_ec` sera ainsi un objet ayant deux champs, `début` et `fin`, chacun étant un `identificateur_point`. Soit $\mathcal{A}$ un `comp_ec` ; si $*(\mathcal{A}.\texttt{début.courbe}) = *(\mathcal{A}.\texttt{fin.courbe})$, alors $\mathcal{A}$ est un morceau d'une des courbes de Bézier de la composition de la polycourbe (celle identifiée par $\mathcal{A}$.`début.courbe`), et si ces deux valeurs sont différentes, alors $\mathcal{A}$ sera un segment de bitangente.

Avec ces définitions, une `env_conv_topologique` est une classe qui hérite la classe `méta_polygone<comp_ec>`, ayant, en plus des champs `taille` et `éléments`, les trois champs suivants :
- `dégénérescence` : une chaîne de caractères, qui sera "non" si l'algorithme a trouvé un polygone de contrôle de la polycourbe tel que les conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) soient satisfaites, et "oui" dans le cas contraire ;
- `epsilon` : un réel, qui sera -1 si `dégénérescence`="non". Si `dégénérescence`="oui", nous pouvons trouver, comme il a été montré dans le paragraphe III.5.1.3, un ε minimal pour lequel la polycourbe est dégénérée à ε près, et ce champ contiendra la valeur de ε ;
- `localisation` : une liste de listes d'entiers. Si `dégénérescence`="non", cette liste de listes contiendra une seule liste, contenant à son tour un seul entier égal à 0. Si `dégénérescence`="oui", chaque liste d'entiers contiendra les champs `rang` des courbes de Bézier de la composition actuelle de la polycourbe qui sont susceptibles d'avoir (à `epsilon` près) une tangente commune, et la liste de listes contiendra autant de listes d'entiers que l'algorithme a trouvé "d'endroits" sur la polycourbe où une (ou plusieurs) des conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) n'est (ne sont) pas satisfaite(s).

Nous remarquons qu'un `identificateur_point` peut ne pas définir de façon unique un point de la courbe concernée, si `intervalle` n'est pas réduit à un seul point (généralement, il ne le sera pas), mais un `comp_ec` est pourtant défini de façon unique par les objets qui l'encadrent dans la liste `éléments` de l'`env_conv_topologique` à laquelle il appartient. Les intervalles `début.intervalle` et `fin.intervalle` donnent éventuellement des informations supplémentaires, dans le cas le pire tous les deux étant égals à $[0, 1]$. Dans ce cas, tout ce que nous saurons est que pour un `comp_ec` $\mathcal{A}$ avec *($\mathcal{A}$.`début.courbe`)$=$ $*$($\mathcal{A}$.`fin.courbe`) le paramètre correspondant à l'extrémité initiale de $\mathcal{A}$, codée par $\mathcal{A}$.`début`, est inférieur ou égal au paramètre correspondant à l'extrémité finale de $\mathcal{A}$, codée par $\mathcal{A}$.`fin`.

En utilisant ces types de données, il est évident que la liste `ect` sera redondante. En effet, pour tout `i` allant de 0 à `taille`-1, nous avons

$$\texttt{env\_conv\_topologique}[\texttt{i}].\texttt{fin} = \texttt{env\_conv\_topologique}[\texttt{i}+1].\texttt{début}$$

Nous gardons cette redondance, car il est utile d'avoir la description de chaque élément composant la frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

III.5.2.2. Schémas des algorithmes

Tous les types de données nécessaires à nos algorithmes étant définis, nous pouvons maintenant donner leurs structures respectives :

```
Enveloppe_convexe_topologique_1(polycourbe ℬ, réel ε,
                                      env_conv_topologique 𝒯ℰ)
liste_courbes I
tableau_pointeurs J
entier M
entier i = 0
begin
lecture_données(ℬ)
enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
pertinence_topologique_r(ℬ,I,J)
tant que J≠ ∅ et i ≤ M
     begin
     subdivision(ℬ,J)
     i = i + 1
     enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
     pertinence_topologique_r(ℬ,I,J)
     end
si i > M
     calcul_epsilon(ℬ,J,ε)
sinon
     ε = −1
écriture_resultats(ℬ,I,𝒯ℰ,ε)
end
```

Avec l'algorithme présenté ici, nous fixons le nombre maximal d'itérations, M, et si après M itérations le test d'arrêt (que nous détaillerons) n'est pas satisfait, nous considérons que la polycourbe est dégénérée à ε près, pour une valeur de ε que nous calculons, en utilisant des formules qui seront présentées plus loin. Le nombre d'itérations permis sera choisi en fonction de la machine sur laquelle l'implémentation est faite et des exigences de l'utilisateur concernant la précision.

Nous présentons aussi une variante de cet algorithme où ce n'est pas le nombre maximal d'itérations qui est fixé, mais une valeur maximale pour ε. Cette variante convient quand les ressources de l'ordinateur sur lequel l'implémentation est faite ne sont pas trop limitées, car, comme nous verrons, la complexité de cet algorithme est nettement supérieure à celle de l'algorithme précédent.

```
Enveloppe_convexe_topologique_2(polycourbe ℬ, réel ε,
                                     env_conv_topologique 𝒯ℰ)
liste_courbes I
tableau_pointeurs J
begin
lecture_données(ℬ,ε)
enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
pert_top_r_eps_près(ℬ,I,ε,J)
tant que J≠ ∅
     begin
     subdivision(ℬ,J)
     enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
     pert_top_r_eps_près(ℬ,I,ε,J)
     end
écriture_resultats(ℬ,I,𝒯ℰ,ε)
end
```

Nous pouvons voir qu'il n'y pratiquement aucune difference entre cet algorithme et celui qui calcule une approximation à ε près, pour un ε donné, de l'enveloppe convexe d'une polycourbe, à part, bien sûr, le test d'arrêt.

Les procédures `enveloppe_convexe_polygone_contrôle` et `subdivision` sont celles décrites dans la première section de ce chapitre. Il nous reste donc à détailler les procédures `pertinence_topologique_r`, `pert_top_r_eps_près` et `calcul_epsilon`.

III.5.2.3. La procédure `pertinence_topologique_r`

Cette procédure est basée sur les conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii). Elle a une structure très simple :

```
pertinence_topologique_r(polycourbe ℬ, liste_courbes I,
                              tableau_pointeurs J)
courbe_de_Bézier *P = (premier élément de I).ident_courbe
begin
si non-verifier_en_arrière(ℬ,P, I) ou
   non-verifier_en_avant(ℬ,P, I) ou
   non-verifier_sur_place(ℬ,P, I)
     ajouter P à J
si P ne correspond pas au dernier élément de I
   faire passer P à l'élément suivant dans l'ensemble I
```

```
8.        aller à la ligne 4
9.     end
```

Les procédures `verifier_en_arrière`, `verifier_en_avant` et `verifier_sur_place` sont de type booléen. La premiere retournera "oui" si la condition (III.9.i) est satisfaite par le polygone `*P`, pour le pointeur `P` et l'ensemble `I` donnés, et "non" dans le cas contraire. La deuxième de ces procédures vérifie la condition (III.9.ii), et enfin la troisième vérifie (III.9.iii). Si toutes les trois conditions sont satisfaites, alors l'instruction de la ligne 5 n'est pas exécutée et l'algorithme passe à l'élément suivant de l'ensemble `I`, tant que nous ne sommes pas arrivés au dernier de ses éléments. S'il y a au moins une des trois conditions qui n'est pas satisfaite, alors le pointeur `P` est ajouté au tableau `J` et donc la courbe qu'il designe sera subdivisée à l'itération suivante.

Regardons maintenant quelle est la complexité de cette procédure. Supposons que la polycourbe est composée de n courbes de Bézier ayant le degré maximal d. Le polygone de contrôle de la polycourbe aura donc au plus nd sommets. Le lemme III.9 nous dit que les procédures `vérifier_en_arrière` et `vérifier_en_avant` feront les vérifications de manière "locale". Le coût de la procédure `pertinence_topologique_r` sera alors $\mathcal{O}(nd)$, car pour chaque sommet P du polygone de contrôle de la polycourbe il y a deux tests à faire : si P est un sommet du polygone $\mathcal{P}_i$, avec $i \in \{i_k+1, \ldots, i_{k+1}-1\}$, nous vérifions

$$\mathrm{P} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}} \mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}-1}, \mathcal{B}_{i_k}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_0 \mathrm{P}^{(i_{k+1})}_1, \mathcal{B}_{i_{k+1}})$$

et si P est un sommet du polygone $\mathcal{P}_{i_k}$, avec $k \in \mathcal{K}$, nous vérifions

$$\mathrm{P} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_{k-2})}_{m_{i_{k-2}}} \mathrm{P}^{(i_{k-2})}_{m_{i_{k-2}}-1}, \mathcal{B}_{i_{k-2}}) \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_{k+2})}_0 \mathrm{P}^{(i_{k+2})}_1, \mathcal{B}_{i_{k+2}})$$

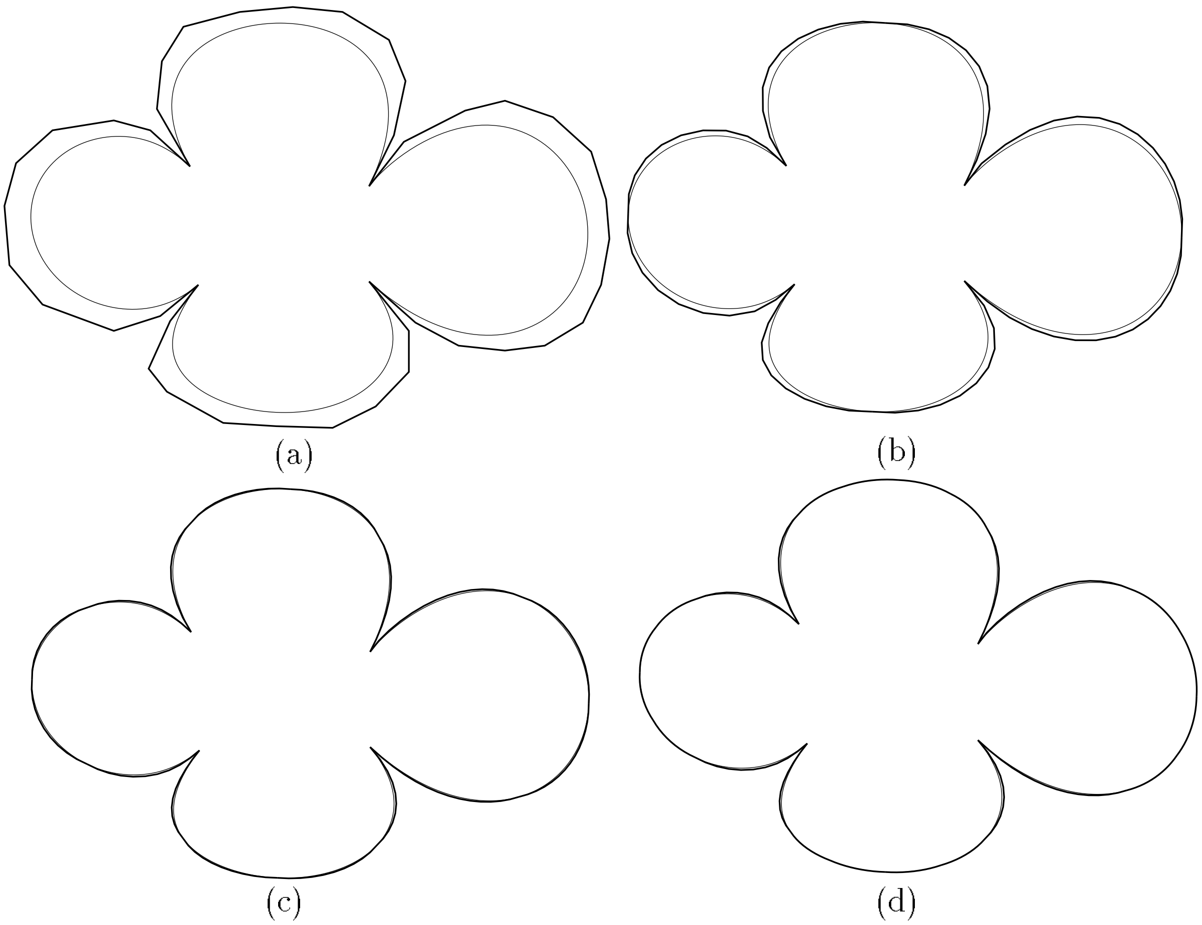


Figure III.15

Les conditions (III.4.i) et (III.4.ii) ne dépendent pas de la structure initiale de la polycourbe, les conditions (III.9.i) et (III.9.ii) si. Pour illustrer la différence entre ces deux paires de conditions, considérons la polycourbe de la figure III.15. Si nous prenons comme structure initiale de cette polycourbe celle de la figure III.15(a), une seule itération suffira pour que les conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) soient satisfaites. Après cette itération, la polycourbe aura la structure donnée figure III.15(b). Si nous considérons cette nouvelle structure comme étant celle initiale de la polycourbe, deux itérations seront nécessaires pour que les conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) soient vérifiées (figure III.15(c) et (d)). En répétant l'opération, onze nouvelles itérations seront cette fois nécessaires pour obtenir les propriétés voulues, et ce procédé ne converge pas. Ceci nous prouve, d'un côté, l'importance de ce que l'algorithme va considérer "la structure initiale" d'une polycourbe donnée, et, d'un autre côté, le fait qu'un algorithme dont le test d'arrêt serait basé sur les conditions (III.4.i), (III.4.ii) et (III.4.iii) ne converge pas (dans ce cas), car la suite d'opérations décrite ci-dessus simule un tel algorithme.

III.5.2.4. La procédure `calcul_epsilon`

Cette procédure donne une valeur ε_0 telle que la polycourbe soit dégénérée à ε_0 près s'il y a au moins une des conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) qui n'est pas satisfaite. ε_0 n'est pas la valeur minimale des ε pour laquelle la polycourbe est dégénérée à ε près, car cette valeur minimale ne peut être calculée uniquement à l'aide du polygone de contrôle.

Supposons que la condition qui n'est pas vérifiée est (III.9.i) et soit $k \in \mathcal{K}$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, m_i\}$ tels que

$$\mathrm{P}_j^{(i)} \notin \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}, \mathcal{B}_{i_k})$$

où i est un indice tel que cette relation contredise la condition (III.9.i). Par conséquent, $\mathcal{B}_i$.`rang` $\neq \mathcal{B}_{i_{k-1}}$.`rang` et nous distinguons deux cas : $i \in \{i_{k-1}+1, \ldots, i_k - 1\}$ ou $i = i_{k-2}$.

Si $i \in \{i_{k-1}+1, \ldots, i_k - 1\}$, nous aurons besoin, pour calculer ε_0, de connaître la distance de Hausdorff entre les courbes $\mathcal{B}_{i_k}$, $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ et $\mathcal{B}_i$ et leurs polygones de contrôle respectifs, distances pour lesquelles nous utiliserons respectivement les majorants $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}])$, $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_{k-1}}, [\mathrm{P}_0^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{m_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}])$ et $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$, comme nous l'avons déjà fait dans la section III.4. L'autre valeur nécessaire au calcul de ε_0 est la distance du point $\mathrm{P}_j^{(i)}$ à la droite $\mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{j_{i_k}}^{(i_k)}$. Une fois ces valeurs calculées, nous poserons

$$\varepsilon_0 = \max\{\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]) + \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{j_{i_k}}^{(i_k)}),$$
$$\max\{\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}]), \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_{k-1}}, [\mathrm{P}_0^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{m_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}])\}\}$$

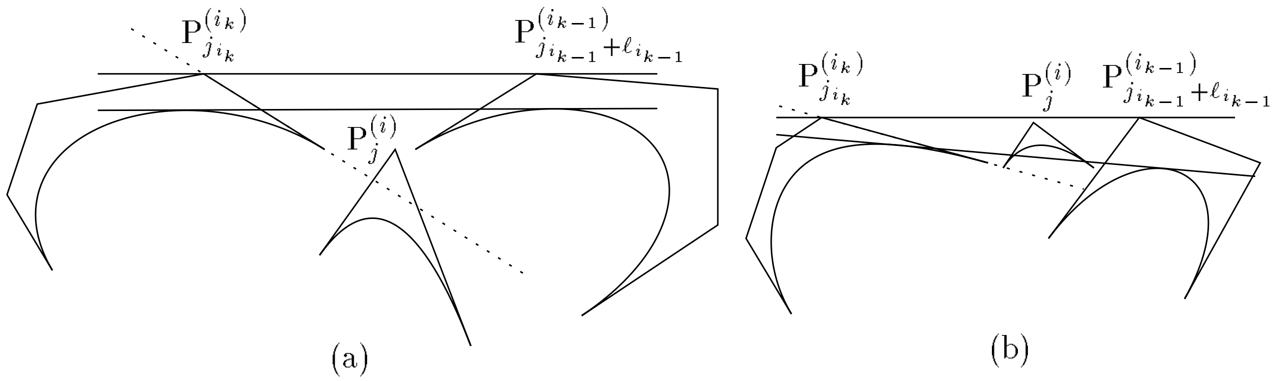


Figure III.16 *Les deux positions possibles de la courbe $\mathcal{B}_i$ par rapport à la droite* $\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}$

Nous pouvons voir sur la figure III.16 que ε_0 est un majorant assez grossier pour le plus petit ε pour lequel la polycourbe est dégénérée à ε près, mais une meilleure évaluation n'a pas pu être obtenue, car nous ne savons pas dans lequel des deux cas de la figure se trouvent les trois courbes.

Si $i = i_{k-2}$, ε_0 dependra de trois valeurs : la distance de Hausdorff entre la courbe $\mathcal{B}_i$ et son polygone de contrôle, que nous majorerons toujours par $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$, la distance du point $\mathrm{P}_j^{(i)}$ à la droite $\mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{j_{i_k}}^{(i_k)}$ et la distance de ce point à la droite $\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_1^{(i_k)}$. En connaissant ces valeurs, nous définissons ε_0 par

$$\varepsilon_0 = \max\{\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]) + \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{j_{i_k}}^{(i_k)}), \mathrm{d}(\mathrm{P}_j^{(i)}, \mathrm{P}_{j_{i_{k-1}}+\ell_{i_{k-1}}}^{(i_{k-1})}\mathrm{P}_{j_{i_k}}^{(i_k)})\}$$

Dans ce cas aussi, deux positions de la courbe $\mathcal{B}_i$ par rapport à la droite $\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_k}$ sont possibles, ce qui nous oblige à considérer une majoration grossière de la valeur minimale des ε pour lesquels la polycourbe est dégénérée à ε près.

Les calculs à faire s'il existe $k \in \mathcal{K}$ tel que la condition (III.9.ii) ne soit pas satisfaite par la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ sont symétriques et nous ne les détaillerons plus. Supposons qu'il existe

$k \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{B}_{i_k}$ ne satisfasse pas la condition (III.9.iii). Dans ce cas, nous utilisons

$$\varepsilon_0 = \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_{i_k}, [\mathrm{P}_0^{(i_k)}\mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)}])$$

car si $\mathcal{B}_{i_k} \cap \Delta_{i_{k-1}i_{k+1}} = \emptyset$ (engendrant ainsi une incohérence entre la structure de l'enveloppe convexe de la polycourbe et celle de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle), alors cet ε_0 est un majorant pour la distance $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_{i_k}, \Delta_{i_{k-1}i_{k+1}})$. La droite $\Delta_{i_{k-1}i_{k+1}}$ est la tangente commune des courbes $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ et $\mathcal{B}_{i_{k-1}}$ qui réalise l'enveloppe droite de ces deux courbes.

Nous ne donnons pas le schéma de la procédure `calcul_epsilon`, car elle ne contient pas autre chose que les calculs décrits ci-dessus. Il est facile à voir que la complexité d'un tel calcul est $\mathcal{O}(d)$, d étant le degré maximal des courbes de Bézier composant la polycourbe.

III.5.2.5. La procédure `pert_top_r_eps_près`

La structure de cette procédure est la suivante :

```
1.   pert_top_r_eps_près(polycourbe ℬ, réel ε, liste_courbes I,
                              tableau_pointers J)
2.   courbe_de_Bézier *P = (premier élément de I).ident_courbe
3.   begin
4.   si non-verifier_en_arrière(ℬ,P,I)
5.       si maj_epsilon_1(P,I, ℬ)≥ ε
6.           begin
7.           ajouter P à J
8.           aller à la ligne 22
9.           end
10.  si non-verifier_en_avant(ℬ,P,I)
11.      si maj_epsilon_2(P, I,ℬ)≥ ε
12.          begin
13.          ajouter P à J
14.          aller à la ligne 22
15.          end
16.  si non-verifier_sur_place(ℬ,P,I)
17.      si maj_epsilon_3(P, I,ℬ)≥ ε
18.          begin
19.          ajouter P à J
20.          aller à la ligne 22
21.          end
22.  si P ne correspond pas au dernier élément de I
23.      begin
24.      faire passer P à l'élément suivant dans l'ensemble I
25.      aller à la ligne 4
26.      end
27.  end
```

Nous remarquons que cette procédure est, structurellement, assez différente de `pertinence_topologique_r`, mais le principe est le même. Les procédures `verifier_en_arrière`, `verifier_en_avant` et `verifier_sur_place` sont celles appelées aussi par `pertinence_topologique_r`. La procédure `maj_epsilon_1` calcule, en utilisant la formule donnée dans le paragraphe précédent, la valeur de ε_0, en sachant que la courbe $\mathcal{B}_\text{i}$ ne satisfait pas la condition (III.9.i), car `verifier_en_arrière` a retourné, pour cet indice, "non". De la même manière, `maj_epsilon_2` calcule la valeur de ε_0 quand la courbe $\mathcal{B}_i$ ne satisfait pas la condition (III.9.ii) et `maj_epsilon_3` donne la valeur de ε_0 quand $\mathcal{B}_i$ ne vérifie pas la condition (III.9.iii). Si une des conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii) n'est pas satisfaite et en plus le ε_0 correspondant à cette condition est supérieur ou égal à ε, la courbe $\mathcal{B}_i$ doit être subdivisée, car l'enveloppe convexe du polygone de contrôle peut ne pas être topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe, à cause de la condition non vérifiée, et la polycourbe peut ne pas être dégénérée à ε près, car ε_0 calculé n'est pas inférieur à ε.

Les procédures `maj_epsilon_i`, pour `i` $\in \{1, 2, 3\}$, ont chacune la complexité $\mathcal{O}(d)$. Nous pouvons remarquer que si, pour $k \in \mathcal{K}$ donné, il existe plusieurs sommets $\mathrm{P}_j^{(i)}$ tels que la condition (III.9.i) soit contredite, nous obtenons une valeur de ε_0 pour chacun de ces sommets. Ces valeurs ne sont généralement pas égales, mais elles sont toutes des majorations pour le minimum de l'ensemble des ε pour lesquels la polycourbe est dégénérée à ε près. Notre procédure devrait chercher la plus petite valeur de ε_0, pour réduire le nombre d'itérations à faire dans `Enveloppe_convexe_topologique_1` et `Enveloppe_convexe_topologique_2`, mais à cause du coût que cette opération impliquerait pour les procédures de calcul de ε_0 il est plus pratique de prendre la valeur donnée par un tel sommet $\mathrm{P}_j^{(i)}$ quelconque. Nous voyons tout de suite qu'en utilisant cette méthode de calcul, la procédure `pert_top_r_eps_près` a la même complexité que la procédure `pertinence_topologique_r`, donc $\mathcal{O}(nd)$.

III.5.2.6. Le coût des procédures `Enveloppe_convexe_topologique_i`, `i=1,2`

Pour calculer la complexité de la procédure `Enveloppe_convexe_topologique_1`, il faut sommer les coûts des procédures `enveloppe_convexe_polygone_contrôle` (ligne 7), `pertinence_topologique` (ligne 8), `calcul_epsilon` (ligne 17) et du cycle des lignes 9-15. Mais nous remarquons que cette procédure a exactement la même structure que `Enveloppe_convexe_approchée`, à part les lignes 16-19, et qu'en plus les procédures appelées sont elles aussi les mêmes. La seule exception est constituée par la procédure `dist_inf_eps` appelée dans `Enveloppe_convexe_approchée`, qui est ici remplacée par `pertinence_topologique_r`. Mais comme ces deux procédures ont la même complexité, cette 'substitution' n'affecte pas le coût total du programme. Le coût qui nous intéresse sera, en utilisant les notation du sous-chapitre précédent, $\mathcal{O}\big(n_0 d^2 M(M+1)\big)$, auquel il faut ajouter le coût de `calcul_epsilon`. Nous avons vu que le coût du calcul d'un ε_0 est $\mathcal{O}(d)$ et, pour des raisons déjà mentionnées, nous aurons au plus $6n_0$ valeurs de ε_0 à calculer (au plus 3 valeurs, correspondant chacune à la non-vérification d'une des conditions du lemme III.9, pour chaque courbe de Bézier dont l'indice se trouve dans l'ensemble $\mathcal{I}_0$, dont le cardinal est au plus $2n_0$) et il faudra après calculer le maximum de toutes ces valeurs, et par conséquent la procédure `calcul_epsilon` coûtera, dans le cas le pire, $\mathcal{O}(n_0 d)$. Ainsi, la complexité totale de `Enveloppe_convexe_topologique_1` est $\mathcal{O}\big(n_0 d^2 M(M+1)\big)$.

Le même raisonement peut se faire pour le calcul de la complexité de `Enveloppe_convexe_topologique_2`, qui sera exactement la même que celle de `Enveloppe_convexe_approchée`, car `pert_top_r_eps_près` à le même coût que `dist_inf_eps`. Par contre, dans ce cas aucune évaluation du nombre d'itérations nécessaire pour que la procédure `pert_top_r_` `eps_près` construise un ensemble `J` vide n'est possible, et par conséquence le coût sera $\mathcal{O}\big(n_0 d^2 k_T(k_T+1)\big)$, où k_T est le nombre total (inconnu) d'itérations.

III.5.2.7. L'algorithme implémenté

Nous avons présenté deux schémas d'algorithme de calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure. Le premier de ces deux algorithmes, `Enveloppe_convexe_topologique_1`, a l'avantage d'un coût contrôlable par l'utilisateur et l'inconvénient de retourner un résultat qui peut être assez éloigné du résultat désiré. Le deuxième algorithme, `Enveloppe_convexe_topologique_2`, a les caractéristiques opposées, le résultat peut être contrôlé par l'utilisateur, mais le coût échappe à tout contrôle.

Généralement, la qualité du résultat obtenu est la plus importante, la complexité de l'algorithme utilisé passant en deuxième. Par conséquent, c'est le deuxième des algorithme proposés qui sera privilégié pour une implémentation. En regardant l'étude de coût faite le paragraphe précédent, nous voyons que pour un nombre égal d'itérations les algorithmes `Enveloppe_convexe_topologique_1` et `Enveloppe_convexe_topologique_2` ont la même complexité. Mais nous pouvons facilement remarquer qu'il y a plus d'opérations à faire pour une itération de `Enveloppe_convexe_topologique_2` que pour l'itération correspondante de `Enveloppe_convexe_topologique_1`, les opérations supplémentaires étant nécessaires au calcul de ε_0. Dans certains cas, il peut y avoir même deux fois plus d'opérations à faire pour `Enveloppe_convexe_topologique_2` que pour `Enveloppe_convexe_topologique_1`.

Pour "alléger" le coût du programme que nous proposons, nous allons implémenter un algorithme combinant les deux décrits précédement. Il est clair que le calcul des ε_0 n'est pas important pendant les premières itérations, car les valeurs des ε_0 dans les phases du début du déroulement de l'algorithme sont, généralement, relativement grandes. Nous pouvons donc exécuter un certain nombre d'itérations sans nous poser le problème de la dégénérescence à ε près. Ainsi, les quinze premières lignes de `Enveloppe_convexe_topologique_1` se recopient identiquement dans le schéma de l'algorithme que nous décrivons ici, et que nous appellerons `Enveloppe_convexe_topologique`. Si après M itérations (nous utiliserons $M = 15$) l'enveloppe convexe du polygone de contrôle n'est toujours pas topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe, nous avons des bonnes raisons de supposer que la polycourbe est dégénérée à ε près pour une valeur de ε petite, et nous allons donner le ε maximal admissible. La procédure finit donc avec les lignes 7-14 de `Enveloppe_convexe_topologique_2`. La remarque à faire est que les deux procédures construisant l'ensemble `J` qui est comparé à l'ensemble vide pour le test d'arrêt, `pertinence_topologique_r` et `pert_top_r_eps_près`, sont appelées par cet algorithme.

III.6. L'enveloppe convexe "mixte"

Il est parfois utile de trouver pour une polycourbe donnée l'enveloppe convexe approchée et en même temps la description de l'enveloppe convexe topologique. Ces deux enveloppes convexes étant, comme décrit dans les deux sections précédentes, des objets de natures différentes, il n'est pas possible de fournir un objet qui ait à la fois leurs propriétés respectives. Nous pouvons, par contre, calculer un polygone de contrôle de la polycourbe dont l'enveloppe convexe soit topologiquement pertinente au sens restreint pour celle de la polycourbe, tout en n'étant pas séparée de celle-là par une distance de Hausdorff supérieure à un ε donné.

Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier et ε un réel positif. En utilisant les notations des chapitres précédents, pour que le polygone de contrôle courant de $\mathcal{B}$ puisse donner en même temps une approximation de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ avec une erreur inférieure à ε et la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ les tableaux `J'` et `J"`, donnés respectivement par les procédures `dist_inf_eps` et `pertinence_topologique_r`, doivent être tous les deux vides. Le schéma d'un algorithme calculant le polygone de contrôle voulu pourrait alors être le suivant :

```
Enveloppe_convexe_mixte(polycourbe ℬ, réel ε, polygone_contrôle 𝒫)
liste_courbes I
tableaux_pointeurs J', J"
begin
lecture_données(ℬ,ε)
enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
dist_inf_eps(ℬ,I,ε,J')
pertinence_topologique_r(ℬ,I,J")
tant que J'∪J"≠ ∅
     begin
     subdivision(ℬ,J'∪J")
     enveloppe_convexe_polygone_contrôle(ℬ,I)
     dist_inf_eps(ℬ,I,ε,J')
     pertinence_topologique_r(ℬ,I,J")
     end
écriture_resultats(ℬ,I,𝒫)
end
```

À chaque itération, chacun des B-polygones $\mathcal{P}_i$ identifiés par le tableau `I`, donc qui participe à la frontière de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle de la polycourbe, subit les deux types de test, ceux nécessaires pour assurer une approximation avec une erreur inférieure à la valeur de ε donnée et qui demandent le calcul de $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$, et ceux donnés par les conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii). Cet algorithme minimise le nombre d'itérations à faire, mais pas le nombre d'opérations.

En effet, dans la plupart des cas le tableau `J'` contiendra, au moins pendant les premières itérations, des pointeurs à toutes les courbes de Bézier composant la polycourbe identifiées par le tableau `I` et ayant le caractère associé "y" (voir le paragraphe III.3.1), qui sont toutes les courbes de Bézier données par l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}}_0$ de la formule (III.1). Les exceptions à cette règle peuvent être constituées par les polycourbes pour lesquelles il existe une grande disproportion (des ordres de grandeur) entre

$$\max_{i\in\widetilde{\mathcal{I}}_0}\left(\max_{j\in\{1,\ldots,m_i\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_{j-1}^{(i)},\mathrm{P}_j^{(i)})\right) \qquad \text{et} \qquad \min_{i\in\widetilde{\mathcal{I}}_0}\left(\max_{j\in\{1,\ldots,m_i\}} \mathrm{d}(\mathrm{P}_{j-1}^{(i)},\mathrm{P}_j^{(i)})\right)$$

Tant que le tableau `J'` designe les mêmes courbes de Bézier que l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}}_0$, nous aurons évidemment `J"`$\subset$`J'`, car nous ne subdivisons jamais une courbe dont l'indice ne se trouve pas dans $\widetilde{\mathcal{I}}_0$. La conséquence de cette inclusion est qu'à chaque itération l'algorithme exécute $3\,\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{I}}_0)$ tests inutiles, correspondant à la procédure `pertinence_topologique_r`.

Pour ces raisons, l'algorithme qui a été implémenté correspond au schéma suivant :

```
1.   Enveloppe_convexe_mixte(polycourbe B, réel ε, polygone_contrôle P)
2.   begin
3.   enveloppe_convexe_approchée(B, ε)
4.   enveloppe_convexe_topologique(B)
5.   polygone_de_contrôle(B, P)
6.   end
```

Les procédures des lignes 3 et 4 sont les deux algorithmes amplement décrits dans les deux chapitres précédents. La procédure de la ligne 5 construit le polygone de contrôle d'une polycourbe donnée, elle est brièvement présentée dans le paragraphe III.3.2.2. Ce nouvel algorithme traite aussi les cas dégénérés, car l'algorithme de la procédure `enveloppe_convexe_topologique` le fait. Remarquons que les itérations effectuées par `enveloppe_convexe_approchée` sont prises en compte par le compteur d'itérations du premier cycle de l'algorithme `enveloppe_convexe_topologique` (qui est le cycle des lignes 10-16 de `enveloppe_convexe_topologique_1`).

Si nous supposons que l'algorithme `enveloppe_convexe_topologique` a décelé une possibilité de dégénérescence pour la polycourbe $\mathcal{B}$, il est très facile à voir que le ε_{min} minimal pour lequel nous avons une dégénérescence à ε-près de $\mathcal{B}$ est inférieur à la valeur que nous avons donnée pour le calcul de l'enveloppe convexe approchée à ε-près. Cette observation est intéressante, car les valeurs ε_0 calculées par les procédures `vérifier_en_arrière`, `vérifier_en_avant` et `vérifier_sur_place` sont, comme nous l'avons remarqué, des majorations très grossières de ε_{min}.

III.7. Résultats numériques

Les algorithmes décrits dans les sections précédentes ont été implémentés en C++, en utilisant, pour l'interface graphique, la bibliothèque de fonctions LEDA. Dans cette section nous présentons les résultats obtenus avec ces programmes. Avant de commencer, précisons que l'unité de mesure (utilisée pour l'évaluation de toutes les distances) est choisie telle que 1 corresponde à 1 mm sur un écran de 17 pouces en résolution 1280×1020.

Les programmes ont été appliquées à un échantillon de 85 polycourbes et nous avons calculé des moyennes pour diverses valeurs qui nous ont semblé rélévantes pour le fonctionnement et les complexités des algorithmes. Le tableau suivant présente les moyennes pour :

- n, le nombre de courbes de Bézier composant la polycourbe ;
- m, le nombre de sommets du polygone de contrôle ;
- κ_T, le nombre d'itérations nécessaires pour que les tests d'arrêt respectifs soient satisfaits ;
- n_f/n_0, le taux de croissance (en courbes de Bézier) de la polycourbe, c'est-à-dire le rapport entre la taille de la polycourbe initiale et celle de la polycourbe satisfaisant le test d'arrêt des algorithmes respectifs ;
- m_f/m_0, le taux de croissance (en sommets) du polygone de contrôle.

	Polycourbe initiale	Env. conv. topologique	Env. conv. approchée		
			$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$
n	$12,63$	$37,74$	$44,29$	$57,55$	$70,59$
m	$42,56$	$148,87$	$177,235$	$233,67$	$288,35$
κ_T	—	$6,11$	$4,7$	$6,33$	$7,88$
n_f/n_0	—	$2,99$	$3,51$	$4,656$	$5,59$
m_f/m_0	—	$3,62$	$5,11$	$6,7$	$8,25$

La première remarque que nous pouvons faire est que l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe approchée génère une croissance nettement plus importante de la polycourbe et du polygone de contrôle que l'algorithme calculant la structure topologique de cette enveloppe convexe, même quand le nombre d'itérations nécessaires pour l'enveloppe convexe topologique est largement plus grand que le nombre d'itérations appliquées pour l'enveloppe convexe approchée, comme c'est le cas quand $\varepsilon = 10^{-1}$. Ceci s'explique par le fait que les subdivisions se font, dans le cas de l'enveloppe convexe topologique, de manière bien plus sélective que dans le cas de l'enveloppe convexe approchée, où toutes les courbes designées par l'ensemble $\widetilde{\mathcal{I}}_0$ sont subdivisées.

Une autre observation est que n_f/n_0, qui dans l'étude de coût faite dans les paragraphes précédents avait été évalué à $2\kappa_T$, est légérement supérieur à $(2/3)\kappa_T$ pour l'enveloppe convexe approchée et inférieur à $\kappa_T/2$ pour l'enveloppe convexe topologique. Ainsi, n_f est toujours $\mathcal{O}(n_0)$, mais le facteur de proportionnalité est bien plus petit. Une autre remarque interessante est que le taux de croissance du polygone de contrôle est supérieure à celle de la polycourbe. Si toutes les courbes de Bézier composant une polycourbe avaient le même degré, et ceci pour chacune des polycourbes de notre échantillon, les deux taux de croissance auraient été égaux. L'inégalité existant entre eux signifie que les courbes qui ont été subdivisées sont, généralement, de degré supérieur aux celles qui ne l'ont pas été. Même ainsi, le taux de croissance du polygone de contrôle est plutôt de l'ordre de κ_T que de l'ordre de $2\kappa_T$, pour l'enveloppe convexe approchée, et de l'ordre de $\kappa_T/2$ pour l'enveloppe convexe topologique. Ceci se répercutera sur la complexité des algorithmes, car elle dépend directement de la taille du polygone de contrôle.

Il faut aussi mentionner que le coût, aussi bien théorique que pratique, de l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe approchée est considerablement réduit par l'utilisation du lemme III.3. En effet, si nous cherchions une approximation polygonale de l'enveloppe convexe, sans remplacer tout B-polygone dont tous les sommets sont des sommets de $\mathcal{Q}$ par la courbe de Bézier correspondante, mais en subdivisant cette courbe jusqu'à ce que la distance de Hausdorff entre elle et son B-polygone soit inférieure à la valeur ε donnée, alors la complexité théorique de l'algorithme serait $\mathcal{O}(n_0 d^2 2^{\kappa_T})$. Théoriquement, le taux de croissance de la polycourbe serait 2^{κ_T} et nous n'avons pas implémenté cette variante de l'agorithme pour pouvoir donner les valeurs obtenues pratiquement, mais nous estimons qu'elle serait à peu près de l'ordre de $2^{\kappa_T/2}$.

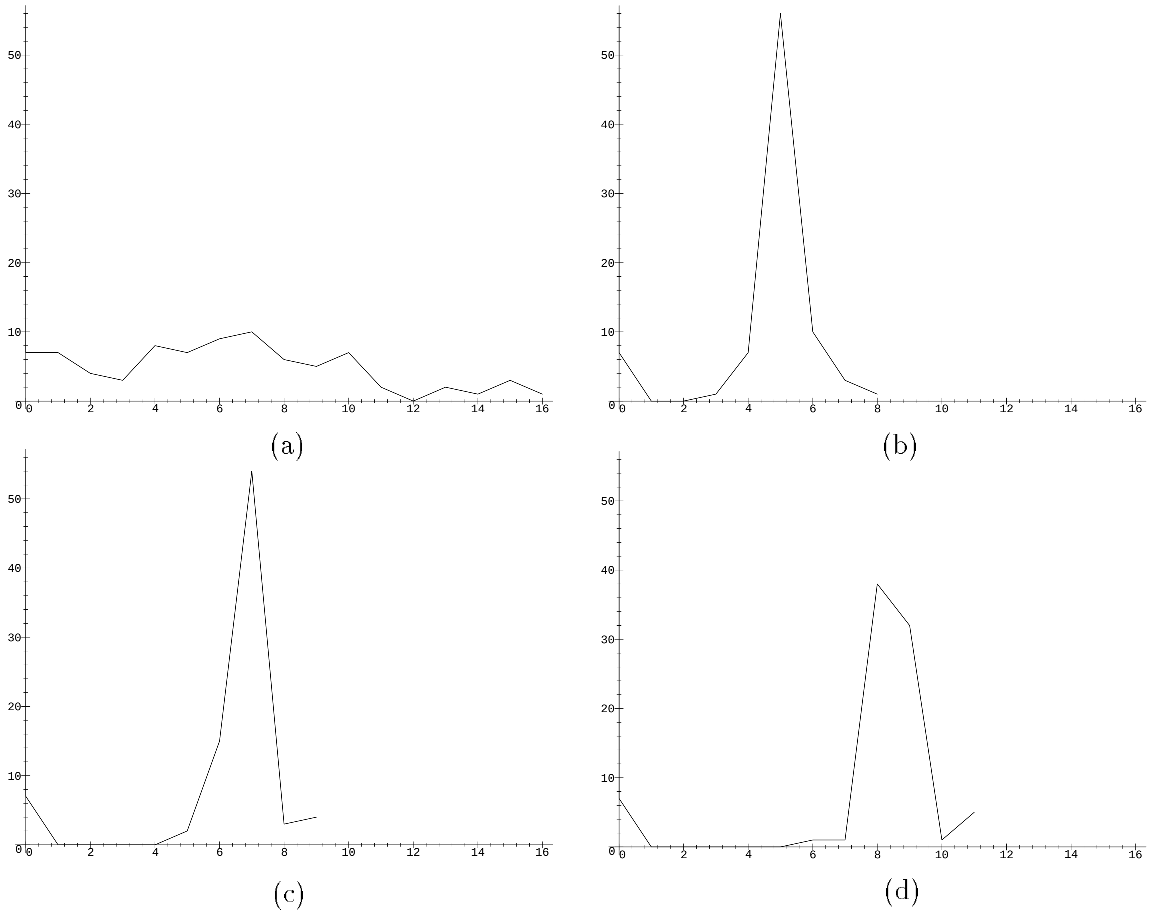


Figure III.17 *Répartition des polycourbes de l'échantillon par nombre d'itérations effectuées :* (a) *enveloppe convexe topologique ;* (b), (c), (d) *enveloppe convexe approchée respectivement pour* $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Le nombre maximal d'itérations appliquées par le programme calculant l'enveloppe convexe topologique a été, sur notre échantillon, 16, car il existe une polycourbe pour laquelle une possibilité de dégénérescence a été détectée (remarquons qu'après 16 itérations, la valeur de dégénérescence ε_0 calculée pour cette polycourbe était inférieure à 10^{-4}). Les nombres maximaux d'itérations appliquées par le programme de calcul de l'enveloppe convexe approchée ont été, respectivement pour $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, 8, 9 et 11. La figure III.17 présente les graphes de répartition des polycourbes par nombre d'itérations effectuées.

Si pour l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe approchée les graphes présentent une concentration très marquée à la proximité de la valeur moyenne du nombre d'itérations appliquées, ceci n'est pas le cas pour l'algorithme calculant l'enveloppe convexe topologique. Ce phénomène s'explique par la nature du résultat cherché. Les polycourbes de l'échantillon ont des dimensions des arêtes comparables, ce qui fait qu'elle doivent toutes subir plus ou moins le même nombre d'itérations pour que l'expression majorant la distance de Hausdorff entre une courbe de Bézier et son B-polygone que nous avons utilisée dans nos tests d'arrêt devienne inférieure à la valeur ε donnée, ce qui explique les pics des figures III.17(b), (c) et (d). Pour la relative uniformité de la répartition dans le cas de l'enveloppe convexe topologique nous ne sommes pas arrivés à trouver une explication dans les tests d'arrêt utilisés, sinon qu'ils n'influencent pas cette répartition, qui sera, par conséquent, plus ou moins aléatoire (l'échantillon testé étant alors trop petit pour que nous ayons une image complète du phénomène).

Nous remarquons que la répartition des polycourbes par nombre d'itérations effectuées nous donne très peu d'indications sur le nombre de subdivisions que les courbes de Bézier composant les polycourbes de l'échantillon subissent. Ceci est dû au fait que les polycourbes n'ont pas toutes la même taille, mais surtout au fait que pour une polycourbe donnée nous ne devons généralement pas subdiviser à chaque itération toutes les courbes de Bézier la constituant. La figure III.18 présente les graphes de repartition des courbes de Bézier par nombre de subdivisions appliquées pour les deux algorithmes (cette fois, le nombre de courbes est exprimé en pourcents du nombre total de courbes, qui avoisine 900).

Une précision doit être faite sur la notion de "courbe de Bézier subdivisée k fois".

Définition III.10. – *Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe et soit $\mathcal{B}_i$ une des courbes de Bézier de sa composition initiale. Nous dirons que $\mathcal{B}_i$ a été subdivisée k fois si parmi les courbes de Bézier de la composition finale de la polycourbe il exite une, appelons-la $\mathcal{B}_{i_f}$, telle que $\mathcal{B}_{i_f}$*`.rang` $= i$ *et* $\mathcal{B}_{i_f}$`.profondeur` $= k$.

Sur ces graphes, nous pouvons remarquer que près de la moitié des courbes de Bézier de l'échantillon ne sont jamais subdivisées, soit parce qu'elles n'ont aucune importance pour l'enveloppe convexe, soit parce que nous pouvons déterminer de manière exacte quelles parties d'elles se trouvent sur la frontière de l'enveloppe convexe (cas des courbes identifiées par les ensembles $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ du lemme III.2 et de celles dont tous les points de contrôle sont des sommets de $\mathcal{Q}$). Ces courbes-là mises à part, nous voyons que les graphes correspondant à l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe approchée ont la même alure que celles de la figure III.16 respectivement pour les mêmes valeurs de ε, et les pics de III.17(b), (c) et (d) s'expliquent de la même manière que ceux de III.16(b), (c) et (d).

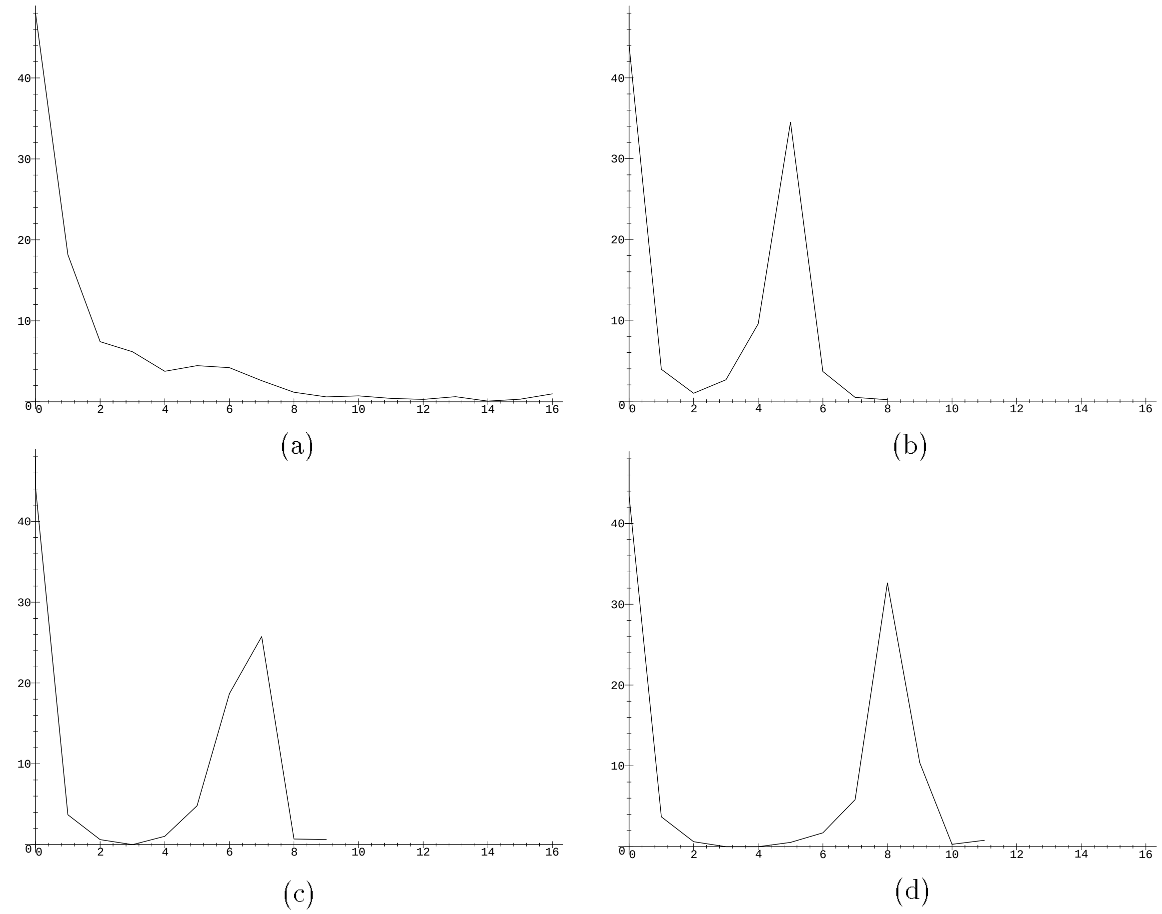


Figure III.18 *Repartition des courbes de Bézier par nombre de subdivisions appliquées :* (a) *enveloppe convexe topologique ;* (b), (c), (d) *enveloppe convexe approchée respectivement pour* $\varepsilon = 10^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Le graphe correspondant à l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe topologique nous amène des nouvelles informations, car la concentration des courbes vers les petits nombres de subdivisions n'était pas prévisible d'après le graphe III.17(a). À partir de 9 subdivisions, tous les pourcentages sont inférieurs à 1 (moins de 5% des courbes sont subdivisées 9 fois ou plus) et le graphe est à peu près décroissant. Ceci confirme le fait que les test d'arrêt utilisés sont très sélectifs, les subdivisions s'effectuent de manière très ponctuelle.

Pour conclure cette section, nous remarquons encore une fois que le calcul de l'enveloppe convexe approchée et celui de la structure topologique de l'enveloppe convexe sont des problèmes fondamentalement différents. Nous avons testé si les polygones de contrôle qui fournissent une approximation de l'enveloppe convexe satisfont aussi les critères de la pertinence topologique restreinte, et nous avons trouvé que parmi ceux fournissant une approximation pour $\varepsilon = 10^{-1}$ 55,3% ne le font pas, pour $\varepsilon = 10^{-2}$ il y a 44,7% qui ne vérifient pas ces critères et enfin parmi les polygones de contrôle donnant une approximation de l'enveloppe convexe de la polycourbe à $\varepsilon = 10^{-3}$ près il y a encore 29,41% dont l'enveloppe convexe n'est pas topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe.

Dans la dernière section de ce chapitre peuvent être trouvés quelques exemples de polycourbes faisant partie de notre échantillon.

III.8. Exemples

Présentons d'abord le déroulement de l'algorithme de calcul de la structure topologique de l'enveloppe convexe sur quelques exemples de polycourbes de notre échantillon. Nous ne ferons pas une présentation similaire pour l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe approchée, car son intérêt est moindre : toutes les courbes de Bézier identifiées par $\widetilde{\mathcal{I}}_0$ seront subdivisées.

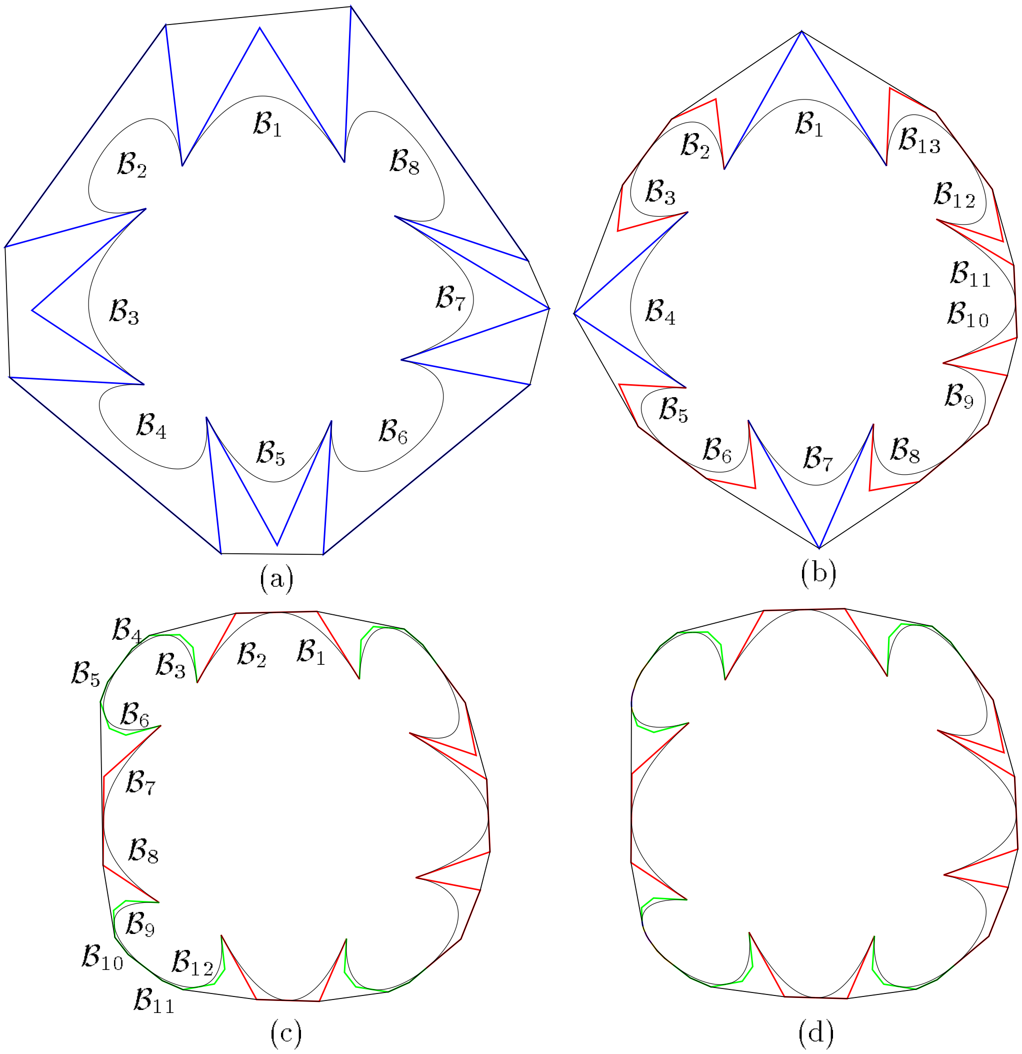


Figure III.19 (a) *aucune des courbes $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$ ne satisfait aucune des conditions (III.9.i), (III.9.ii), (III.9.iii) ;* (b) *les courbes $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_7$ ne satisfont pas (III.9.iii), les courbes $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_8$ ne satisfont pas (III.9.i), les courbes $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_{13}$ ne satisfont pas (III.9.ii) ;* (c) *aucun point de contrôle de $\mathcal{B}_7$ n'est un sommet de $\mathcal{Q}$, et par conséquent $\mathcal{B}_5$ ne satisfait pas (III.9.ii) et $\mathcal{B}_{10}$ ne satisfait pas (III.9.i) ;* (d) *après 6 itérations, l'enveloppe convexe du polygone de contrôle est topologiquement pertinente au sens restreint pour celle de la polycourbe (nous n'avons plus représenté les itérations 3,4 et 5)*

L'exemple suivant présente une situation très intéressante. Si les programmes de calcul de l'enveloppe convexe (aussi bien celui pour l'enveloppe convexe approchée que celui pour l'enveloppe convexe topologique) testent la pseudo-simplicité du polygone de contrôle de la polycourbe initiale, donnant un message d'erreur si elle n'est pas satisfaite, ce test serait trop coûteux à faire à chaque itération. Ainsi, les cas comme le suivant peuvent apparaître.

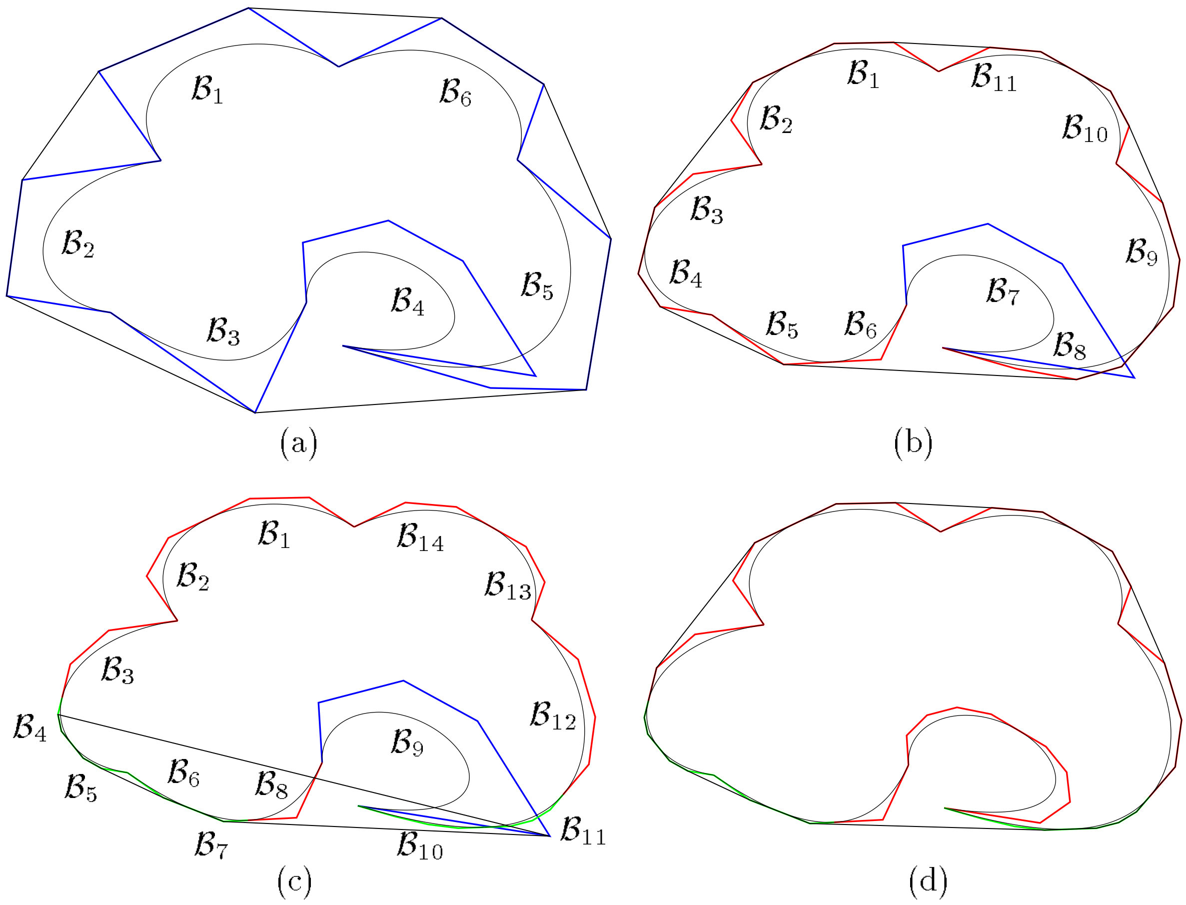


Figure III.20 (a) *les courbes $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6$ ne satisfont au moins une des conditions (III.9.i), (III.9.ii), (III.9.iii) ;* (b) *le sommet $\mathrm{P}_4^{(7)}$ se trouve à gauche de la droite orientée $\mathrm{P}_1^{(5)}\mathrm{P}_2^{(8)}$, donc la ligne polygonale $\mathrm{P}_1^{(5)}\mathrm{P}_0^{(6)}\mathrm{P}_1^{(6)}\mathrm{P}_0^{(7)}\mathrm{P}_1^{(7)} \ldots \mathrm{P}_4^{(7)}\mathrm{P}_0^{(8)}\mathrm{P}_1^{(8)}\mathrm{P}_2^{(8)}$ est identifiée comme une "poche" du polygone $\mathcal{P}$, même si celui-ci n'est pas simple, et les courbes $\mathcal{B}_5$ et $\mathcal{B}_8$ doivent être subdivisées ;* (c) *cette fois, $\mathrm{P}_4^{(9)}$ se trouve à droite de la droite orientée réalisant l'enveloppe convexe droite des polygones $\mathcal{P}_7$ et $\mathcal{P}_{10}$, et comme le polygone de contrôle de la polycourbe est inclus dans le demi-plan gauche délimité par la droite orientée $\mathrm{P}_1^{(7)}\mathrm{P}_4^{(9)}$, l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle trouve un objet complètement erroné. La courbe $\mathcal{B}_9$ ne satisfait pas (III.9.i) et doit être subdivisée ;* (d) *le polygone de contrôle redevient simple, et il le restera jusqu'à ce que les conditions de pertinence topologique restreinte soient satisfaites. Au total, six itérations sont nécessaires.*

Nous n'avons pas fait une étude complète de ce type de situation, mais pour les exemples donnés les résultats ont toujours été corrects, même si à une étape intermédiaire des erreurs étaient apparues. La question qui se pose est s'il est possible qu'une courbe de Bézier dont le B-polygone se trouve dans une telle position génératrice de problèmes peut satisfaire les trois conditions (III.9.i), (III.9.ii) et (III.9.iii), ou si elle va toujours être subdivisée jusqu'à la disparition du problème.

Les deux exemples suivants montrent respectivement l'importance des conditions (III.9.i) et (III.9.iii) pour la pertinence topologique restreinte de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe. La condition (III.9.ii) est la symétrique de (III.9.i).

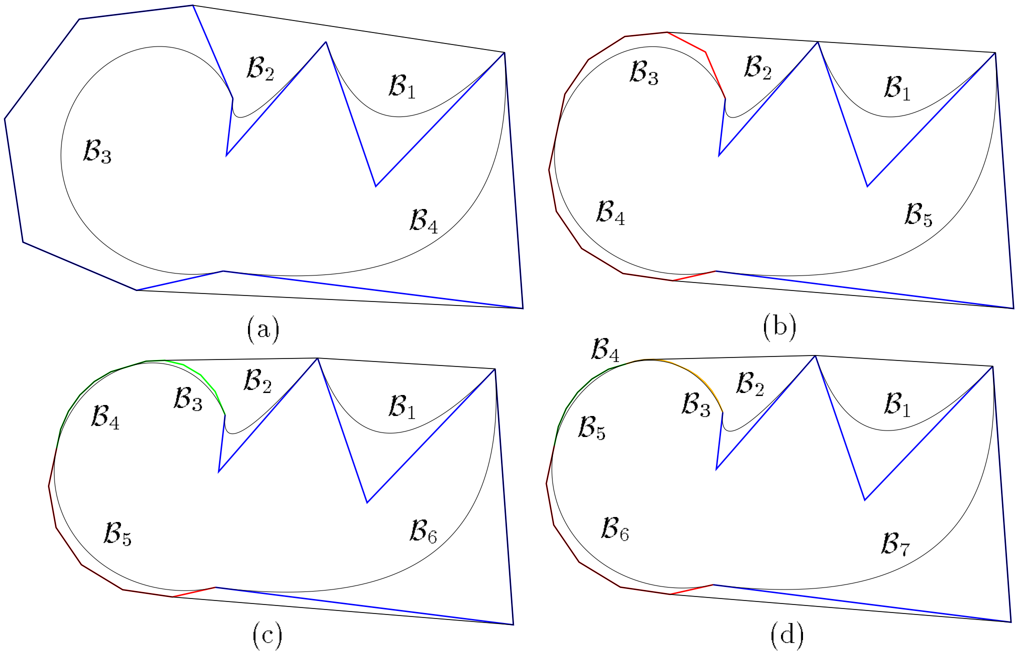


Figure III.21 (a) $\mathcal{B}_3$ *ne satisfait pas (III.9.i) et* $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ *n'est pas topologiquement pertinente pour* $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ *;* (b), (c) $\mathcal{B}_3$ *ne satisfait pas (III.9.i), mais il y a pertinence topologique ;* (d) $\mathcal{B}_4$ *satisfait (III.9.i).*

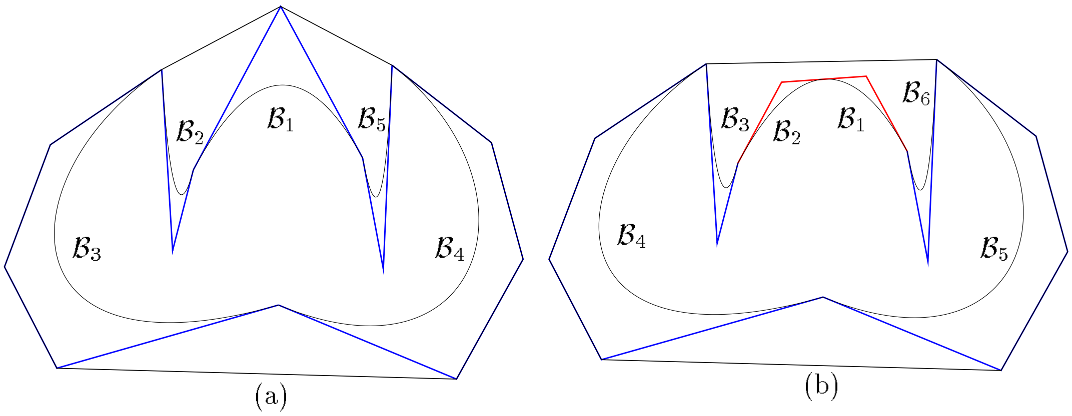


Figure III.22 (a) *les courbes* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ *satisfont (III.9.i), (III.9.ii), mais* $\mathcal{B}_1$ *ne satisfait pas (III.9.iii) et l'enveloppe convexe de* $\mathcal{P}$ *n'est pas topologiquement pertinente pour celle de* $\mathcal{B}$ *;* (b) *les trois conditions sont satisfaites et nous avons pertinence topologique restreinte de* $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ *pour* $\mathcal{E}(\mathcal{B})$*.*

Chapitre IV

Arrangements de polycourbes : résultats théoriques

IV.1. Introduction

Les arrangements constituent un des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique. Leurs applications sont très nombreuses, allant de la conception de logiciels de dessin 2D [Gan89] à la localisation d'un objet dans une scène et le calcul de trajectoires, voir [Ede92]. Dans les deux chapitres suivants, nous nous intéressons uniquement aux arrangements du plan.

Les plus simples (et les plus étudiés) sont les arrangements de droites. Un grand nombre de résultats ont été donnés pour eux, aussi bien d'intérêt théorique (par exemple le théorème de la zone, [Ede86]) que d'intérêt calculatoire (l'étude de la robustesse des algorithmes, [For91]). Des études ont aussi été menées pour des objets ayant une topologie plus complexe, comme les segments [Boi95], [Pol87], [Gui89], et les courbes (de Jordan) [Ede92], [Sno89], [Gan89], [Mil89], etc. (les référence bibliographiques que nous présentons ici ne peuvent pas et ne prétendent pas être exhaustives). Nous passons brièvement en revue quelques articles qui nous ont semblé illustrer les approches généralement adoptées dans l'étude des arrangements de courbes.

Un arrangement peut être construit, principalement, de deux façons : incrémentale ou par balayage. Pour chacune, des opérations élémentaires sont nécessaires : calcul de l'intersection (de cardinal pas forcément 1) de deux courbes, calcul des tangentes verticales à une courbe, etc.

[Ede92] considère ces calculs réalisables de manière exacte et en $\mathcal{O}(1)$, les auteurs concentrant leurs efforts sur l'extension des principaux résultats théoriques des arrangements de droites aux arrangements de courbes (théorème de la zone, complexité combinatoire de l'arrangement). [Sno89] n'étudie pas directement la construction des arrangements, mais les cas où un arrangement dont les courbes se coupent au plus k fois, pour k donné, peut être balayé par une courbe ne coupant aucune de celles de l'arrangement en plus de k points. Les auteurs présentent plusieures façons de balayer un arrangement et donnent, comme application, quelques résultats combinatoires. Les primitives de calcul dont nous avon parlé sont utilisées implicitement, sans être mentionnées.

[Mil89] est consacré à la définition d'un cadre de travail rigoureux en arithmétique à précision finie, l'auteur introduisant la notion de *décomposition cylindrique approximative* du plan et décrivant un algorithme qui la construit.

[Gan89] étudie à peu près le même problème que nous allons traiter, les arrangements de courbes de Bézier, mais dans un esprit assez différent, car le but final du travail des auteurs est la construction d'un outil cohérent de dessin 2D. Ainsi, ils utilisent des approximations polygonales des courbes de Bézier, tout comme nous allons faire, mais ne s'en servent pas pour déterminer la structure combinatoire de l'arrangement de courbes et se concentrent sur le fait d'assurer que la topologie de cet arrangement de lignes polygonales est correcte (même si elle n'est pas la même que celle de l'arrangement de courbes).

La section trois de ce chapitre est consacrée aux rappels sur les arrangements de droites du plan et la section quatre présente brièvement les principaux résultats concernant les arrangements de courbes nous intéressant. Une attention toute spéciale est accordée aux résultats contenus dans la thèse de Vo Phi [VoP94], dont nous nous sommes inspirés pour la façon de poser le problème des arrangements de polycourbes.

La section cinq est dédiée aux arrangements de polycourbes, en montrant comment les notions de base peuvent être adaptées au cas de ce type d'arrangements, en particulier en ce qui concerne l'équivalence d'arrangements. Dans la première partie de la section, des critères d'équivalence de deux arrangements de polycourbes (quelconques) sont donnés, et dans la dernière sous section est prouvée l'existence d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier simple donné.

IV.2. Concentré de chapitre (IV)

Les niveaux de lecture sont plus difficiles à définir dans ce chapitre, qui contient en une bien plus grande mesure que les précédents des rappels. Ainsi, si vous très familier avec les arrangements, la troisième section peut être ignorée, tout comme une bonne partie de la quatrième. Lisez quand même les définitions IV.12 et IV.13, pour vous familiariser avec les notations. Et surtout, ne passez pas sans lire la sous section IV.4.4, présentant les résultats de Khanh Vo Phi, dont, si vous étes intéressé par les arrangements, je vous recommande de lire la thèse (pour écourter la lecture d'un chapitre, rien de tel que de recommander la lecture d'une autre thèse...).

Pour la section IV.5, je ne crois pas que plus de deux niveaux de lecture peuvent être raisonnablement trouvés. Le premier consiste à lire attentivement toute la première sous section, contenant de nombreuses définitions, et seulement les énoncés des résultats IV.23 et IV.24, en accordant le temps nécessaire à la convention de la page 147. Le deuxième niveau est celui de la lecture intégrale.

IV.3. Bref rappel sur les arrangements d'hyperplans

La notion d'arrangement est définie pour un ensemble fini d'hyperplans de l'espace affine E^d, mais nous donnerons ici les définitions et les principales propriétés uniquement pour $d = 2$, donc pour les arrangements de droites du plan. Une présentation complète du cas général peut facilement être trouvée dans la littérature (par exemple [Ede87]).

IV.3.1. *Définitions concernant les arrangements de droites*

Définition IV.1. – *Un ensemble fini de droites $\mathcal{D}$ dans le plan définit un découpage de ce plan en un ensemble de parties connexes de dimension* 0, 1 *ou* 2. *Ce découpage s'appelle l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de l'ensemble $\mathcal{D}$.*

Définition IV.2. –

1. *Les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ s'appellent les faces de l'arrangement.*
2. *Les éléments de dimension* 0 *de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ s'appellent sommets de l'arrangement.*
3. *Les éléments de dimension* 1 *s'appellent arêtes de l'arrangement.*
4. *Les éléments de dimension* 2 *représentent les cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.*

Définition IV.3. – *Soient f_1 et f_2 deux faces de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Nous dirons que f_2 est une sous-face de f_1 si et seulement si la dimension de f_2 est égale à la dimension de f_1 moins 1 et si f_2 est incluse dans la frontière (topologique) de f_1. Les faces f_1 et f_2 sont alors dites incidentes, ou elles définissent une incidence.*

Une notion fondamentale dans les résultats présentés par Edelsbrunner [Ede87] est celle de *vecteur de position* d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Pour pouvoir l'introduire, le *demi-plan positif* et le *demi-plan négatif* doivent être définis pour toute droite du plan. Il existe plusieurs manières d'établir les demi-plans positif et respectivement négatif déterminés par une droite donnée, dépendant de la représentation choisie pour la droite. Par exemple, si une droite Δ est donnée par l'équation

$$(\Delta)\ :\ ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

nous posons $\Delta^+ = \{\mathrm{P}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by+c > 0\}$ le demi-plan positif et $\Delta^- = \{\mathrm{P}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c < 0\}$ le demi-plan négatif déterminé par Δ. Cette définition est utilisée par Vo Phi [VoP94]. Si Δ est une droite non-verticale donnée par l'équation

$$(\Delta)\ :\ y = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

nous pouvons poser $\Delta^+ = \{\mathrm{P}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > ax + b\}$ le demi-plan positif et $\Delta^- = \{\mathrm{P}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < ax + b\}$ le demi-plan négatif déterminés par Δ, celle-ci étant la définition utilisée par Edelsbrunner [Ede87]. Nous mentionnons encore une façon de fixer les demi-plans positif et négatif définis par une droite Δ ne passant pas par l'origine, qui ne dépend pas de la représentation de la droite, mais de la position de l'origine du plan : le demi-plan Δ^+ sera celui qui ne contient pas l'origine et le demi-plan Δ^- sera celui qui la contient.

Remarque. Dans ce chapitre, pour toutes les figures présentant des exemples faisant intervenir des vecteurs de position c'est cette dernière définition des régions positive et négative déterminées par une droite qui a été utilisée.

Supposons que la façon de définir Δ^+ et Δ^- est fixée pour toute droite Δ et soit $\mathcal{D} = \{\Delta_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de droites du plan, pour n un entier positif. Pour tout point P nous posons

$$v_{\Delta_i}(\mathrm{P}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i^+ \\ 0 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i \\ -1 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i^- \end{cases}$$

Définition IV.4. – *Le vecteur de position d'un point* P *par rapport à l'arrangement* $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ *est*

$$V_{\mathcal{D}}(\mathrm{P}) = (v_{\Delta_1}(\mathrm{P}), v_{\Delta_2}(\mathrm{P}), \ldots, v_{\Delta_n}(\mathrm{P}))$$

L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ peut alors être considéré comme l'ensemble des plus grandes parties connexes de $\mathbb{R}^2$ dont les points ont le même vecteur de position.

Définition IV.5. – *Le vecteur de position* $V_{\mathcal{D}}(f)$ *d'une face* f *de* $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ *est défini comme étant égal au vecteur de position* $V_{\mathcal{D}}(\mathrm{P})$ *d'un point* P *quelconque de* f.

Nous nous intéressons particulièrement aux arrangements introduits par la définition suivante :

Définition IV.6. – *Nous dirons qu'un arrangement* $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ *est simple si et seulement si deux droites quelconques de* $\mathcal{D}$ *ont exactement un point en commun et trois droites quelconques de* $\mathcal{D}$ *sont disjointes.*

La figure IV.1 présente des exemples d'arrangements du plan.

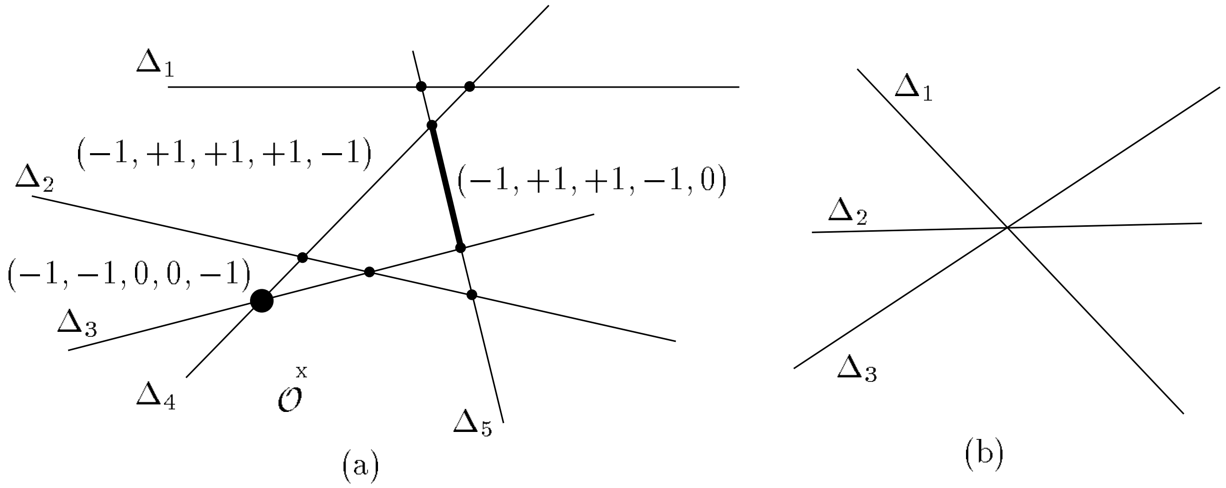


Figure IV.1 (a) *arrangement simple de cinq droites et quelques vecteurs de position ;* (b) *arrangement non-simple de trois droites*

IV.3.2. *Propriétés des vecteurs de position*

Quelques relations très intuitives relient les dimensions des faces et leurs vecteurs de position. Ainsi, toute cellule c a la propriété $v_{\Delta_i}(c) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour toute arête a, il existe un indice i_a tel que $v_{\Delta_{i_a}}(a) = 0$. Si toutes deux droites de l'ensemble $\mathcal{D}$ sont distinctes, alors l'indice i_a est unique et $v_{\Delta_i}(a) \neq 0$ pour tout $i \neq i_a$. Si s est un sommet, il existe deux indices $i_1 \neq i_2$ tel que $v_{\Delta_{i_1}}(s) = v_{\Delta_{i_2}}(s) = 0$, et si toutes trois droites de $\mathcal{D}$ sont disjointes, alors $v_{\Delta_i}(s) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$. Par conséquent, si $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est simple, la face f sera une cellule si et seulement si il n'y a aucun zéro dans l'écriture de son vecteur de position, elle sera une arête s'il y a exactement un zéro dans l'écriture de son vecteur de position et elle sera un sommet s'il y a exactement deux zéros dans l'écriture de son vecteur de position.

Nous pouvons facilement remarquer que les arrangements simples de droites satisfont la condition

$$f_1 \neq f_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow V_{\mathcal{D}}(f_1) \neq V_{\mathcal{D}}(f_2) \tag{IV.1}$$

Il en résulte l'affirmation suivante [VoP94] :

Propriété IV.7. – *Soient f_1 et f_2 deux faces de l'arrangement simple $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Alors f_2 est une sous-face de f_1 si et seulement si il existe un unique indice i_0 tel que*

$$v_{\Delta_{i_0}}(f_1) \neq 0, \quad v_{\Delta_{i_0}}(f_2) = 0 \quad \text{et} \quad v_{\Delta_i}(f_2) = v_{\Delta_i}(f_1)\ \forall i \neq i_0$$

IV.3.3. *Équivalence d'arrangements*

Définition IV.8. – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles de droites du plan ayant le même cardinal et soit $F\ :\ \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$.*

1. Nous dirons que F conserve les dimensions des faces si et seulement si l'image par F d'un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ est un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$, l'image d'une arête est une arête et l'image d'une cellule est une cellule.

2. Nous dirons que F conserve les vecteurs de position si et seulement si $V_{\mathcal{D}_1}(f) = V_{\mathcal{D}_2}(F(f))$

pour toute face f de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$.

3. Nous dirons que F conserve les incidences si et seulement si pour toutes deux faces f_1 et f_2 de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ nous avons

$$f_2 \text{ sous-face de } f_1 \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \Longleftrightarrow F(f_2) \text{ sous-face de } F(f_1) \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$$

Des définitions tout-à-fait similaires seront valables pour les arrangements de courbes, donc aussi pour les arrangements de polycourbes, et nous ne les donnerons plus. Nous rappelons deux définitions de l'équivalence (combinatoire) de deux arrangements qui peuvent être trouvées dans la littérature, l'une donnée par Grünbaum et l'autre par Edelsbrunner.

Définition [Grü72] **IV.9.** – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles finis de droites du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(IV.9.i) $\mathrm{card}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_2)$ *;*

(IV.9.ii) *il existe une fonction bijective $\varphi\ :\ \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ qui conserve les incidences.*

Définition [Ede87] **IV.10.** – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles finis de droites du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(IV.10.i) $\mathrm{card}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_2)$ *;*

(IV.10.ii) *il existe une fonction bijective $\psi\ :\ \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ qui conserve les dimensions des*

faces et leurs vecteurs de position.

Il n'est pas difficile à voir que dans le cas des arrangements de droites du plan la condition d'invariance de la dimension des faces par la fonction ψ de la définition IV.10 résulte de l'invariance des vecteurs de position. Plus, si l'un des arrangements est simple, l'autre le sera aussi et φ garde les incidences :

Propriété IV.11. – *Si deux arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents au sens de la définition IV.10, alors pour deux faces quelconques f_1 et f_2 de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ telles que f_2 soit une sous-face de f_1 $\psi(f_2)$ sera une sous-face de $\psi(f_1)$ dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$, où ψ est la fonction donnée par (IV.10.ii).*

La preuve de ce résultat découle immédiatement de la propriété IV.7 et de l'invariance des vecteurs de position par la fonction ψ. Il est aussi facile à montrer que si deux arrangements sont équivalents par la définition IV.9, alors la simplicité de l'un entraînera la simplicité de l'autre, et que la fonction φ de cette définition garde elle aussi les dimensions des faces.

Ainsi, dans le cas des arrangements de droites la définition de [Grü72] est plus générale que celle de [Ede87], qui l'implique. Elle est aussi "plus intrinsèque", indépendante du système de coordonnées du plan, fait reflété par le comportement des arrangements soumis à des transformations élémentaires du plan : translations, rotations, homoteties. Soit $\mathcal{D}_1$ un ensemble de droites et $\mathcal{D}_2$ son image par une telle transformation. Si nous pouvons facilement voir que $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents au sens de la définition IV.9, quelle que soit la transformation appliquée, ce n'est plus le cas, généralement, si nous considérons la définition IV.10. Pour chacune des manières (dont nous avons parlé dans le paragraphe IV.3.1) de définir les demi-plans positif et négatif déterminés par une droite donnée il existe des translations qui ne gardent pas l'équivalence des arrangements. Le même phénomène se produit pour les deux premières façons de définir Δ^+ et Δ^- pour une droite Δ donnée en ce qui concerne les rotations, pour n'importe quel centre de rotation nous pouvons trouver des angles de rotation qui font que l'arrangement obtenu après rotation ne soit pas équivalent à l'arrangement initial. Par contre, pour la troisième façon de définir Δ^+ et Δ^- il existe des centres de rotation (parmi lesquels l'origine) qui ne fourniront pas un nouvel arrangement, indépendamment de l'angle de rotation choisi. Enfin, pour les homotheties il existe pour chacune des manières de définir les deux demi-plans exactement un point, l'origine, pour lequel n'importe quel rapport d'homothetie laisse invariante la classe d'équivalence de l'arrangement.

IV.4. Généralités sur les arrangements de courbes

Dans la littérature, le problème de l'arrangement d'un ensemble de courbes est généralement posé pour des courbes simples qui sont soit fermées, soit non-bornées [Ede87], [Sno89], [Mil89], [VoP94]. Quand des courbes bornées et non-fermées sont traitées, l'approche utilisée consiste à "dédoubler" la courbes, obtenant ainsi une courbe fermée, voir par exemple [Ede92]. Une courbe Γ non-bornée ou fermée garde une propriété des droites qui est essentielle à la définition des vecteurs de position des points du plan et par conséquent des faces, le fait que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ a exactement deux parties connexes. Nous pouvons ainsi définir pour la courbe Γ les régions Γ^+ et Γ^- sans ambiguïté. Toutes les courbes dont nous parlerons dans cette section seront fermées ou non bornées, sans que nous en faisions la précision à chaque fois.

Une autre propriété des droites, qui n'est non plus partagée automatiquement par les courbes, est l'existence d'une borne supérieure pour le nombre de points que l'intersection de deux droites distinctes peut avoir (en l'occurrence, cette borne est 1). Cette propriété garantit que l'arrangement a un nombre finit de faces et permet des études de nature combinatoire. Par contre, deux courbes peuvent avoir une infinité de points d'intersection, ce qui impliquera un nombre infini de faces pour l'arrangement les contenant ; nous imposons alors que toutes deux courbes distinctes se coupent en au plus $\alpha \geq 1$ points.

IV.4.1. *Définitions, vecteurs de position*

Soit $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de courbes planes (fermées ou non bornées) tel que $\mathrm{card}(\Gamma_i \cap \Gamma_j) \leq \alpha$, pour un $\alpha \geq 1$ fixé. La définition de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est bien sûr identique à celle d'un arrangement de droites, ainsi que les définitions des faces de dimensions 0, 1 et 2.

Pour définir le vecteur de position d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\Gamma)$, nous devons définir pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ les ensembles Γ_i^+ et Γ_i^-, chacun étant connexe et tels que $\Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^- = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_i$. Des définitions utilisables pour les droites que nous avons mentionnées dans la sous section IV.3.1, seulement la troisième peut être utilisée pour les courbes aussi, si nous demandons comme condition supplémentaire qu'aucune des courbes de l'ensemble $\mathcal{G}$ ne passe pas par l'origine. Une autre définition possible des régions Γ^+ et Γ^-, pour une courbe Γ donnée, repose sur la notion d'orientation de Γ, qui est bien définie si nous supposons que Γ est une courbe paramétrique. Ainsi, nous définirons Γ^+ comme étant celle des deux régions connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_i$ se trouvant à gauche quand on parcourt Γ dans le sens donné par son orientation, et Γ^- comme celle se trouvant à droite. Cette dernière définition est invariante par les transformations géométriques élémentaires du plan mentionnées dans la section IV.3.3 (translation, rotation, homotetie), mais elle ne l'est pas par un changement de paramétrisation de Γ ne préservant pas l'orientation.

Une fois les régions Γ_i^+ et Γ_i^- définies pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, la notion de vecteur de position d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est similaire à celle de vecteur de position relatif à un arrangement de droites, et de même pour la notion de vecteur de position d'une face. L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ pourra alors être considéré comme l'ensemble des plus grandes parties connexes de $\mathbb{R}^2$ dont tous les points ont le même vecteur de position.

Quelle que soit la manière de définir Γ^+ et Γ^- utilisée, nous nous servons de ces deux régions du plan pour introduire (ou redéfinir) la notion de sens de parcours de la courbe Γ :

Définition IV.12. – *Si* P_1 *et* P_2 *sont deux points distincts de* Γ*, nous dirons que* Γ *est parcourue en sens positif de* P_1 *à* P_2 *si* Γ^+ *se trouve à gauche du parcours et en sens négatif si* Γ^+ *se trouve à droite.*

Évidemment, si les courbes Γ_i de l'arrangement avaient déjà une orientation associée et si nous nous en sommes servis pour définir Γ_i^+ et Γ_i^-, cette nouvelle définition n'a pas beaucoup de sens. Mais si une autre manière de définir Γ_i^+ et Γ_i^- a été utilisée, la définition n'est pas triviale, nous remarquons même que certaines courbes, si elles étaient données paramétriquement, devront être reparamétrisées par un changement ne préservant pas l'orientation (si par exemple nous avons utilisé pour définir Γ_i^+ et Γ_i^- la position de l'origine par rapport à la courbe et si l'origine se situe à gauche de la courbe du point de vue de son orientation initiale).

IV.4.2. *Arrangements simples*

Deux notations nous seront nécessaires par la suite. Si Γ est une courbe pour laquelle le sens de parcours a été défini (ce que nous considérons être le cas pour toutes les courbes intervenant à partir de maintenant) et $\mathrm{P} \in \Gamma$, nous notons $\Gamma(\mathrm{P}^-)$ l'ensemble des points $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}$ de Γ tels que Γ soit parcourue en sens positif de P_1 à P et $\Gamma(\mathrm{P}^+) = \Gamma \backslash \big(\Gamma(\mathrm{P}^-) \cup \{\mathrm{P}\}\big)$.

Si Γ est une courbe et $\mathrm{P} \notin \Gamma$ est un point, nous notons $\mathcal{R}(\Gamma, \mathrm{P})$ celle des régions Γ^+ et Γ^- qui contient P.

La notion de simplicité pour les arrangements de courbes est nécessairement plus forte que celle pour les arrangements de droites, car les polycourbes ont moins de "bonnes" propriétés que les droites.

Définition IV.13. – *Soit* $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ *un ensemble de courbes. Nous dirons que* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ *est un arrangement simple si et seulement si*

(IV.13.i) $\Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ *pour tous* $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *distincts ;*

(IV.13.ii) *si* $\mathrm{P} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$*, il existe* $\mathrm{P}_1 \in \Gamma_i(\mathrm{P}^-)$ *et* $\mathrm{P}_2 \in \Gamma_i(\mathrm{P}^+)$ *tels que* $\Gamma_i\big|_{]\mathrm{P}_1,\mathrm{P}[} \cap \Gamma_j = \emptyset$, $\Gamma_i\big|_{]\mathrm{P},\mathrm{P}_2[} \cap \Gamma_j = \emptyset$ *et* $\mathcal{R}(\Gamma_j, \mathrm{P}_1) \neq \mathcal{R}(\Gamma_j, \mathrm{P}_2)$*, et symétriquement pour* j *;*

(IV.13.iii) *si* $\mathrm{P} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$*, il n'existe pas de tangente commune des polycourbes* Γ_i *et* Γ_j *en* P *;*

(IV.13.iv) *l'ensemble* $\cup_{i=1}^n \Gamma_i$ *est connexe.*

Les conditions (IV.13.ii) et (IV.13.iii) signifient qu'en chaque point commun deux courbes se traversent selon un angle non-nul. Par la suite, nous travaillerons uniquement sur des arrangements simples, sans le préciser à chaque fois.

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de droites tel que $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ soit simple, alors une face f de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ n'est pas seulement une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ maximale du point de vue de l'inclusion des ensembles et dont tous les points ont un même vecteur de position, mais aussi l'ensemble de *tous* les points du plan ayant ce vecteur de position. Cette propriété est due au fait que deux droites distinctes de $\mathcal{D}$ ont exactement un point en commun. Ainsi, deux faces distinctes de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ auront des vecteurs de position distincts. Par contre, si $\mathcal{G}$ est un ensemble de courbes, deux courbes distinctes peuvent avoir plus d'un point commun et la conséquence est qu'il peut exister dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ plusieurs faces distinctes ayant le même vecteur de position (car nous ne considérons pas de faces non connexes). La figure suivante présente un exemple très simple où cette situation survient.

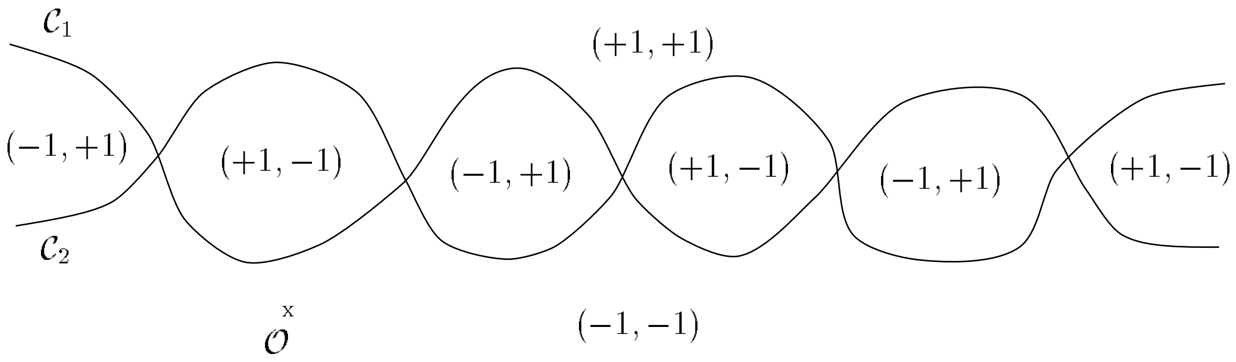


Figure IV.2

Ainsi, la propriété IV.7 n'est généralement pas satisfaite par les arrangements de courbes. La propriété similaire qui est vérifiée par ces arrangements est la suivante :

Propriété IV.14. – *Soit $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ un arrangement (simple) de courbes, $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^n$, et soient f_1 et f_2 deux de ses faces.*

1. *Si f_2 est une sous-face de f_1, il existe un unique $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $v_{\Gamma_{i_0}}(f_1) \neq 0$, $v_{\Gamma_{i_0}}(f_2) = 0$ et $v_{\Gamma_i}(f_1) = v_{\Gamma_i}(f_2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$.*
2. *S'il existe un unique $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $v_{\Gamma_{i_0}}(f_1) \neq 0$, $v_{\Gamma_{i_0}}(f_2) = 0$ et $v_{\Gamma_i}(f_1) = v_{\Gamma_i}(f_2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$, il existe une face f_1' telle que $V_{\mathcal{G}}(f_1') = V_{\mathcal{G}}(f_1)$ et f_2 soit une sous-face de f_1'.*

IV.4.3. *Équivalence d'arrangements de courbes*

L'équivalence de deux arrangements de courbes peut être définie de plusieurs façons, les deux que nous discuterons étant les extensions immédiates des définitions IV.9 et IV.10. Mais, la propriété IV.14 étant plus faible que la propriété IV.7, IV.10 n'implique plus de manière directe IV.9, car la fonction ψ de la condition (IV.10.ii) ne conserve plus forcément les incidences. Pour les deux arrangements de la figure IV.3, où $\mathcal{G}^i = \{\Gamma_1^i, \Gamma_2^i\}$ pour $i = 1, 2$, nous avons

$$
\begin{aligned}
V_{\mathcal{G}^1}(s_1^1) = V_{\mathcal{G}^1}(s_2^1) = V_{\mathcal{G}^2}(s_1^2) = V_{\mathcal{G}^2}(s_2^2) &= (0,0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_1^1) = V_{\mathcal{G}^1}(a_3^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_1^2) = V_{\mathcal{G}^2}(a_3^2) &= (0,+1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_2^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_2^2) &= (0,-1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_4^1) = V_{\mathcal{G}^1}(a_6^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_4^2) = V_{\mathcal{G}^2}(a_6^2) &= (-1,0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_5^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_5^2) &= (+1,0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_2^1) = V_{\mathcal{G}^1}(c_4^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_2^2) = V_{\mathcal{G}^2}(c_4^2) &= (-1,+1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_1^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_1^2) &= (-1,-1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_3^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_3^2) &= (+1,-1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_5^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_5^2) &= (+1,+1)
\end{aligned}
$$

En prenant la fonction ψ telle que $\psi(c_2^1) = c_4^2$, $\psi(c_4^1) = c_2^2$ et $\psi(s_i^1) = s_i^2$ pour $i = 1, 2$, $\psi(a_i^1) = a_i^2$ pour $1 \leq i \leq 6$ et $\psi(c_i^1) = c_i^2$ pour $i = 1, 3, 5$, les propriétés de la définition IV.14 sont satisfaites, mais a_1^1 est une sous-face de c_2^1 et $a_1^2 = \varphi(a_1^1)$ n'est pas une sous-face de $c_4^2 = \varphi(c_2^1)$.

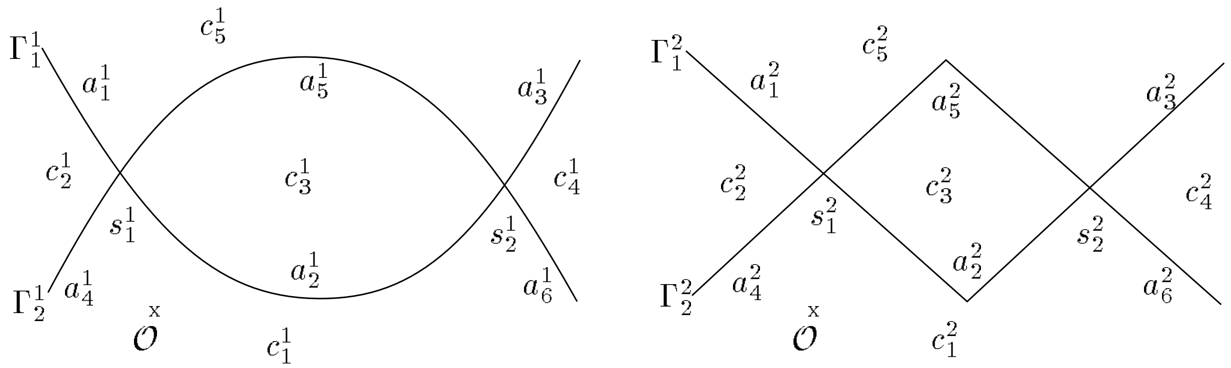


Figure IV.3

À la différence des arrangements de droites, la simplicité d'un arrangement de courbes n'implique pas la simplicité de tout arrangement de courbes qui lui est équivalent, à cause de la condition (IV.13.iii), raison pour laquelle nous ne considérerons que des arrangement simples. Dans ce cas, l'invariance de la dimension des faces par la fonction ψ, pour la définition IV.10, résulte, comme dans le cas des droites, de l'invariance des vecteurs de position. Pour la première définition de l'équivalence, le résultat similaire apparaît dans la sous section suivante.

IV.4.4. *Équivalence d'arrangements et ordre des intersections*

Dans cette section, nous présentons brièvement quelques résultats de Vo Phi [VoP94] sur les arrangements de courbes du plan, car ils nous seront nécessaires dans l'étude des arrangements de polycourbes de Bézier.

La définition que Vo Phi utilise pour l'équivalence de deux arrangements de courbes est celle de Grünbaum, IV.9, que nous reformulons ici pour des ensembles de courbes :

Définition IV.15. – *Soient $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ deux ensembles finis de courbes du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont équivalents si et seulement si*

(IV.15.i) $\operatorname{card}(\mathcal{G}^1) = \operatorname{card}(\mathcal{G}^2)$;
(IV.15.ii) *il existe une fonction bijective* $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ *qui conserve les incidences.*

Vo Phi prouve facilement que la fonction φ de cette définition conserve aussi les dimensions des faces.

Supposons que les ensembles $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ sont indexés sur un ensemble d'indices I : $\mathcal{G}^1 = \{\Gamma_i^1\}_{i\in \mathrm{I}}$ et $\mathcal{G}^2 = \{\Gamma_i^2\}_{i\in \mathrm{I}}$. Un premier résultat sur l'équivalence des arrangements est donné par le théorème suivant [VoP94] :

Théorème IV.16. – *Si les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont simples et équivalents et $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ est une bijection gardant les incidences, alors il existe σ une permutation de* I *telle que*

(IV.16.i) $f \subset \Gamma_i^1$ *si et seulement si* $\varphi(f) \subset \Gamma^2_{\sigma(i)}$ *pour toute face* f *de* $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ *et pour tout* $i \in \mathrm{I}$;
(IV.16.ii) $\operatorname{card}(\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1) = \operatorname{card}(\Gamma^2_{\sigma(i)} \cap \Gamma^2_{\sigma(j)})$ *pour tous* $i \neq j \in \mathrm{I}$;
(IV.16.iii) Γ_i^1 *est fermée si et seulement si* $\Gamma^2_{\sigma(i)}$ *est fermée ;*
(IV.16.iv) *Soient* s_1 *et* s_2 *deux sommets de* $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ *situés sur la courbe* Γ_i^1. *Alors* $s_2 \in \Gamma_i^1(s_1^-)$ *si et seulement si* $\varphi(s_2) \in \Gamma^2(\varphi(s_1)^-)$.

Dans la suite, nous considérons que l'ensemble $\mathcal{G}^2$ a été renuméroté de telle manière que la permutation σ du théorème précédent soit la permutation identique. La condition (IV.16.iv) implique tout de suite que si nous considérons l'ensemble de tous les sommets $s \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ tels que $v_{\Gamma_i^1}(s) = 0$ pour un i quelconque fixé de I, alors l'ordre de ces sommets sur la courbe Γ_i^1 et l'ordre de leurs images par la fonction φ sur la courbe Γ_i^2 seront identiques. En fait, (IV.16.iv) est équivalente à la condition d'ordre identique des sommets respectivement sur Γ_i^1 et sur Γ_i^2, car il est facile à voir que si (IV.16.iv) n'est pas satisfaite l'autre condition ne peut pas non plus être vérifiée.

Ainsi, pour chaque classe d'équivalence d'arrangements le nombre et l'ordre des sommets sur respectivement chacune des courbes est le même pour tout arrangement membre de la classe. Le résultat principal de Vo Phi consiste à prouver que, sous certaines hypothèses qui ne sont pas trop restrictives, la réciproque de cette affirmation est vraie aussi, c'est-à-dire le nombre et l'ordre des sommets respectivement sur les courbes d'un arrangement déterminent de manière unique la classe d'équivalence de cet arrangement. Plus précisément, il a démontre que deux arrangements pour lesquels les conditions (IV.16.ii) et (IV.16.iv) sont satisfaites sont équivalents, sous certaines hypothèses, aussi bien au sens de la définition IV.15 qu'au sens de la définition IV.10.

Définition IV.17. – *Soient* $s_1, \ldots, s_k$ *des sommets d'un arrangement* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ *situés tous sur la courbe* $\Gamma_i \in \mathcal{G}$. *Nous dirons que ces sommets sont positivement (respectivement négativement) ordonnés sur* Γ_i *si et seulement si* $s_h \in \Gamma_i(s^-_{h+1})$ *pour tout* $h \in \{1, \ldots, k-1\}$ *(respectivement* $s_h \in \Gamma_i(s^+_{h+1})$ *pour tout* $h \in \{1, \ldots, k-1\}$*).*

Il résulte immédiatement que si $s_1, \ldots, s_k$ sont positivement ordonnés sur Γ_i, alors $s_j \in \Gamma_i(s_h^-)$ pour tout $h \in \{2, \ldots, k\}$ et $j \in \{1, \ldots, h-1\}$.

Les hypothèses de travail que nous avons mentionnées sont les suivantes :

(h1) $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont simples et $\operatorname{card}(\mathrm{I}) = n \geq 3$.
(h2) il existe une bijection φ_0 entre les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et ceux de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ vérifiant
 (h2.1) $s \in \Gamma_i^1$ si et seulement si $\varphi_0(s) \in \Gamma_i^2$ pour tout sommet s de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et tout $i \in \mathrm{I}$;

(h2.2) Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soient $s_1, \ldots, s_k$ tous les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ situés sur Γ_i^1. Si $k \geq 2$, alors pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ $s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(k)}$ sont positivement ordonnés sur Γ_i^1 si et seulement si $\varphi_0(s_{\sigma(1)}), \ldots, \varphi_0(s_{\sigma(k)})$ sont positivement ordonnés sur Γ_i^2.

(h3) Pour tous $i, j \in \mathrm{I}$, si $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1 = \emptyset$, alors $\Gamma_i^1 \subset \Gamma_j^{1+}(\Gamma_i^1 \subset \Gamma_j^{1-})$ si et seulement si $\Gamma_i^2 \subset \Gamma_j^{2+}(\Gamma_i^2 \subset \Gamma_j^{2-})$.

Le résultat concernant l'équivalence des arrangements s'énonce alors comme suit :

Théorème [VoP94] **IV.18.** – *Soient $\mathcal{G}^1 = \{\Gamma_i^1\}_{i\in\mathrm{I}}$ et $\mathcal{G}^2 = \{\Gamma_i^2\}_{i\in\mathrm{I}}$ deux ensembles de courbes telles que les hypothèses (h1), (h2) et (h3) soient satisfaites. Alors il existe une unique fonction bijective $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ vérifiant*

(IV.18.i) *φ conserve les incidences ;*

(IV.18.ii) *$\varphi(s) = \varphi_0(s)$ pour tout sommet s de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$;*

(IV.18.iii) *$f \subset \Gamma_i^1 \iff \varphi(f) \subset \Gamma_i^2$, pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et tout $i \in \mathrm{I}$.*

Ce résultat est complété par le théorème suivant [VoP94] :

Théorème IV.19. – *Dans les hypothèses du théorème précédent, supposons qu'en plus l'affirmation suivante est vérifiée :*

(h.4) *(Il existe $i, j \in \mathrm{I}$ tels que $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1 = \emptyset$)*

OU

(Il existe un sommet $s \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $i_0 \in \mathrm{I}$ tels que $v_{\Gamma_{i_0}^1}(s) = v_{\Gamma_{i_0}^2}(\varphi_0(s)) \neq 0$)

Alors $V_{\mathcal{G}^1}(f) = V_{\mathcal{G}^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$.

Les deux théorèmes précédents nous disent que si les hypothèses (h1) jusqu'à (h4) sont vérifiées, alors les deux arrangements sont équivalents dans le sens de la définition IV.10, tandis que si seulement les hypothèses (h1) jusqu'à (h3) sont satisfaites, alors les arrangements seront équivalentes uniquement au sens de la définition IV.15. Vo Phi montre que si deux arrangements sont équivalents au sens de la définition IV.15, alors nous aurons soit $V_{\mathcal{G}^1}(f) = V_{\mathcal{G}^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$, soit $v_{\Gamma_i^1}(f) = -v_{\Gamma_i^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $i \in \mathrm{I}$. Les hypothèses (h4) et (h3) nous assurent qu'il existe au moins une face $f_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et un indice $i_0 \in \mathrm{I}$ tels que $v_{\Gamma_{i_0}^1}(f_0) = v_{\Gamma_{i_0}^2}(\varphi(f_0))$, et par conséquent si (h4), en plus de (h1), (h2), (h3), est satisfaite, alors la fonction φ du théorème IV.18 conserve les vecteurs de position.

Nous pouvons maintenant remarquer que si les hypothèses (h1), (h3) et (h4) sont vérifiées, alors la définition IV.10 de l'équivalence de deux arrangements est équivalente à la définition IV.15 utilisée par Vo Phi, car cette dernière implique, par le théorème IV.16, l'hypothèse (h2), et (h1), (h2), (h3) et (h4) impliquent IV.10.

IV.4.5. *Équivalence : dans le plan ou sur la sphère ?*

Avant de passer à la discution sur les arrangements de polycourbes, regardons les deux arrangements de la figure IV.4 : nous ne dirions pas, à la première vue, qu'ils sont équivalents. Pourtant, en faisant l'étude des sommets, arêtes et cellules, il résulte facilement qu'ils le sont, au sens de la définition de Grünbaum. À la cellule hachurée du premier arrangement correspond la cellule non bornée du second, tandis qu'à la cellule non bornée du premier arrangement correspond celle qui est hachurée dans le deuxième.

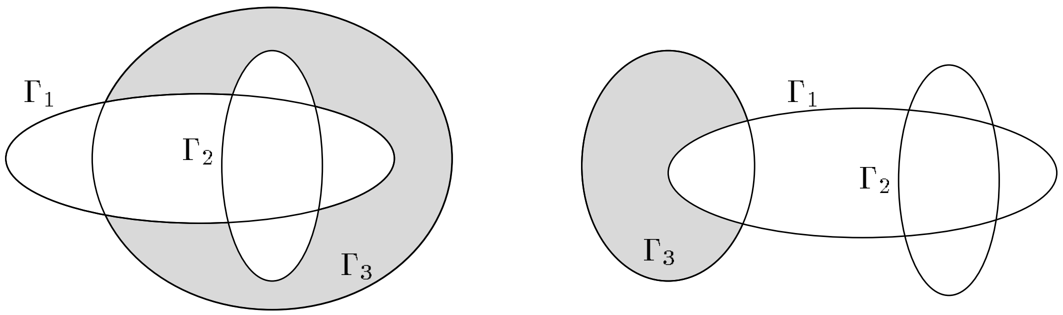


Figure IV.4 *Ces deux arrangements sont équivalents*

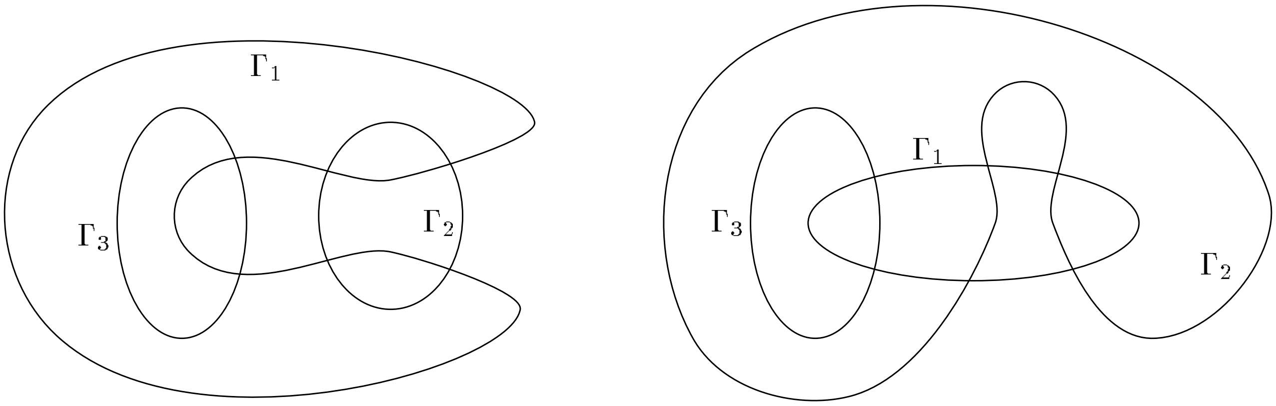


Figure IV.5

L'équivalence des deux arrangements persiste si nous utilisons la définition donnée par Edelsbrunner en définissant Γ^+ et Γ^- d'après la position de l'origine par rapport à la courbe Γ, à condition de positionner l'origine dans la cellule hachurée pour l'un des arrangements et dans la cellule non bornée pour l'autre. Il existe quand même des définitions possibles pour Γ^+ et Γ^- telles que les deux arrangements ne soient plus équivalentes au sens de la définition IV.10 ; par exemple, si pour toute courbe fermée Γ^+ est la région non bornée des deux régions connexes délimitées par Γ et Γ^- est la région bornée.

Remarquons qu'en "plaçant" les deux arrangements de la figure sur la sphère, leur équivalence devient très naturelle (et en accord avec le "bon sens géométrique"). Les deux arrangements de la figure IV.5 seront eux aussi équivalents aux deux précédents, et en raisonant sur la sphère nous pouvons trouver tous les arrangements "visuellement différents" qui sont, conformément à la définition IV.15, équivalents à ceux de la figure IV.4.

IV.5. Arrangements de polycourbes de Bézier

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le calcul exact d'un arrangement de courbes ne peut pas se faire sans la résolution des systèmes d'équations algébriques qui peuvent être de degré élevé. Les imprécisions des résultats numériques de ces systèmes peuvent conduire à des contradictions dans la topologie et la combinatoire de l'arrangement, par exemple par l'inversion des positions des deux sommets successifs sur une des courbes de l'arrangement.

Dans cette section, nous étudions les arrangements de polycourbes de Bézier, en nous posant non pas la question du calcul d'un tel arrangement, mais celle de la construction d'un arrangement de lignes polygonales qui lui soit équivalent dans le sens de la définition IV.15. Le calcul exact d'un arrangement de lignes polygonales, tout en étant d'une complexité bien supérieure à celle du calcul d'un arrangement de droites, ne fait pas intervenir des équations de degré supérieur à un et par conséquent peut être considéré comme réalisable de manière exacte. Mais avant de passer aux polycourbes de Bézier, une discussion sur les arrangements de polycourbes (quelconques) s'impose.

IV.5.1. *Arrangements de polycourbes*

Nous avons vu que toutes les courbes considérées dans l'étude sur les arrangements de courbes sont soit fermées, soit non bornées, et définissent par conséquent une partition du plan en deux régions ouvertes connexes disjointes. Les polycourbes qui ne sont pas fermées n'ont pas cette propriété, car les polycourbes sont toujours des compacts, donc bornées ; par exemple l'arrangement présenté dans la figure IV.6 a une seule cellule.

Les arrangements de polycourbes seraient ainsi plus proches des arrangements de segments [Boi95] que des arrangements de droites. Nous verrons ainsi apparaître des cellules *non banales*, dont l'intérieur de l'adhérence contient au moins une extrémité de polycourbe, et des cellules *banales*, celles qui ne satisfont pas la propriété ci-dessus. L'unique cellule de l'arrangement de la figure IV.5 est non banale.

Dans un arrangement de courbes non bornées ou fermées, il peut exister (et il existera pourvu qu'au moins une courbes est non bornée) des arêtes ayant un seul sommet, et ces arêtes seront non bornées. Dans un arrangement de polycourbes, toutes les arêtes sont évidemment bornées, mais il peut toujours en exister qui n'ont qu'un seul sommet, et nous appellerons *arête libre* une telle arête.

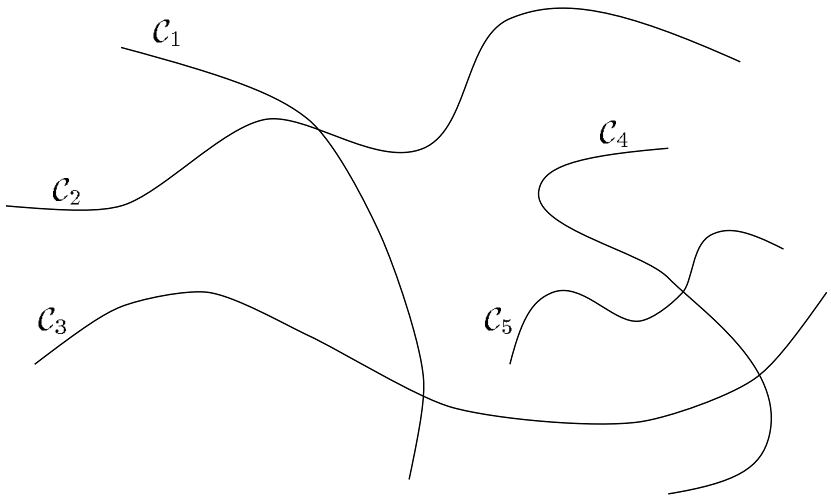


Figure IV.6

Remarquons aussi qu'à une polycourbe $\mathcal{C}$ nous pouvons associer de manière naturelle un sens de parcours, car elle est une courbe paramétrique, donc la notion de sommets positivement ordonnés, ainsi que les ensembles $\mathcal{C}(\mathrm{P}^-)$ et $\mathcal{C}(\mathrm{P}^+)$ pour $\mathrm{P} \in \mathcal{C}$, ont un sens et seront utilisés.

La définition d'un arrangement simple est à peu près la même que pour les courbes fermées ou non bornées, mais la condition (IV.13.ii) doit être reformulée, car $\mathcal{R}(\mathcal{C}, \mathrm{P})$ n'a pas de sens si la polycourbe $\mathcal{C}$ n'est pas fermée. Pour pouvoir donner la définition d'un arrangement simple de polycourbes, la notion suivante nous est nécessaire :

Définition IV.20. – *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux polycourbes et soit* P *un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ qui n'est pas une extrémité de $\mathcal{C}_2$.*

(IV.20.a) *Si $\mathcal{C}_1$ n'est pas une polycourbe fermée et* P *est l'une de ses extrémités, nous dirons que $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de gauche à droite en* P *si et seulement si*

(IV.20.a.i) *il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathcal{C}_1) = 1$ *et* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathcal{C}_2) = 2$ *pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$;*

(IV.20.a.ii) *si en parcourant* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *à partir du point* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_1$ *vers la gauche par rapport au sens de parcours de $\mathcal{C}_1$ nous notons* P_1 *et* P_2 *les points d'intersection de* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *et $\mathcal{C}_2$ dans l'ordre où nous les avons trouvés, alors* $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{C}_2(\mathrm{P}_2^-)$.

(IV.20.b) *Si $\mathcal{C}_1$ est une polycourbe fermée ou* P *n'est pas l'une de ses extrémités, nous dirons que $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de gauche à droite en* P *si et seulement si*

(IV.20.b.i) *il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathcal{C}_1) = 2$ *et* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathcal{C}_2) = 2$ *pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$;*

(IV.20.b.ii) *si* $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2\} = \mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_2$ *tels que* $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{C}_2(\mathrm{P}_2^-)$, *alors en notant* $\mathrm{C}_g(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *l'arc de* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *se trouvant à gauche de $\mathcal{C}_1$ par rapport à son sens de parcours (considéré sans ses extrémités, qui sont les points d'intersection de* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *et $\mathcal{C}_1$) et* $\mathrm{C}_d(\mathrm{P},\varepsilon_0) = \mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \setminus \Big(\mathrm{C}_g(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cup \big(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_1\big)\Big)$,

alors

$$\mathrm{P}_1 \in \mathrm{C}_g(\mathrm{P},\varepsilon_0) \text{ et } \mathrm{P}_2 \in \mathrm{C}_d(\mathrm{P},\varepsilon_0).$$

De manière symétrique se définit la traversée de droite à gauche.

Pour simplifier l'expression, donnons encore une définition, qui découle directement de celle-ci :

Définition IV.21. – *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux polycourbes et soit* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. *Nous dirons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se traversent en* P *si et seulement si $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de gauche à droite en* P *ou $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de droite à gauche en* P.

Nous reformulons l'énoncé de IV.13 comme suit :

Définition IV.22. – *Soit $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de polycourbes. Nous dirons que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ est un arrangement simple si et seulement si*

(IV.22.i) *$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$ pour tous $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ distincts ;*

(IV.22.ii) *si* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$, *$\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$ se traversent en* P *;*

(IV.22.iii) *si* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$, *il n'existe pas de tangente commune des polycourbes $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$ en* P *;*

(IV.22.iv) *l'ensemble $\cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ est connexe.*

IV.5.2. *Équivalence d'arrangements de polycourbes*

La définition de l'équivalence donnée par Edelsbrunner n'a plus de sens pour les arrangements de polycourbes, et les hypothèses (h.3) et (h.4) perdent aussi toute signification, car les vecteurs de position des faces ne peuvent plus être définis. Par contre, la définition de Grünbaum reste pertinente et nous allons l'utiliser pour les arrangements de polycourbes.

Proposition IV.23. – *Soient* $\mathcal{C}^1 = \{\mathcal{C}_i^1\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *et* $\mathcal{C}^2 = \{\mathcal{C}_i^2\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *deux ensembles de polycourbes tels que les arrangements* $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ *et* $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ *satisfassent les hypothèses (h1) et (h2) et les conditions*

(IV.23.i) $\mathcal{C}_i^1$ *est fermée si et seulement si* $\mathcal{C}_i^2$ *est fermée.*

(IV.23.ii) $s \in \mathcal{C}_i^1 \cap \mathcal{C}_j^1$ *n'est pas une extrémité de* $\mathcal{C}_j^1$ *si et seulement si* $\varphi_0(s)$ *n'est pas une extrémité de* $\mathcal{C}_j^2$ *et si c'est le cas, alors* $\mathcal{C}_j^1$ *traverse* $\mathcal{C}_i^1$ *de gauche à droite en* s *si et seulement si* $\mathcal{C}_j^2$ *traverse* $\mathcal{C}_i^2$ *de gauche à droite en* $\varphi_0(s)$.

Alors les deux arrangements sont équivalents au sens de la définition IV.15.

Preuve – La fonction φ_0 de (h2) étant une bijection, la condition (h2.1) implique immédiatement l'égalité des cardinaux des ensembles de sommets situés respectivement sur $\mathcal{C}_i^1$, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$, et $\mathcal{C}_i^2$, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. En utilisant (IV.23.i), nous déduisons que le nombre d'arêtes situées sur $\mathcal{C}_i^1$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est égal au nombre d'arêtes situées sur $\mathcal{C}_i^2$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Si nous notons $s_1^{1,i},\ldots,s_{k_i}^{1,i}$ les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ appartenant à $\mathcal{C}_i^1$ dans l'ordre croissant des valeurs des paramètres auxquels ils correspondent sur la polycourbe, et $s_1^{2,i},\ldots,s_{k_i}^{2,i}$ les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ appartenant à $\mathcal{C}_i^2$ toujours dans l'ordre croissant, la condition (h2.2) implique $\varphi_0(s_h^{1,i}) = s_h^{2,1}$ pour tout $h \in \{1,\ldots,k_i\}$, et ceci pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Notons les arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ situées sur $\mathcal{C}_i^1$, dans l'ordre de leur "apparition" sur la polycourbe, $a_1^{1,i},\ldots,a_{k_i'}^{1,i}$, et les arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ situées sur $\mathcal{C}_i^2$, toujours dans le bon ordre, $a_1^{2,i},\ldots,a_{k_i'}^{2,i}$. Nous observons que $k' = k+1$, si les polycourbes $\mathcal{C}_i^1$ et $\mathcal{C}_i^2$ ne sont pas fermées, et $k' = k$ si elles le sont ; dans ce dernier cas, l'arête $a_1^{1,i}$ sera celle comprise entre $s_1^{1,i}$ et $s_2^{1,i}$ et $a_{k_i}^{1,i}$ sera l'arête comprise entre $s_{k_i}^{1,i}$ et $s_1^{1,i}$, contenant éventuellement l'origine de la polycourbe (si $s_1^{1,i}$ en est différent).

Définissons alors la fonction φ_1 faisant correspondre à une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$:

$$\varphi_1(a_h^{1,i}) = a_h^{2,i} \qquad \forall h \in \{1,\ldots,k_i'\} \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Cette fonction est de manière évidente une bijection, et il est aussi évident que si s et a sont respectivement un sommet et une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ définissant une incidence, alors $\varphi_0(s)$ et $\varphi_1(a)$ définissent une incidence dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Soit maintenant c une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$. Sa frontière, qui sera notée δ^1, est un ensemble d'arêtes et de sommets de l'arrangement. Discutons d'abord le cas où c est une cellule banale.

Si c est banale, il y a autant d'arêtes que de sommets dans la composition de cette frontière, qui est une courbe fermée (et simple). En commençant par un sommet quelconque de δ^1, suivi par un sommet incident à une des deux arêtes qui sont en même temps incidentes à c et au sommet déjà pris, nous aurons une direction de parcours de δ^1 ; nous faisons la liste des faces composant δ^1 suivant cette direction de parcours et prenons leurs images respectivement par φ_0 et φ_1 dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$. L'union des images formera une courbe δ^2 et les propriétés des bijections φ_0 et φ_1 impliquent facilement que δ^2 est une courbe fermée (et simple). Nous montrons que l'une des deux régions du plan délimitées par δ^2 est une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Soit $\mathcal{L}_1 = \{s_1, a_1, s_2, a_2, \ldots, s_\ell, a_\ell\}$ la liste des faces de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ composant δ^1 ; δ^2 sera composée des éléments de l'ensemble $\mathcal{L}_2 = \{\varphi_0(s_1), \varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_0(s_\ell), \varphi_1(a_\ell)\}$. Les arêtes $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$ ne peuvent être qu'incidentes à une cellule c' de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Supposons que, du point de vue de la cellule c, la courbe δ^1 est parcourue trigonométriquement, ce qui veut dire que c se trouve à gauche de δ^1 quand nous parcourons cette courbe dans le sens donné par la liste $\mathcal{L}_1$. Alors pour tout $h \leq \ell$ l'arête a_{h+1} sera "la première à gauche" partant du sommet s_h quand nous sommes arrivés par a_h (les indices h sont considérés de manière circulaire).

Il n'est pas difficile de voir que c' se trouve à gauche des arêtes $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$. En effet, soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_1 \subset \mathcal{C}_i^1$ et $a_2 \subset \mathcal{C}_j^1$.

Cas 1. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_i^1$ et une extrémité de $\mathcal{C}_j^1$. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$, il n'y a que deux arêtes incidentes à s_2, qui sont précisément a_1 et a_2. De par la condition (IV.23.ii), $\varphi_0(s_2)$ est une extrémité de $\mathcal{C}_i^2$ et une extrémité de $\mathcal{C}_j^2$ et dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ les seules deux arêtes incidentes à $\varphi_0(s_2)$ sont $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$. Dans ce cas, notre étude "se déplace" au sommet s_3, impliquant les arêtes a_2 et a_3 ; si ce sommet aussi est une extrémité pour les deux polycourbes supportant a_2 et a_3, nous passons au suivant et ainsi de suite jusqu'au premier sommet qui n'est pas dans cette situation. Si tous les sommets s_h, pour $h \in \{1, \dots, \ell\}$, se trouvent dans ce cas, alors l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ ne peut avoir que deux cellules, qui sont respectivement les deux régions connexes du plan définies par δ^1, car cet arrangement étant simple, $\cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i^1$ doit être un ensemble connexe et donc toutes les polycourbes de $\mathcal{C}^1$ sont incluses dans δ^1. Il est très facile à voir que la condition (IV.23.ii) implique exactement la même structure pour l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ et nous n'avons qu'a considérer que c' est celle des deux cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ se trouvant à gauche du parcours de δ^2.

Cas 2. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_i^1$, mais il n'en est pas une de $\mathcal{C}_j^1$. Supposons que $\mathcal{C}_j^1$ traverse $\mathcal{C}_i^1$ de gauche à droite en s_2 (si $\mathcal{C}_j^1$ traverse $\mathcal{C}_i^1$ de droite à gauche en s_2, la discussion est similaire). Alors $s_3 \in \mathcal{C}_j^1(s_2^-)$, de par la définition de la traversée de gauche à droite et compte tenant de la supposition faite sur le sens de parcours de δ^1. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, le raisonnement se fait en sens inverse : comme la condition (IV.23.ii) implique $\varphi_0(s_3) \in \mathcal{C}_j^2(\varphi_0(s_2)^-)$, nous déduisons que $\varphi_1(a_2)$ est "la première à gauche" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_1)$ et par conséquent c' se trouve à gauche du parcours donné par la liste $\mathcal{L}_2$ sur δ^2.

Cas 3. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_j^1$, mais il n'en est pas une de $\mathcal{C}_i^1$. Supposons que $\mathcal{C}_i^1$ traverse $\mathcal{C}_j^1$ de gauche à droite en s_2 (si $\mathcal{C}_i^1$ traverse $\mathcal{C}_j^1$ de droite à gauche en s_2, la discussion est similaire). Alors la définition de la traversée de gauche à droite et la supposition faite sur le sens de parcours de δ^1 impliquent $s_1 \in \mathcal{C}_i^1(s_2^+)$. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, nous raisonnons à l'inverse : comme la condition (IV.23.ii) implique $\varphi_0(s_1) \in \mathcal{C}_i^2(\varphi_0(s_2)^+)$, nous déduisons que $\varphi_1(a_1)$ est "la première à droite" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_2)$ et par conséquent que $\varphi_1(a_2)$ est "la première à gauche" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_1)$; nous obtenons ainsi que c' se trouve à gauche du parcours donné par la liste $\mathcal{L}_2$ sur δ^2.

Cas 4. s_2 n'est une extrémité ni pour $\mathcal{C}_i^1$, ni pour $\mathcal{C}_j^1$. La discussion à faire dans ce cas est identique à celle du Cas 2 et nous obtenons la propriété voulue pour le sens de parcours de δ^2 par rapport à la cellule c'.

Cas 5. i=j. Ce cas survient quand s_2 est une extrémité d'une polycourbe qui "part vers l'extérieur" de la cellule c, et il est facile à voir la discussion est symétrique à celle du Cas 3 (où s_2 est une extrémité d'une polycourbe qui "part vers l'intérieur" de la cellule c).

Soit $p \in \{3, \dots, \ell\}$ et supposons que les arêtes $\varphi_1(a_h)$ sont incidentes à c' pour $h \in \{1, \dots, p-1\}$; il est alors évident que $\varphi_1(a_p)$ l'est aussi. En effet, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ l'arête a_p est "la première à gauche" en partant de s_p quand nous sommes arrivés par a_{p-1} et une discussion par cas très semblable à celle faite pour prouver que c' se trouve à gauche de δ^2 par rapport au sens de parcours donné par $\mathcal{L}_2$ nous mènera à la conclusion que dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ l'arête $\varphi_1(a_p)$ est "la première à gauche" en partant de $\varphi_0(s_p)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_{p-1})$ et donc incidente à c'. Par récurrence, nous obtenons ainsi que toutes les arêtes de l'ensemble $\mathcal{L}_2$ sont incidentes à c'.

Dans ses grandes lignes, la discution pour le cas où la cellule c n'est pas banale est identique à celle déjà faite pour le cas c banale, en nous servant du fait que la fonction φ_1 est telle que si a est une arête libre de $\alpha(\mathcal{C}^1)$, alors $\varphi_1(a)$ est une arête libre de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$. Dans la liste $\mathcal{L}_1$ décrivant le bord de c une arête libre sera identifiable au fait qu'elle est précédée et suivie par un même sommet, son unique sommet incident ; la liste $\mathcal{L}_2$ des images des éléments de $\mathcal{L}_1$ par φ_0, respectivement φ_1, aura bien sûr la même particularité. En plus, pour les arêtes libres il n'a pas de sens de dire que la cellule se trouve à gauche (ou à droite), mais nous pouvons éviter ce problème en considérant que toute arête libre est "creuse". Avec ces conventions sur l'ensemble $\mathcal{L}_1$ et sur les arêtes libres, prouver que la liste $\mathcal{L}_2$ définit le bord d'une cellule c' dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ se fait de la même façon que dans le cas où c est banale.

Nous pouvons par conséquent définir une fonction φ_2 associant à une cellule c de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ la cellule c' de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ dont le bord est l'image par les fonctions φ_0 et φ_1 du bord de c. Nous avons prouvé que pour chaque cellule c de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ il existe une telle cellule c' dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, donc le nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est inférieur ou égal au nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$; mais φ_0 et φ_1 sont des bijections et toutes les conditions imposées aux deux arrangements sont symétriques en $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$, par conséquent tout le raisonnement peut se faire en inversant les rôles des deux ensembles de polycourbes et nous pouvons donc déduire que le nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ est inférieur ou égal au nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ et conclure que les deux arrangements ont le même nombre de cellules. Comme il est évident que si $c_1 \neq c_2$ sont deux cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ les cellules c'_1 et c'_2 leur correspondant dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ sont elles aussi distinctes, nous obtenons que la fonction φ_2 est aussi une bijection.

Pour définir la bijection φ de la définition IV.15, il nous reste à préciser que sa restriction aux sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est égale à φ_0, sa restriction aux arêtes est égale à φ_1 et sa restriction aux cellules est égale à φ_2. Il est évident que φ ainsi définie garde les incidences.

$\square$

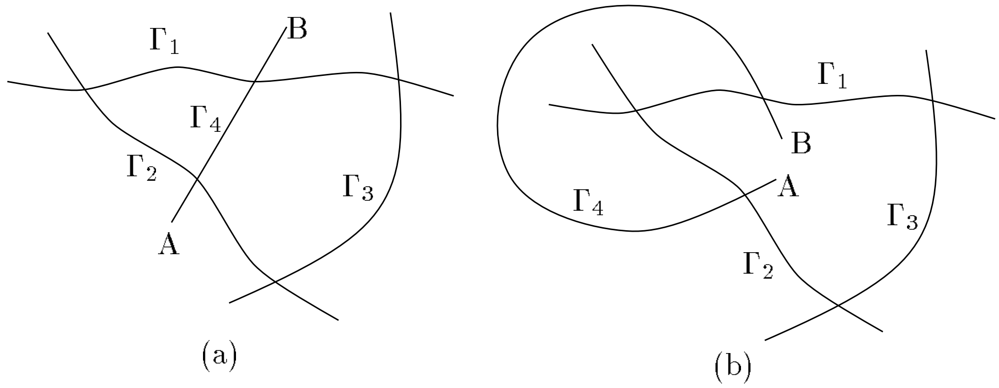


Figure IV.7 *Dans le cas (a),* Γ_4 *est parcouru de* A *à* B. *Si dans le cas (b)* Γ_4 *est parcouru de* A *à* B, *(IV.23.ii) n'est pas satisfaite ; si* Γ_4 *est parcouru de* B *à* A, *c'est (h2.2) qui n'est pas satisfaite.*

La condition (IV.23.i) est évidemment nécessaire pour que les deux arrangements de polycourbes soient équivalents, car une polycourbe fermée sur laquelle il existe k sommets contiendra k arêtes, aucune libre, tandis qu'une polycourbe non fermée ayant k sommets contiendra $k+1$ arêtes, parmi lesquelles deux libres ; les hypothèses (h1) et (h2) ne nous permettant pas de la déduire, cette condition a dû être posée de manière explicite.

La condition (IV.23.ii), par contre, n'est pas nécessaire : dans un arrangement de polycourbes il suffit de changer l'orientation d'une seule polycourbe pour obtenir un nouvel arrangement qui est bien sûr équivalent au précédent au sens de la définition sans que la condition (IV.23.ii) soit satisfaite. Mais cette condition est la plus faible (et intuitive) que nous ayons pu trouver pour assurer l'équivalence de deux arrangements quelconques de polycourbes, car nous pouvons voir dans la figure IV.7 deux arrangements ne la satisfaisant pas et qui ne sont pas équivalents.

IV.5.3. *Arrangements de polycourbes de Bézier et de polygones de contrôle*

Comme pour le problème du calcul de l'enveloppe convexe, l'approximation polygonale que nous utiliserons pour une polycourbe de Bézier sera son polygone de contrôle. Ainsi, de façon naturelle, à tout ensemble de polycourbes de Bézier $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ sera associé un ensemble de lignes polygonales $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ ayant le même cardinal. La polycourbe $\mathcal{B}_i$, pour tout $i \in \mathrm{I}$, s'écrit $\mathcal{B}_i = \cup_{j=1}^{n_i}\mathcal{B}_{i,j}$, où $\mathcal{B}_{i,j}$ est une courbe de Bézier complètement convexe de B-polygone $\mathcal{P}_{i,j} = \mathrm{P}_0^{(i,j)}\mathrm{P}_1^{(i,j)}\dots\mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}$.

Comme nous avons annoncé au début de cette section, nous cherchons un arrangement de lignes polygonales qui soit équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier donné. Nous construirons cet arrangement à partir de l'arrangement de polygones de contrôle des polycourbes de Bézier, en utilisant la subdivision de de Casteljau de rapport 1/2.

Avant d'énoncer et prouver le théorème d'existence d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier donné, nous établissons une convention de notation dont nous aurons besoin.

Convention Soient $\mathcal{B}_1 = \cup_{i=1}^{n_1}\mathcal{B}_{1,i}$ et $\mathcal{B}_2 = \cup_{i=1}^{n_2}\mathcal{B}_{2,i}$ deux polycourbes de Bézier telles que l'arrangement $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\})$ soit simple. Supposons qu'il existe $i_1 \in \{2,\dots,n_1\}$ et $i_2 \in \{1,\dots,n_2\}$ tels que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)} \in \mathcal{B}_{2,i_2}\setminus\{\mathrm{P}_0^{(2,i_2)},\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}\}$ (i_1 est différent de 1, car l'arrangement étant simple nous aurons $\mathrm{P}_0^{(1,1)},\mathrm{P}_{m_{n_1}}^{(1,n_1)} \notin \mathcal{B}_2$ et $\mathrm{P}_0^{(2,1)},\mathrm{P}_{m_{n_2}}^{(2,n_2)} \notin \mathcal{B}_1$). La simplicité de

$\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\})$ implique l'existence de $\varepsilon>0$ tel que

$$
\begin{gathered}
\mathrm{B}_{m_{1,i_1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1)},\ldots,\mathrm{P}_{m_{1,i_1}}^{(1,i_1)}\,;\,]0,\varepsilon[)\cap reg(\mathcal{B}_{2,i_2},[\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])=\emptyset\\
\text{et}\\
\mathrm{B}_{m_{1,i_1-1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1-1)},\ldots,\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\,;\,]\varepsilon,1[)\subset reg(\mathcal{B}_{2,i_2},[\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])
\end{gathered}
\tag{IV.2}
$$

ou

$$
\begin{gathered}
\mathrm{B}_{m_{1,i_1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1)},\ldots,\mathrm{P}_{m_{1,i_1}}^{(1,i_1)}\,;]0,\varepsilon[)\subset reg(\mathcal{B}_{2,i_2},[\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])\\
\text{et}\\
\mathrm{B}_{m_{1,i_1-1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1-1)},\ldots,\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\,;\,]\varepsilon,1[)\cap reg(\mathcal{B}_{2,i_2},[\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])=\emptyset
\end{gathered}
\tag{IV.3}
$$

À chaque fois que la situation décrite par les formules (IV.2) survient, nous considérons que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}\in\mathcal{B}_{2,i_2}$ et $\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\notin\mathcal{B}_{2,i_2}$, et si nous avons la situation décrite par (IV.3), nous considérons que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}\notin\mathcal{B}_{2,i_2}$ et $\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\in\mathcal{B}_{2,i_2}$. Autrement dit, nous considérons que celle des deux courbes de Bézier ayant le point $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$ comme extrémité commune qui "part vers l'intérieur" de la courbe $\mathcal{B}_{2,i_2}$ ne coupe pas $\mathcal{B}_{2,i_2}$ en $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$, et seulement celle qui "part vers l'extérieur" aura en commun avec $\mathcal{B}_{2,i_2}$ ce point. Cette convention n'introduit pas d'incohérence dans le nombre ou l'ordre des intersections de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et elle est faite, comme nous le verrons dans la démonstration du théorème suivant, à cause des situations comme celle de la figure IV.8, où nous ne pourrons jamais avoir $\mathcal{P}_{1,i_1}\cap\mathcal{P}_{2,i_2}\neq\emptyset$ si le paramètre correspondant à $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$ sur la courbe $\mathcal{B}_{2,i_2}$ n'est pas de la forme $i/2^k$.

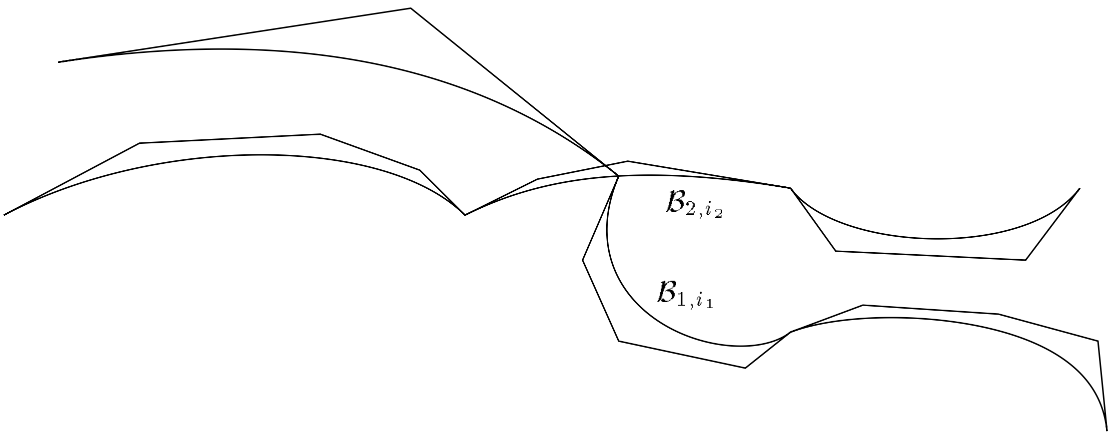


Figure IV.8

Théorème IV.24. – *Soit $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ une famille de polycourbes telle que $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple et $n\geq 3$. Supposons en plus que*

$$\mathrm{P}_0^{(i,n_i)},\mathrm{P}_{m_{i,n_i}}^{(i,n_i)}\notin\bigcup_{k\neq i}\mathcal{B}_k\qquad\forall i\in\{1,\ldots,n\}$$

Alors il existe une famille $\mathcal{P}=\{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de polygones de contrôle de ces polycourbes ayant les propriétés

(IV.25.i) *$\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ sont équivalents ;*

(IV.25.ii) *toute famille de polygones de contrôle obtenue par subdivision de de Casteljau à partir de $\mathcal{P}$ satisfait la propriété* (IV.25.i).

Preuve – Nous utiliserons les mêmes notations que précédemment, en considérant que la polycourbe $\mathcal{B}_i$ courante s'écrit $\mathcal{B}_i = \cup_{j=1}^{n_i} \mathcal{B}_{i,j}$ et a le polygone de contrôle $\mathcal{P}_i = \cup_{j=1}^{n_i} \mathcal{P}_{i,j}$ avec $\mathcal{P}_{i,j} = \mathrm{P}_0^{(i,j)} \mathrm{P}_1^{(i,j)} \ldots \mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}$.

Sans restriction de la généralité, nous pouvons supposer que

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i \neq i_1} \mathcal{B}_i)) \leq 1 \quad \forall i_1 \in \{1, \ldots, n\} \forall j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\} \tag{IV.4}$$

En effet, soient $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ et $j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\}$ tels que $\operatorname{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i \neq i_1} \mathcal{B}_i)) = p > 1$. Nous pouvons écrire $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i \neq i_1} \mathcal{B}_i) = \{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_p\}$, en supposant que les points $\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_p$ sont ordonnés sur la courbe $\mathcal{B}_{i_1,j_1}$. Il existe alors $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \leq 1$ tels que $\mathrm{Q}_k = \mathrm{B}_{m_{i_1,j_1}}(\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}; t_k)$. Nous prenons

$$\kappa = \left\lceil -\log_2 \left(\min_{\alpha=2}^{p} (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \right) \right\rceil$$

et nous subdivisons la courbe $\mathcal{B}_{i_1,j_1}$ κ fois. Chacune des courbes de Bézier ainsi obtenues sera en fait la restriction de la courbe initiale a un intervalle de longueur $1/2^\kappa$. Cette valeur étant inférieure à $\min_{\alpha=2}^{p}(t_\alpha - t_{\alpha-1})$ par le choix de κ, il ne peut pas y avoir de tel intervalle de définition contenant plus d'un paramètre t_α. Toutes les courbes obtenues par les subdivisions décrites satisfont donc la propriété ci-dessus, et en répétant ce procédé à chaque fois qu'une courbe de Bézier d'une des polycourbes de l'arrangement coupe l'ensemble des polycourbes auxquelles elle n'appartient pas en plus d'un point nous obtenons une nouvelle écriture de l'arrangement pour laquelle la condition donnée est satisfaite.

Ainsi, l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ satisfait la condition (IV.4). Pour prouver l'existence d'une famille $\mathcal{P}$ de polygones de contrôle des polycourbes de la famille $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ soit un arrangement simple, nous traiterons une par une les conditions de la définition d'un arrangement simple. Soit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min_{\substack{i_1 \neq i_2 \\ \mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} = \emptyset}} \mathrm{d}\Big(\mathcal{B}_{i_1,j_1}, \mathcal{B}_{i_2,j_2}\Big)$$

Suite aux propriétés des courbes de Bézier, il existe une famille de polygones de contrôle $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ telle que

$$\delta^{\mathrm{H}}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i,j}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i,j}\big) < \varepsilon_0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \forall j \in \{1, \ldots, n_i\} \tag{IV.5}$$

Si nous supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ ne satisfait pas (IV.22.i), il existe $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, n\}$ tous distincts et $j_k \in \{1, \ldots, n_{i_k}\}$ pour $k = 1, 2, 3$ tels que

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset$$

Soit $\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$. Comme la relation (IV.4) est satisfaite, nous ne pouvons pas avoir $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset$. Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} = \emptyset$. Alors

$$\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) + \mathrm{d}(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) + \delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}) < 2\varepsilon_0$$

contradiction avec la définition de ε_0. La condition (IV.5) est invariante à la subdivision de de Casteljau, ce qui signifie que toute famille de polygones de contrôle obtenue par subdivision de de Casteljau à partir de $\mathcal{P}$ va générer un arrangement vérifiant la condition (IV.22.i).

Pour montrer l'existence d'une famille $\mathcal{P}$ satisfaisant les conditions (IV.22.ii) et (IV.22.iii), nous allons prouver qu'il existe une famille $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ telle que

$$\operatorname{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = \operatorname{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \qquad \begin{array}{l} \forall i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\} \\ \forall j_k \in \{1, \ldots, n_{i_k}\},\ k = 1, 2 \end{array}$$

Si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, un raisonnement identique à celui fait pour prouver que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ satisfaisant la relation (IV.5) vérifie (IV.22.i) nous mènera à la conclusion $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset$. Il nous reste donc à prouver l'existence d'une famille de polygones de contrôle telle que si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = 1$ (car $\mathcal{B}$ satisfait la condition (IV.4)). Cette preuve sera faite en deux étapes, nous construirons d'abord une famille $\mathcal{P}$ telle que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ et ensuite une telle que $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) < 2$. Deux nouvelles notations nous sont nécessaires.

Notations

$$D_{i,j} = \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i,j)}\mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}, \mathcal{B}_{i,j}) \setminus \overline{reg(\mathrm{P}_0^{(i,j)}\mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}, \mathcal{B}_{i,j})}$$

$$\widetilde{D}_{i,j} = \mathrm{DP}(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i,j)}\widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i,j}}^{(i,j)}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i,j}) \setminus \overline{reg(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i,j)}\widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i,j}}^{(i,j)}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i,j})}$$

Soit $\{\mathrm{Q}\} = \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$.
Premier cas. Si nous avons la situation de la figure IV.9, où

$$\mathrm{Q} \in \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}\} \cap \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}^{(i_2,j_2)}\} \ ,$$

il est évident que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$.

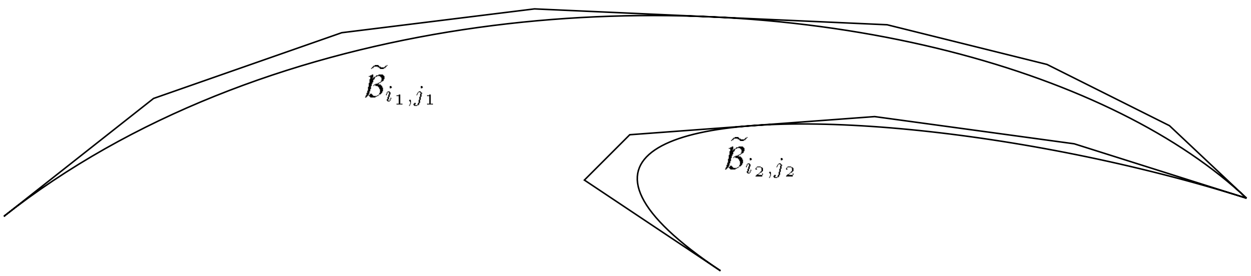


Figure IV.9

Deuxième cas. Un autre cas possible est celui de la figure IV.10, où le point Q est une des extrémités de l'une des deux courbes et appartient à l'intérieur (en dimension 1) de l'autre, et supposons que $\mathrm{Q} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}\}$. $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant un arrangement simple et compte tenant de la convention de notation faite, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1} \neq \emptyset$ et soit

$$\varepsilon_1 = \sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$$

Nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à ce que $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_1$. De par la définition de ε_1, la courbe $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$ partage la région $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}$ en deux parties connexes. D'un autre côté,

$$\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_1 \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_0^{i_1,j_1)}, \mathrm{P}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1}\} \subset \mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}$$

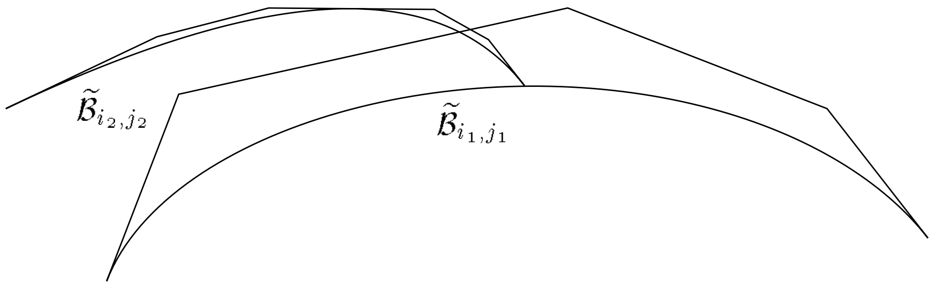


Figure IV.10

Nous en déduisons que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \neq \emptyset \tag{IV.6}$$

Pour fixer les notations, supposons que $\mathrm{Q} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$. Suite à la convention de notation, nous aurons $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$.

Supposons, par l'absurde, que

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset \tag{IV.7}$$

Nous savons $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big) \neq \emptyset$. Si $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big)$, les propriétés des courbes de Bézier impliqueront $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big)$, contradiction avec la relation (IV.6). Il résulte $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \delta\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big) \neq \emptyset$, ce qui, avec la relation (IV.7), donnera $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[\neq \emptyset$. Alors il existe $k \in \{1, \ldots, \widetilde{m}_{i_2,j_2} - 1\}$ tel que

$$[\widetilde{\mathrm{P}}_k^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}^{(i_2,j_2)}] \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[\neq \emptyset$$

et soit $\mathrm{R} \in [\widetilde{\mathrm{P}}_k^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}^{(i_2,j_2)}] \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[$. Des relations

$$\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{(i_1,j_1)} \setminus \big\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}\big\}, \qquad \widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$$

et (IV.7) il résulte $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$. D'un autre côté, $\mathrm{R} \notin reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$, donc la ligne polygonale $\cup_{\alpha=1}^{k} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]$ doit couper la frontière de $reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$. Avec la condition (IV.7), cela impliquera

$$\left(\bigcup_{\alpha=1}^{k} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]\right) \cap \left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \big\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}\big\}\right) \neq \emptyset$$

Soit S un point de l'intersection des deux ensembles ci-dessus tel que, si $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$ a la propriété $\mathrm{S} \in [\widetilde{\mathrm{P}}_\ell^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell+1}^{(i_2,j_2)}]$, la longueur de la ligne polygonale $\cup_{\alpha=0}^{\ell} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]$ soit minimale. Soit Ω la région bornée, d'un côté, par le morceau de $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ compris entre les points Q et S, et, de l'autre côté, par le morceau de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ compris entre $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} = \mathrm{Q}$ et S :

$$\Omega = reg\left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QS}]}, \left(\bigcup_{\alpha=0}^{\ell-1} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]\right) \cup [\mathrm{P}_\ell^{(i_2,j_2)} \mathrm{S}]\right)$$

La condition (IV.7) et le fait que $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$ impliquent

$$\Omega \subset reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$$

Les propriétés des courbes de Bézier (à savoir le fait que $[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)}$ est tangent à $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ en $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}_2^{(i_2,j_2)}))$ donnent $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \Omega \neq \emptyset$. Nous ne pouvons pas avoir $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \Omega$, car cela donnerait une contradiction avec la relation (IV.6), donc $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\delta(\Omega) \setminus \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\}\big) \neq \emptyset$. Comme $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \setminus \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}^{(i_2,j_2)}\}\big) = \emptyset$, nous déduisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \{\mathrm{Q}\}\big) \neq \emptyset$, en obtenant ainsi une contradiction avec la relation (IV.4). La supposition (IV.7) nous ayant menés à une contradiction, elle est fausse et nous avons par conséquent prouvé

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$$

Troisième cas. Il nous reste ainsi à étudier le cas général des positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$, quand le point Q n'est l'extrémité d'aucune de ces deux courbes, cas présenté figure IV.11.

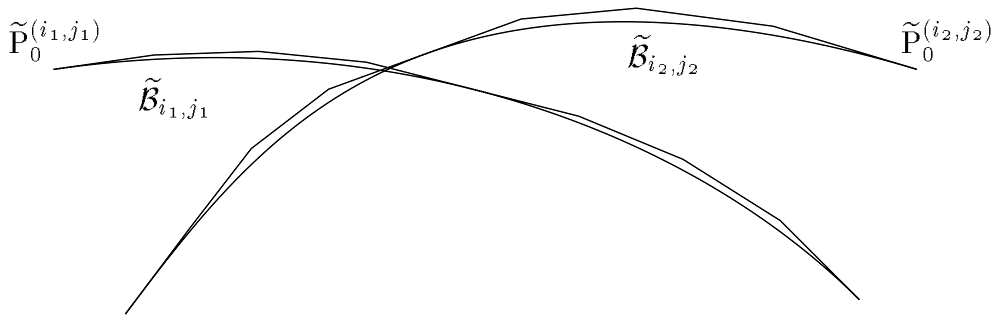


Figure IV.11

Pour fixer les notations, supposons que les deux courbes sont telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \Big(\mathrm{B}(\mathrm{Q},\varepsilon) \cap \widetilde{D}_{i_k,j_k}\Big) \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_\ell,j_\ell}\Big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_\ell,j_\ell)}\mathrm{Q}]} \neq \emptyset \quad \forall k \neq \ell \in \{1,2\}$$

Nous définissons

$$\varepsilon_1' = \sup_{\mathrm{P}\in\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}\mathrm{Q}]}\cap\widetilde{D}_{i_2,j_2}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big) \qquad \varepsilon_1'' = \sup_{\mathrm{P}\in\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\mathrm{Q}]}\cap\widetilde{D}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$$

ε_1' et ε_1'' sont tous les deux positifs et nous prenons $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1', \varepsilon_1''\}$. Nous pouvons obtenir par subdivision de de Casteljau deux lignes polygonales $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ telles que $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_k,j_k}) < \varepsilon_1$, pour $k = 1,2$. De par la définition de ε_1, la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]}$ partage la région $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_2,j_2}$ en deux parties connexes telles que les points $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}^{(i_2,j_2)}$ n'appartiennent pas à l'adhérence de la même de ces deux parties. Comme la ligne polygonale $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ joint ces deux points et est incluse dans $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_2,j_2}$, il résulte $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]} \neq \emptyset$. Symétriquement, nous aurons aussi $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}]} \neq \emptyset$. Soit $\{\mathrm{T}\} = \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]}$ et soit $h \in \{0,\ldots,\widetilde{m}_{i_2,j_2}-1\}$ tel que $\mathrm{T} \in [\mathrm{P}_h^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{h+1}^{(i_2,j_2)}]$. Si nous supposons que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, nous aurons aussi

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \left(\Big(\bigcup_{\alpha=0}^{h-1} [\mathrm{P}_\alpha^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]\Big) \cup [\mathrm{P}_h^{(i_2,j_2)}\mathrm{T}]\right) = \emptyset$$

et le raisonnement à faire pour obtenir une contradiction est identique à celui fait pour le deuxième cas , en considérant la restriction de la courbe $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$ délimitée par $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et Q et la restriction du polygone $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ délimitée par $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et T.

Il est évident, dans les trois cas possibles de positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$, qu'aucune subdivision ultérieure ne changera le fait que l'intersection des polygones de contrôle est non-vide, car les majorations imposées à $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_k,j_k})$, pour $k = 1, 2$, seront toujours vérifiées.

Nous arrivons ainsi à la deuxième étape de notre preuve et nous cherchons des polygones de contrôle $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ tels que $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = 1$. Pour cette preuve aussi nous devons traiter séparément les trois cas évidentiés dans l'étape précédente.
Premier cas. Supposons que $\mathrm{Q} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$. Nous notons

$$\widetilde{A}_{i_k,j_k} = \mathrm{DP}\big(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_k,j_k)}\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_k,j_k)}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_k,j_k)}\widetilde{\mathrm{P}}^{(i_k,j_k)}_{\widetilde{m}_{i_k,j_k}}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}\big) \qquad k = 1, 2$$

Les affirmations suivantes résultent de manière évidente des propriétés des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}$, pour $k = 1, 2$:
- $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2} = \{\mathrm{Q}\} \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \{\mathrm{Q}\}$
- si $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2} \neq \{\mathrm{Q}\}$, alors

$$\Big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}\Big) \cap \Big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1}\Big) = \emptyset \qquad \text{(IV.8)}$$

  et ces deux morceaux de courbes partagent la région $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}$ en trois parties connexes (figure IV.12).

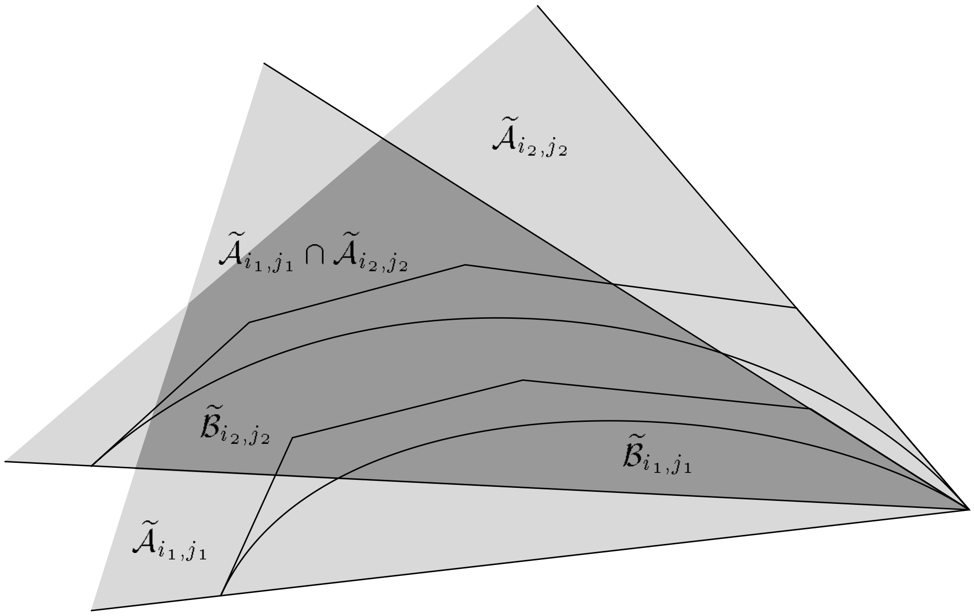


Figure IV.12

Si nous sommes dans la première des deux situations décrites ci-dessus, la relation à prouver est immédiate. Si nous sommes dans la deuxième, soit $\varepsilon_2 = \mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1})$. Supposons que

$$\sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) < \sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \qquad \text{(IV.9)}$$

Nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à avoir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < (1/2)\varepsilon_2$ et quand cette condition est satisfaite il est facile à voir que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ ne peuvent pas avoir autre point commun que Q. Si l'inégalité (IV.9) est inverse, nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$; les deux membres de (IV.9) ne peuvent pas être égaux à cause de la relation (IV.8).

Deuxième et troisième cas. Nous traiterons ces deux cas ensemble, car ils sont similaires.

Les courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ admettent quatre droites d'appui communes. Nous notons Δ celle des deux droites d'appui qui satisfait

$$\Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \subset \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \qquad \Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$$

Une telle droite d'appui existe, car l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant simple, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ ne peuvent pas avoir une tangente commune en Q.

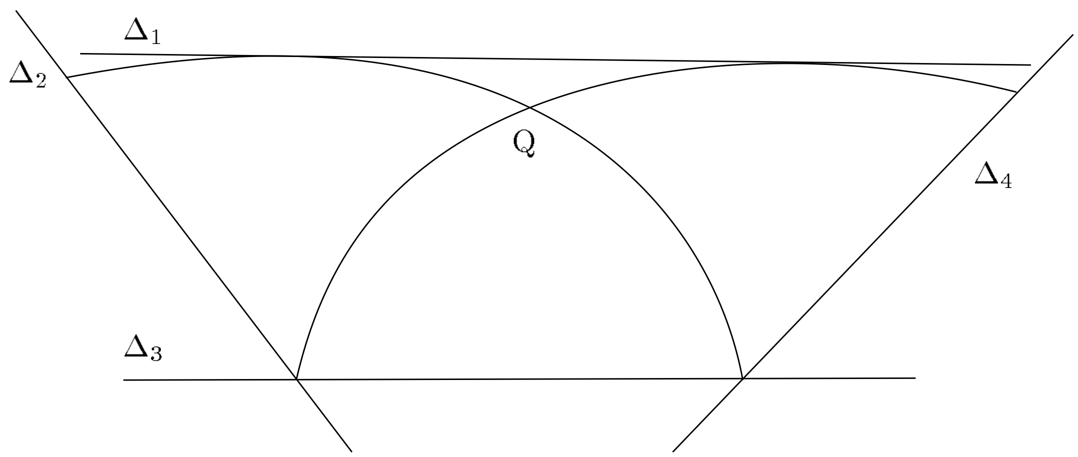


Figure IV.13 *La seule des quatre droites d'appui satisfaisant les deux conditions ci-dessus est* Δ_1

Soient θ_1 l'angle formé par Δ et $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et θ_2 l'angle formé par Δ et $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$. Nous prenons

$$\varepsilon_2' = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{Q},\Delta)\cos\theta_1 \qquad \varepsilon_2'' = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{Q},\Delta)\cos\theta_2$$

et nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à obtenir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_2'$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ jusqu'à obtenir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) < \varepsilon_2''$. Soient $\Delta_1^{(\varepsilon_2')}$ la parallèle à $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ située dans le demi-plan $\mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et telle que $\mathrm{d}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')}, \tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})) = \varepsilon_2'$ et $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ la droite définie de manière analogue par rapport à $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$ et ε_2''. Il est facile à voir que $D_1^{(\varepsilon_2')}$ et $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ se coupent en un point T situé à mi-distance entre Q et sa projection sur la droite Δ.

Évidemment, $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \subset \mathrm{DP}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}(\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$, donc l'intersection des deux lignes polygonales sera contenue dans l'intersection des deux demi-plans. Plus, en notant R_1 le point d'intersection de $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ avec $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ tel que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[} \subset \mathrm{DP}(\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \cap \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$$

et R_2 le point d'intersection de $\Delta_1^{(\varepsilon_2')}$ avec $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ tel que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR}_2[} \subset \mathrm{DP}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) \cap \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$$

nous aurons

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset reg\big([\mathrm{R_1T}] \cup [\mathrm{TR_2}] \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{R_2Q}[} \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR_1}[} \tag{IV.10}$$

La région ci-dessus est un pseudo-losange que nous appellerons $\mathcal{L}$.

Si nous supposons $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \geq 2$, il existe $\mathrm{S_1}, \mathrm{S_2} \in \mathcal{L}$ qui appartiennent simultanément aux deux polygones de contrôle. De par les propriétés des courbes de Bézier complètement convexes, si deux points $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}$ appartiennent au polygone de contrôle $\widetilde{\mathcal{P}}$ de la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}$, alors $\mathrm{card}(\mathrm{P_1P_2} \cap \mathcal{B}) \in \{0,2\}$. Nous aurons donc

$$\mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) \in \{0,2\} \qquad \mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \in \{0,2\}$$

Plus, pour des raisons de convexité, si $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR_1}[}$ et si $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR_2}[}$. Ainsi, nous aurons quatre possibilités pour la droite $\mathrm{S_1S_2}$.

1. $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k} = \emptyset$, $k = 1,2$ – cette situation n'est pas possible. En effet, $\mathcal{L}$ est, de par le choix des valeurs ε_2' et ε_2'', inclus dans $\mathcal{T} = reg\big([\mathrm{T_1T_2}] \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{T_2Q}]} \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT_1}]}\big)$, où $\{\mathrm{T}_k\} = \Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}$, pour $k = 1,2$. Toute droite passant par un point de $\mathcal{T}$ devra couper au moins deux de ses côtés, donc au moins une des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT_1}]}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT_2}]}$.

2. $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} = \emptyset$, $\mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR_2}[}) = 2$ – dans cette situation, $\mathrm{S_1S_2}$ devrait couper deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT_2}]}$ et ne pas couper $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT_1}]}$, ce qui est encore une fois impossible. Les conditions symétriques, $\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, $\mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR_1}[}) = 2$, mènent à la même impossibilité.

3. $\mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR_1}[}) = 2$, $\mathrm{card}(\mathrm{S_1S_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR_2}[}) = 2$ – nous avons donc une droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT_1}]}$ et deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT_2}]}$. Toute droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QT_1}[}$ doit couper $[\mathrm{T_1T_2}]$, et de même toute droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT_2}]}$ doit couper $[\mathrm{T_1T_2}]$. Ainsi, la droite $\mathrm{S_1S_2}$ coupera la frontière de $\mathcal{T}$ au moins cinq fois, contradiction. Cette situation est donc elle aussi impossible.

Nous avons vu comment la supposition $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \geq 2$ nous a menés, dans tous les cas, à des situations impossibles, nous déduisons qu'elle est fausse, et ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) &= \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \\ &\qquad \forall i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\} \quad \forall j_k \in \{0,\ldots,n_{i_k}\} \quad k = 1,2 \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Il est aussi facile à remarquer qu'aucune subdivision ultérieure ne changera les propriétés qui impliquent cette relation. Nous allons prouver que toute famille de polygones de contrôle $\mathcal{P}$ vérifiant (IV.11) forme un arrangement qui n'est pas seulement simple, mais aussi équivalent à $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ (rappelons que $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ satisfait (IV.4)).

Nous avons déjà montré que la condition (IV.22.i) est satisfaite, passons maintenant à (IV.22.ii). Si $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ ne vérifie pas cette relation, il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\}$, $j_k \in \{1,\ldots,n_{i_k}\}$ et $\ell_k \in \{0,\ldots,m_{i_k,j_k}\}$ pour $k = 1,2$ tels que soit

$$\mathrm{P}_{\ell_1}^{(i_1,j_1)} \in]\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\ell_1-1}^{(i_1,j_1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}, \mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)})\ ,$$

soit

$$\mathrm{P}_{\ell_1}^{(i_1,j_1)} = \mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{\ell_1-1}^{(i_1,j_1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{\ell_2-1}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}, \mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}, \mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)})$$

comme présenté figure IV.14.

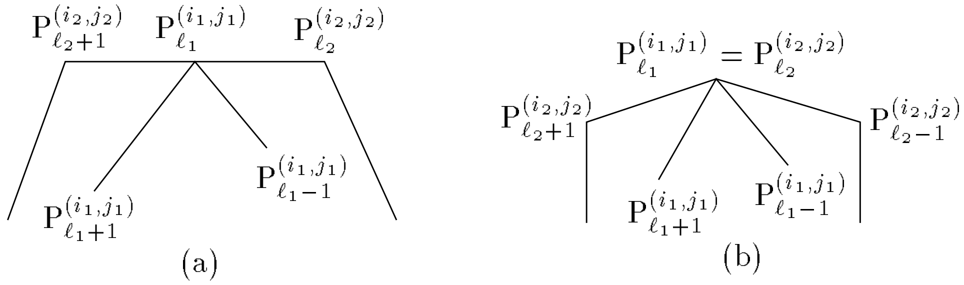


Figure IV.14 (a) *illustre la première des deux situation décrites ci-dessus,* (b) *la deuxième*

Supposons que nous nous situons dans le cas de la figure IV.14(a), l'autre cas se traite de manière tout-à-fait similaire. Il est facile à voir que nous ne pouvons pas avoir $P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1-1}, P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1} \in DP_{op}(P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2} P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}, \mathcal{P}_{i_2,j_2})$, car dans ce cas il résulte immédiatement $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} = \emptyset$, d'où une contradiction avec la définition de ε_0. Donc

$$P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1-1}, P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1} \in DP(P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2} P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}, \mathcal{P}_{i_2,j_2}) \tag{IV.12}$$

et en plus $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$. Nous pouvons en déduire

$$\{P^{(i_1,j_1)}_0, P^{(i_1,j_1)}_{m_{i_1,j_1}}\} \cap reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2}) \neq \emptyset \tag{IV.13}$$

En effet, (IV.13) et le fait que $\mathrm{card}(\mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2}) = 1$ impliquent

$$\mathcal{B}_{i_1,j_1} \subset \bigcap_{k=0}^{m_{i_2,j_2}-1} DP(P^{(i_2,j_2)}_k P^{(i_2,j_2)}_{k+1}, \mathcal{P}_{i_2,j_2})$$

et cette région du plan est séparée en deux parties connexes par $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$. Donc si $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2})$ est impair, un et seulement un des points $P^{(i_1,j_1)}_0$ et $P^{(i_1,j_1)}_{m_{i_1,j_1}}$ appartient à $reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$. Soit $P^{(i_1,j_1)}_0$ ce point. Si $P^{(i_1,j_1)}_0 = \widetilde{P}^{(i_1,j_1)}_0$, nous avons encore une fois obtenu une contradiction avec la définition de ε_0. Sinon, un raisonnement identique au celui que nous venons de faire nous mène à la relation $P^{(i_1,j_1-1)}_0 \in reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de l'appartenance de $\widetilde{P}^{(i_1,j_1)}_0$ à $reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$ et donc de la contradiction cherchée.

Ainsi, supposer que la famille $\mathcal{P}$ construite ne vérifie pas la condition (IV.22.ii) nous mène toujours à une contradiction, donc elle est fausse.

La condition (IV.22.iii) se traduit, dans le cas des arrangements de lignes polygonales, par

$$\mathrm{card}([P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1} P^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1}] \cap [P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2} P^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}]) < \infty$$
$$\forall i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\} \forall j_k \in \{1, \ldots, n_{i_k}\} \forall \ell_k \in \{0, \ldots, m_{i_k,j_k} - 1\}, k = 1, 2$$

relation qui est évidemment satisfaite par l'ensemble de polygones de contrôle $\mathcal{P}$.

Le fait que l'ensemble $\cup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ est connexe résulte rapidement de la connexité de l'ensemble $\cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ et de (IV.11). En conclusion, la famille $\mathcal{P}$ satisfait toutes les conditions de la définition IV.22 et par conséquent $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est un arrangement simple. L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant lui aussi simple et comme $\mathrm{card}(I) = n > 3$, l'hypothèse (h1) est vérifiée.

Pour vérifier l'hypothèse (h2), nous allons construire une fonction φ_0 faisant correspondre les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et ceux de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et nous prouverons qu'elle est bijective et satisfait (h2.1) et (h2.2).

Soit s un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Alors il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ et $j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\}$, $j_2 \in \{1, \ldots, n_{i_2}\}$ tels que

$$s = \mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2}$$

car $\mathcal{B}$ satisfait (IV.4). De la relation (IV.11) il résulte que $\mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}$ est un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et nous posons $\varphi_0(s) = \mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}$, et ceci pour tous les sommets de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Le fait que la fonction φ_0 ainsi définie est bijective vient immédiatement de la relation (IV.11), et le fait qu'elle satisfait (h2.1) aussi. Pour la condition (h2.2), il suffit de remarquer que l'ordre des courbes de Bézier $\mathcal{B}_{i,j}$, $j \in \{1, \ldots, n_i\}$, dans la polycourbe $\mathcal{B}_i$ est le même que l'ordre des B-polygones $\mathcal{P}_{i,j}$, $j \in \{1, \ldots, n_i\}$, dans le polygone de contrôle $\mathcal{P}_i$. En utilisant toujours (IV.11), nous obtenons que φ_0 satisfait aussi (h2.2). En plus, la condition (IV.11) est invariante à la subdivision de de Casteljau, toute famille de polygones de contrôle obtenue en l'utilisant à partir de la famille courante $\mathcal{P}$ qui satisfait (IV.11) vérifiera aussi cette condition, donc les hypothèses (h1) et (h2).

Les propriétés des courbes de Bézier impliquent de manière triviale le fait que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ satisfont (IV.23.i), et ceci quel que soit le nombre de subdivisions appliquées aux polycourbes de $\mathcal{B}$.

La supposition sur les extrémités des polycourbes $\mathcal{B}_i$ faite dans l'hypothèse du théorème nous dit qu'il n'existe pas de sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ qui soit une extrémité de polycourbe. D'un autre côté, la définition de ε_1, la valeur utilisée pour imposer $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ (aussi bien dans le deuxième cas que dans le troisième cas du point de vue des positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$), nous assure que dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ non plus il ne peut exister de sommet qui soit une extrémité d'un polygone de contrôle. En plus, il est évident que si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ traverse $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ de gauche à droite dans leur point d'intersection, alors $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ traverse $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ de gauche à droite dans leur point d'intersection et réciproquement, pour tous $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\}$ et $j_2 \in \{1, \ldots, n_{i_2}\}$. Ces deux dernières propriétés sont aussi invariantes à la subdivision de de Casteljau, donc la condition (IV.23.ii) est satisfaite par l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ courant et par tous ceux obtenus à partir de lui par subdivision.

Nous pouvons ainsi conclure la preuve du théorème, car la proposition IV.23 peut être appliquée aux arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

$\square$

Chapitre V

Algorithme de calcul d'un arrangement de lignes polygonales équivalent à un arrangement de polycourbes

V.1. Introduction

Le résultat qui conclut le chapitre précédent justifie la recherche d'un algorithme de construction d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes (de Bézier, mais comme à partir de maintenant nous ne parlerons que de polycourbes de Bézier, nous ne le préciserons plus). Mais le théorème ne nous fournit pas de critère utilisable dans un algorithme, tout comme dans le cas de l'enveloppe convexe, car les valeurs définies dans la preuve sont calculées en utilisant les courbes de Bézier elles-mêmes et non pas uniquement leurs polygones de contrôle. Il nous faudra ainsi trouver des conditions "polygonales" assurant l'équivalence des deux arrangements avant de présenter un algorithme.

Précisons encore une fois que nous ne calculons pas la structure combinatoire de l'arrangement de polycourbes, mais seulement un arrangement de lignes polygonales qui a cette structure combinatoire. Ainsi, notre algorithme pourrait être vu comme effectuant un prétraitement de l'arrangement de polycourbes, en vue des opérations ultérieures. Mais il est plus que cela, car, comme nous verrons à la fin de la section V.3, nous construisons en fait *deux* arrangements de lignes polygonale équivalents à celui de polycourbes, l'arrangement de polygones de contrôle, $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, et l'arrangement de polygones support, $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Ces deux arrangements réalisent un "encadrement" pour celui de polycourbes et certains des problèmes de base sur des arrangements pourront être résolus en travaillant uniquement sur des lignes polygonales. Ainsi, si $c_{\mathcal{B}}$ est une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, alors $c_{\mathcal{P}} \cap c_{\mathcal{S}} \subset c_{\mathcal{B}} \subset c_{\mathcal{P}} \cup c_{\mathcal{S}}$, où $c_{\mathcal{P}}$ et $c_{\mathcal{S}}$ sont les cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, respectivement $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, qui correspondent à $c_{\mathcal{B}}$. En utilisant cette propriété, la localisation d'un point dans $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ peut se faire sur $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, en subdivisant éventuellement certaines courbes de Bézier ; si la position n'est pas "trop" dégénérée, la solution est trouvée assez vite.

La section V.3 est consacrée à la recherche de critères d'équivalence de l'arrangement de polygones de contrôle à celui de polycourbes, et nous voyons tout de suite que des conditions posées uniquement sur les polygones de contrôle ne peuvent pas suffire. Nous avons ainsi besoin des polygones support, et en les utilisant nous donnons d'abord un résultat décrivant les propriétés que les polygones de contrôle et support doivent satisfaire pour l'équivalence, et ensuite nous prouvons que par subdivision de de Casteljau nous pouvons arriver à des écritures des polycourbes de l'arrangement donné dont les lignes polygonales associées satisfont les propriétés mentionnées. La section V.4 présente la structure de l'algorithme que nous avons conçu, en expliquant en détail son fonctionnement. Une étude de coût théorique y est aussi menée. La section V.5 contient les résultats obtenus en traitant un échantillon d'arrangements par l'implémentation de notre algorithme, ainsi que leurs interprétations. La section V.6 présente quelques exemples d'arrangements de polycourbes, avec les arrangements de polygones de contrôle et de polygones support qui leur sont associés.

V.2. Concentré de chapitre (V et fin)

Ce chapitre étant le pendant, pour le problème des arrangements, du chapitre trois, sa lecture se fait à peu près de la même façon.

Premier niveau. Dans la section V.3, ne lisez pas les preuves des résultats, mais les commentaires divers se trouvant entre les énoncés oui (et les énoncés bien évidemment).

Dans la section V.4, la lecture des sous sections V.4.1 et V.4.2 (sans leurs paragraphes) vous permet de vous faire une idée sur l'algorithme, après quoi la sous section V.4.3 fournit son coût. Les sections V.5 et V.6 sont à parcourir en totalité.
Deuxième niveau. À part les preuves des résultats de la section V.3 (surtout celle du lemme V.1, bien technique), tout est à lire.

V.3. Résultats théoriques

De même que pour le problème du calcul de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier, le résultat donné par le théorème IV.24 ne peut pas être traduit par un algorithme respectant l'approche que nous adoptons, car le calcul des valeurs ε_0, ε_1, ε_2' et ε_2'' fait intervenir des courbes de Bézier et non pas uniquement leurs B-polygones. Nous devons donc trouver des critères d'équivalence entre un arrangement de polycourbes de Bézier et celui des polygones de contrôle respectifs reposant seulement sur ces derniers.

V.3.1. *Le nombre d'intersections*

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux courbes de Bézier complétement convexes, aucune information sur le cardinal de leur intersection ne peut être obtenue en regardant l'intersection de leurs B-polygones. La figure V.1 illustre cette affirmation.

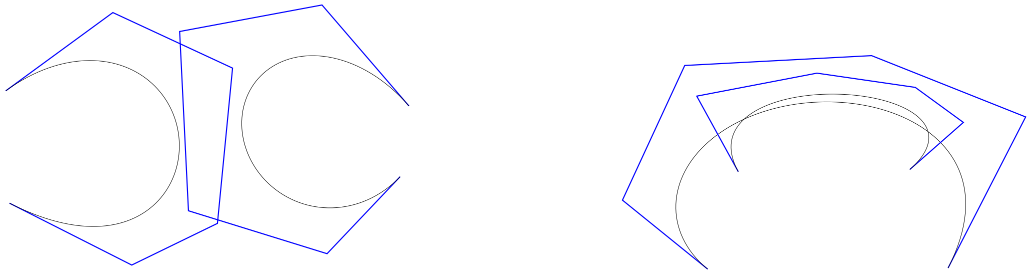


Figure V.1

Une courbe de Bézier étant "encadrée" d'un côté par son B-polygone et de l'autre côté par le segment joignant ses extrémités, il est naturel de chercher des informations supplémentaires sur l'intersection des deux courbes dans les intersections des segments $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]$ et $[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]$ entre eux et respectivement avec les lignes polygonales $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_1$. Comme $\mathrm{card}([\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]) \in \{0, 1\}$, nous cherchons en fait des critères assurant que les deux courbes sont disjointes ou que le cardinal de leur intersection est égal à 1.

Pour avoir $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 0$, il suffit de vérifier si $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ et $reg(\mathcal{P}_1, [\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]) \cap reg(\mathcal{P}_2, [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]) = \emptyset$, car les propriétés des courbes de Bézier impliqueront alors $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Si nous voulons nous assurer de la relation $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 1$, la condition la plus forte que nous pouvons poser sur les intersections des B-polygones et de segments $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]$ et $[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]$ est

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) &= \mathrm{card}([\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]) \\ &= \mathrm{card}([\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap \mathcal{P}_2) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_1 \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]) = 1 \end{aligned} \tag{V.1}$$

et nous pouvons voir figure V.2 qu'elle n'est pas suffisante.

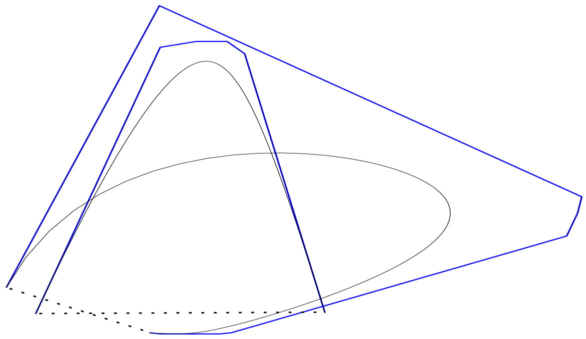


Figure V.2

Le résultat suivant nous donne une condition suffisante pour que l'intersection des deux courbes de Bézier ait le cardinal égal à 1 :

Lemme V.1. – *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux courbes de Bézier complétement convexes telles que $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\})$ soit un arrangement simple. Supposons que leurs B-polygones respectifs, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, satisfont la relation (V.1). Soient $i_1 \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$, $i_2 \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ tels que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = [\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}]$. Les conditions suivantes sont suffisantes pour avoir $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 1$:*

$$\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{i_1}^{(1)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2) \\ ou \\ \mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P}_0^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2)} \\ et \\ \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{i_1}^{(1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2) \\ ou \\ \mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2) \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2)} \end{array} \right) \tag{V.2}$$

et

$$\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{i_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1) \\ ou \\ \mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1) \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P}_0^{(2)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1)} \\ et \\ \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{i_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1) \\ ou \\ \mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1) \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_1}^{(1)}\mathrm{P}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{P}_1)} \end{array} \right) \tag{V.3}$$

La condition (V.2) est l'expression formelle de la propriété qui intuitivement est formulée comme suit : si nous prenons sur $\mathcal{P}_1$ un sens de parcours tel que cette ligne polygonale "sorte" de $\mathcal{P}_2$ quand ce sens est respecté, alors l'extrémité se trouvant "à la fin" de $\mathcal{P}_1$ par rapport au sens de parcours est située dans le demi-plan fermé délimité par $\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)}$ qui ne contient pas $\mathcal{P}_2$ (voir figure V.3). La condition (V.3) est obtenue de (V.2) en échangeant les rôles de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

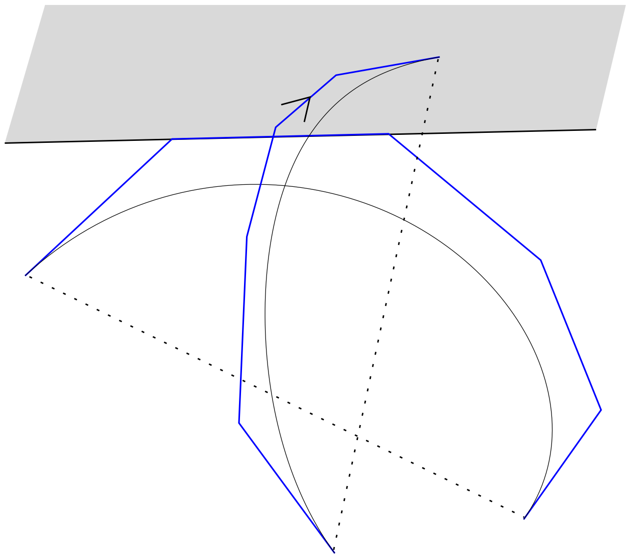


Figure V.3

Preuve du lemme – Soit $\{Q\} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Nous traitons séparément les trois cas suivants :

Cas 1. $Q \in \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\} \cap \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}$

Cas 2. $Q \in \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\} \cap \big(\mathcal{P}_2 \setminus \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}\big)$ ou $Q \in \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\} \cap \big(\mathcal{P}_1 \setminus \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\}\big)$

Cas 3. $Q \notin \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\} \cup \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}$

Cas 1. Supposons que $Q = P_0^{(1)} = P_0^{(2)}$; les trois autres situations possibles se résolvent de la même manière.

Dans ce cas, nous avons

$$reg(\mathcal{P}_1, [P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}]) \cap reg(\mathcal{P}_2, [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}]) = \emptyset$$

car dans le cas contraire nous obtiendrons

$$\mathrm{card}\big((\mathcal{P}_1 \cup [P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}]) \cap (\mathcal{P}_2 \cup [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}])\big) \geq 2$$

Comme $P_0^{(1)} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, $P_0^{(1)} \in \mathcal{P}_1 \cap [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}]$, $P_0^{(1)} \in [P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap \mathcal{P}_2$ et $P_0^{(1)} \in [P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}]$, ceci mène à une contradiction avec la condition (V.1).

Nous déduisons donc $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \subset \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\} \cap \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}$ et par conséquent $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{P_0^{(1)}\}$.

Cas 2. Les deux situations de ce cas sont symétriques, il suffit donc de discuter la première.

Sans perte de généralité, supposons que $Q = P_0^{(1)} \in \mathcal{P}_2 \setminus \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}$. Ce cas est présenté dans la figure V.4.

Comme $P_0^{(1)} \in [P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap \mathcal{P}_2$, nous déduisons que le point d'intersection des segments $[P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}]$ et $[P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}]$ est un point de $]P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}[$.

Il est évident que $[P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap \big(\mathcal{B}_2 \setminus \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}\big) \neq \emptyset$, car $[P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset$ et $[P_0^{(1)} P_{m_1}^{(1)}] \cap]P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}[\neq \emptyset$. Nous voulons prouver que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$.

Si $P_1^{(1)} \in DP(P_{i_2}^{(2)} P_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{P}_2)$, il résulte que $\mathcal{P}_1$ partage $reg(\mathcal{P}_2, [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}])$ en deux régions connexes disjointes, une connectée à $P_0^{(2)}$ et une connectée à $P_{m_2}^{(2)}$, car $\mathcal{P}_1 \cap]P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}[\neq \emptyset$. Comme $\mathcal{B}_2$ est une courbe (connexe) d'extrémités $P_0^{(2)}$ et $P_{m_2}^{(2)}$ et qui est contenue dans $reg(\mathcal{P}_2, [P_0^{(2)} P_{m_2}^{(2)}])$, il vient $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$.

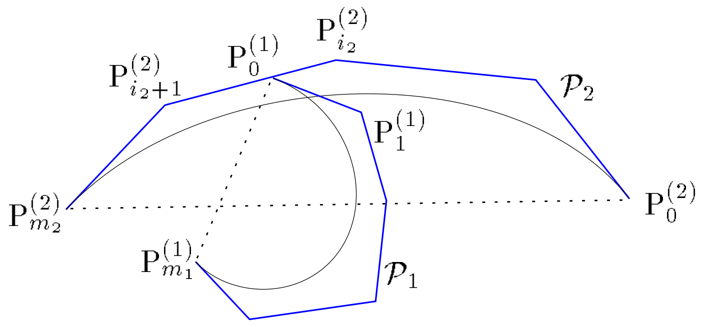


Figure V.4

Si $\mathrm{P}_1^{(1)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)},\mathcal{P}_2)$, (V.2) implique $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)},\mathcal{P}_2)}$. D'un autre côté, les relations $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]\cap]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\neq \emptyset$ et $\mathrm{P}_0^{(1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)$ donnent $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)}$; il vient

$$\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)} \cap \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)},\mathcal{P}_2)}$$

Mais $\mathcal{P}_2$ est convexe, par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)} \cap \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)},\mathcal{P}_2)} \subset &\\ \Big(\overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)} \cap \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_1^{(2)},\mathcal{P}_2)}\Big) \cup &\\ \Big(\overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)},\mathcal{P}_2)} \cap \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)},\mathcal{P}_2)}\Big)&\end{aligned}$$

Quel que soit, parmi les deux ensembles dont l'union forme le terme droit de l'inclusion ci-dessus, l'ensemble auquel $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ appartient, il est évident, de par la convexité de $\mathcal{P}_2$ et le fait que $\mathrm{P}_0^{(1)} \in \mathcal{P}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}$, que dans cette situation $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]\cap]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[= \emptyset$, d'où une contradiction. Le point $\mathrm{P}_1^{(1)}$ ne peut ainsi pas appartenir au demi-plan $\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{i_2}^{(2)}\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)},\mathcal{P}_2)$ si (V.1) et (V.2) sont satisfaites et par conséquent $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{P}_1 \neq \emptyset$.

Ainsi, nous avons $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap \big(\mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}\big) \neq \emptyset$ et $\mathrm{P}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Les points $\mathrm{P}_0^{(2)}$ et $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$ ne peuvent pas appartenir à $reg(\mathcal{P}_1,[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}])$, car dans ce cas $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]\cap]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[= \emptyset$, donc $\mathcal{B}_2$ traverse la région $reg(\mathcal{P}_1,[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}])$ en la partageant en deux parties connexes disjointes, l'une connectée à $\mathrm{P}_0^{(1)}$ et l'autre connectée à $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$; il en résulte $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$, car $\mathcal{B}_1$ est une courbe (continue) d'extrémités $\mathrm{P}_0^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ incluse dans $reg(\mathcal{P}_1,[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}])$.

Pour finir la discussion du cas 2, il nous reste à montrer $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) < 2$; la preuve sera faite par l'absurde, nous supposons que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \geq 2$ et nous montrons comment ceci nous mène à une contradiction.

Supposons que $\mathrm{P}_{i_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)$ ou $\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)$; nous obtiendrons, de par la condition (V.3), $\mathrm{P}_0^{(2)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)}$. Si $\mathrm{P}_{i_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)$ ou $\mathrm{P}_{i_2+1}^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)$, la démonstration est similaire.

Le point $\mathrm{P}_0^{(2)}$ appartient donc à $\overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)},\mathcal{P}_1)}$. Nous pouvons en déduire que si Δ est une droite qui coupe $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_0^{(1)}]}$ en au moins deux points, alors $\Delta \cap \mathcal{P}_1 \subset [\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}]$, car $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_0^{(1)}]}$ est convexe. D'un autre côté, si une droite Δ coupe $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(1)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]}$ deux fois (ou selon une de ses arêtes), il est évident que $\Delta \cap \mathcal{P}_1 \subset \{\mathrm{P}_0^{(1)}\}$, car $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)},\mathcal{P}_1)$

et $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \notin \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$.

Si $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \geq 2$, alors il existe une droite Δ_0 (engendrée par exemple par deux points d'intersection de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ distincts) telle que $\mathrm{card}(\Delta_0 \cap \mathcal{B}_1) = 2$ et $\mathrm{card}(\Delta_0 \cap \mathcal{B}_2) = 2$ (le cardinal de l'intersection d'une droite avec une courbe de Bézier complètement convexe ne peut pas être supérieur à 2). La propriété de la diminution de la variation et la convexité des polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ impliquent alors $\mathrm{card}(\Delta_0 \cap \mathcal{P}_1) = 2$ et $\mathrm{card}(\Delta_0 \cap \mathcal{P}_2) = 2$.

Nous avons vu que la droite Δ_0 ne peut pas couper $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_0^{(1)}]}$ en deux points, ou couper $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(1)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]}$ en deux points, car alors le cardinal de son intersection avec $\mathcal{P}_1$ ne serait pas 2. Δ_0 doit par conséquent couper $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_0^{(1)}[}$ en un point, soit Q_1 ce point, et $\mathcal{P}_2\big|_{]\mathrm{P}_0^{(1)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]}$ en un point, notons-le Q_2. Comme $\mathcal{P}_2$ est convexe, nous aurons $]\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2[\subset reg(\mathcal{P}_2, [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}])$. Mais nous avons vu que le segment $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]$ divise $reg(\mathcal{P}_2, [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}])$ en deux parties connexes disjointes, l'une étant connectée à $\mathcal{P}_2\big|_{[\mathrm{P}_0^{(2)},\mathrm{P}_0^{(1)}[}$ et l'autre étant connectée à $\mathcal{P}_2\big|_{]\mathrm{P}_0^{(1)},\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]}$. Nous aurons donc $]\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2[\cap]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[\neq \emptyset$ et il vient $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\cap]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[\neq \emptyset$. Évidemment, la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ ne peut pas être égale à la droite $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$, cette dernière coupant $\mathcal{P}_2$ en un seul point. Il résulte $\mathrm{card}(\Delta_0 \cap \mathcal{P}_1) \leq 1$, car $\mathcal{P}_1$ est un polygone convexe et par conséquent toute droite coupe $\mathcal{P}_1\cup]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[$ en au plus deux points, et nous avons ainsi obtenu une contradiction avec la définition de Δ_0. Nous pouvons donc conclure que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 1$ et la preuve pour le cas 2 est finie.

Cas 3. Cette situation, la plus générale, est présentée dans la figure V.5.

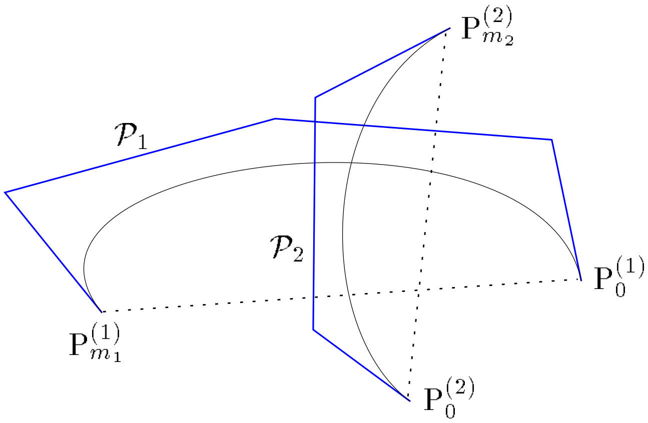


Figure V.5

Nous pouvons avoir $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}] \in \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}$ ou $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}] \in \{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}$, mais bien sûr pas les deux simultanément (nous serions dans le cas 1). Supposons que $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap [\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}] \notin \{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}$ et pour fixer les notations admettons que $\mathrm{P}_0^{(2)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, \mathcal{P}_1)$ et $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, \mathcal{P}_1)$ et que $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}, \mathcal{P}_2)$ et $\mathrm{P}_0^{(1)} \in \overline{\mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}, \mathcal{P}_2)}$.

Comme pour le cas 2, il est facile à voir que $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}] \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$ et à montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Nous avons alors de nouveau la courbe $\mathcal{B}_2$ qui traverse $reg(\mathcal{P}_1, [\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}])$ et nous en déduisons $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Comme pour le cas précédent, nous démontrons que les deux courbes se coupent en exactement un point par l'absurde, en supposant $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \geq 2$

et en obtenant une contradiction.

Soient $Q_1 \neq Q_2 \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Si $reg(\mathcal{B}_1|_{[Q_1,Q_2]}, \mathcal{B}_2|_{[Q_1,Q_2]})$ était convexe, nous pourrions en déduire de la convexité des courbes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ que

$$\left(\mathcal{B}_1 \cup \{P_0^{(1)}, P_{m_1}^{(1)}\}\right) \cap \left(\mathcal{B}_2 \cup \{P_0^{(2)}, P_{m_2}^{(2)}\}\right) = \{Q_1, Q_2\}$$

ce qui contredit, compte tenu du fait que nous sommes dans le cas 3, la condition (V.1) ; donc $reg(\mathcal{B}_1|_{[Q_1,Q_2]}, \mathcal{B}_2|_{[Q_1,Q_2]})$ ne peut pas être convexe.

Soient $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_2'$ les deux droites d'appui à $\mathcal{B}_2$ passant par $P_{m_1}^{(1)}$ et soient $\{T_2\} = \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{B}_2$ et $\{T_2'\} = \mathcal{T}_2' \cap \mathcal{B}_2$. L'un des points T_2 et T_2' se trouve évidemment dans le demi-plan $\overline{DP_{op}(P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}, \mathcal{P}_1)}$, soit T_2' celui-ci.

Un seul point d'intersection de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ peut appartenir à $\mathcal{B}_2|_{[P_0^{(2)},T_2]}$, car sinon nous avons deux points d'intersection Q_1 et Q_2 de ces deux courbes pour lesquels

$$reg(\mathcal{B}_1|_{[Q_1,Q_2]}, \mathcal{B}_2|_{[Q_1,Q_2]})$$

est convexe, contradiction.

Symétriquement, soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_1'$ les deux droites d'appui à $\mathcal{B}_1$ passant par $P_{m_2}^{(2)}$; T_1 et T_1' étant respectivement leurs points de contact à $\mathcal{B}_1$, l'un se trouvera dans le demi-plan $\overline{DP_{op}(P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}, \mathcal{B}_2)}$ et nous considérons que c'est T_1'. Alors un seul point d'intersection de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ peut appartenir à $\mathcal{B}_1|_{[P_0^{(1)},T_1]}$.

$\mathcal{B}_1 \cup [P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}]$ et $\mathcal{B}_2 \cup [P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}]$ sont des courbes fermées, et en plus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ne peuvent pas être tangentes l'une à l'autre, car l'arrangement qu'elles forment est simple. Par conséquent, $\mathrm{card}\left((\mathcal{B}_1 \cup [P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}]) \cap (\mathcal{B}_2 \cup [P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}])\right)$ est pair. Comme $\mathrm{card}([P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}] \cap [P_0^{(2)}P_{m_2}^{(2)}]) = 1$, le cardinal de $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ doit être impair. En plus, nous avons supposé $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) > 1$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) \geq 3$ et soient Q_1, Q_2 et Q_3 trois points d'intersection des deux courbes distincts. En utilisant les observations antérieures, étudions cas par cas les placements possibles des points Q_1, Q_2 et Q_3 sur les courbes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

(a) $Q_1 \in \mathcal{B}_1|_{[P_0^{(1)},T_1]} \cap \mathcal{B}_2|_{[P_0^{(2)},T_2]}$
$Q_2, Q_3 \in \mathcal{B}_1|_{[T_1,P_{m_1}^{(1)}]} \cap \mathcal{B}_2|_{[T_2,P_{m_2}^{(2)}]}$

Nous aurons alors la situation de la figure V.6 (ou une symétrique en $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$).

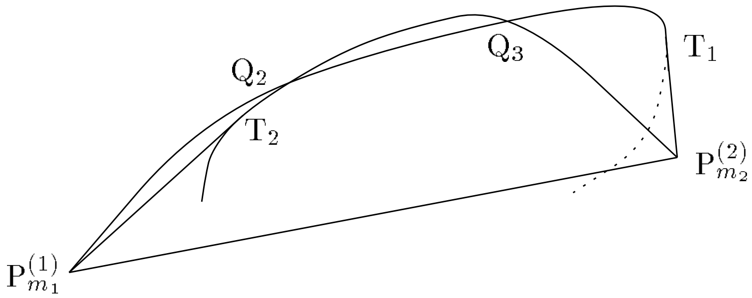


Figure V.6

Le polygone $\mathcal{P}_2$ doit alors être inclus dans le demi-plan $\overline{DP(P_{m_2}^{(2)}T_1, P_{m_1}^{(1)})}$ et il est très facile à remarquer que la condition (V.2) ne peut pas être satisfaite (en pointillés, une partie de $\mathcal{B}_1|_{[P_0^{(1)},T_1]}$).

La même contradiction s'obtient évidemment au cas où

$Q_2, Q_3 \in \mathcal{B}_1\big|_{[T_1, P^{(1)}_{m_1}]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[T_2, P^{(2)}_{m_2}]}$ et

(b) $Q_1 \in \mathcal{B}_1\big|_{[T_1, P^{(1)}_{m_1}]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[T_2, P^{(2)}_{m_2}]}$

(c) $Q_1 \in \mathcal{B}_1\big|_{[T_1, P^{(1)}_{m_1}]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[P^{(2)}_0, T_2]}$

(d) $Q_1 \in \mathcal{B}_1\big|_{[P^{(1)}_0, T_1]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[T_2, P^{(2)}_{m_2}]}$

Il reste ainsi à étudier le cas

(e) $Q_1 \in \mathcal{B}_1\big|_{[P^{(1)}_0, T_1]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[T_2, P^{(2)}_{m_2}]}$

$Q_2 \in \mathcal{B}_1\big|_{[T_1, P^{(1)}_{m_1}]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[P^{(2)}_0, T_2]}$

$Q_3 \in \mathcal{B}_1\big|_{[T_1, P^{(1)}_{m_1}]} \cap \mathcal{B}_2\big|_{[T_2, P^{(2)}_{m_2}]}$

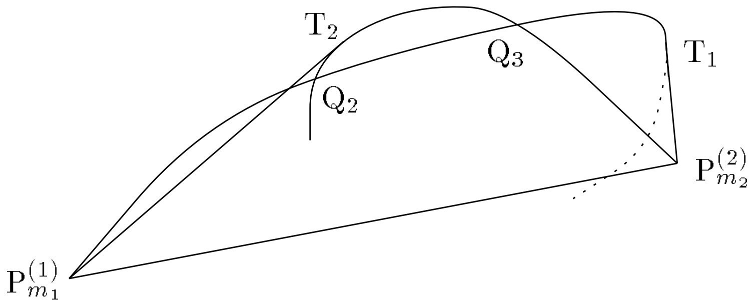


Figure V.7

Pour les points Q_2 et Q_3, la configuration est celle présentée par la figure V.7 et nous remarquons facilement que la même contradiction qu'au cas (a) peut être obtenue (même sans regarder la position du point Q_1).

Pour conclure, $\text{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)$ doit être inférieur à 3 et comme il est impair nous avons obtenu le résultat désiré et la preuve du lemme est achevée.

□

Les conditions (V.1), (V.2) et (V.3) sont basées sur les B-polygones des courbes de Bézier $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et non pas sur les courbes elles-mêmes et par conséquent pourraient être utilisées dans notre algorithme pour assurer $\text{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 1$. La question qui reste est si par subdivision de de Casteljau nous finirons par obtenir en un nombre fini d'itérations des courbes de Bézier satisfaisant ces trois conditions dans le cas où les deux courbes initiales, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, ne les satisfaisaient pas. La réponse est malheureusement non : par exemple, si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ se coupent en un point correspondant sur $\mathcal{B}_1$ au paramètre $t_1 = 1/2$ et sur $\mathcal{B}_2$ au paramètre $t_2 = 1/3$, après une subdivision de $\mathcal{B}_1$ nous retrouvons ce point d'intersection comme étant une extrémité commune de deux courbes de Bézier situées sur $\mathcal{B}_1$, tandis que sur $\mathcal{B}_2$ ce point sera toujours à l'intérieur du polygone de contrôle de la partie de courbe qui le contient (figure V.8), et par conséquent la condition (V.1) ne sera jamais satisfaite.

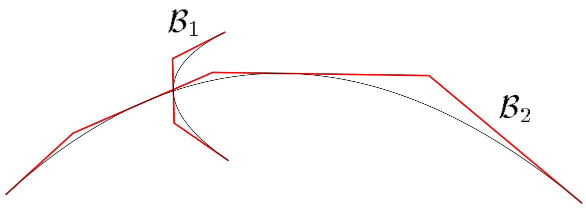


Figure V.8

Par conséquent, le lemme V.1 ne nous fournit pas un critère utilisable dans notre algorithme de calcul d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes donné, car un tel algorithme ne convergerait pas toujours. Le lemme suivant est une généralisation de V.1 palliant ce problème.

Lemme V.2. – *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux courbes de Bézier complètement convexes telles que $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\})$ soit un arrangement simple. Supposons que nous avons obtenu, par subdivision, une écriture de $\mathcal{B}_k$ sous la forme $\mathcal{B}_k = \cup_{i=1}^{n_k} \mathcal{B}_{k,i}$, pour $k = 1, 2$. Soient $\widetilde{\mathcal{P}}_k = \cup_{i=1}^{n_k} \mathcal{P}_k$, pour $k = 1, 2$, les deux polygones de contrôle courants et $\widetilde{\mathcal{S}}_k = \cup_{i=1}^{n_k} [\mathrm{P}_0^{(k,i)} \mathrm{P}_{m_{k,i}}^{(k,i)}]$, $k = 1, 2$, les deux polygones support courants des (poly)courbes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Si*

$$\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{P}}_2) = \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_2) = \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{S}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{P}}_2) = \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{S}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{S}}_2) = 1 \qquad \text{(V.4)}$$

et si $\widetilde{\mathcal{P}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_2$ satisfont (V.2) et (V.3), alors $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2) = 1$.

Preuve – La démonstration de ce lemme est en tout point semblable à celle du lemme V.1, en remplaçant $[\mathrm{P}_0^{(k)} \mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]$ par $\widetilde{\mathcal{S}}_k$, pour $k = 1, 2$, et $reg(\mathcal{P}_k, [\mathrm{P}_0^{(k)} \mathrm{P}_{m_k}^{(k)}])$ par

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n_k} reg(\mathcal{P}_{k,i}, [\mathrm{P}_0^{(k,i)} \mathrm{P}_{m_{k,i}}^{(k,i)}]) \right) \cup \{\mathrm{P}_0^{(k,2)}, \mathrm{P}_0^{(k,3)}, \ldots, \mathrm{P}_0^{(k,n_k)}\}$$

pour $k = 1, 2$, et en tenant compte de la convexité de $\widetilde{\mathcal{S}}_1$ et $\widetilde{\mathcal{S}}_2$. □

Pour pouvoir nous servir de ce résultat dans l'élaboration de notre algorithme, nous devons maintenant prouver que pour deux courbes de Bézier complètement convexes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ il est possible d'obtenir, par subdivision de de Casteljau de rapport 1/2, des écritures satisfaisant les conditions (V.4), (V.2) et (V.3).

Hypothèse. Nous allons considérer à partir de maintenant et dans toute la suite du chapitre que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux courbes de Bézier, $\{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\} \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ et $\{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\} \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$, car dans le cas contraire une situation similaire à celle de la figure V.8 (mais en considérant par exemple $\mathrm{B}_{m_1}(\mathrm{P}_0^{(1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)} ; 0) = \mathrm{B}_{m_2}(\mathrm{P}_0^{(2)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)} ; 1/3)$ à la place de $\mathrm{B}_{m_1}(\mathrm{P}_0^{(1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)} ; 1/2) = \mathrm{B}_{m_2}(\mathrm{P}_0^{(2)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)} ; 1/3)$) rendrait impossible l'obtention de polygones de contrôle/support pour les deux courbes satisfaisant la conditions (V.4).

Lemme V.3. – *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux courbes de Bézier complétement convexes telles que l'arrangement $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\})$ soit simple et supposons que* $\mathrm{card}(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2) = 1$. *En notant* R *le point commun des deux courbes, nous pouvons obtenir par subdivision de de Casteljau de rapport 1/2 une écriture de $\mathcal{B}_k$ sous la forme $\mathcal{B}_k = \cup_{i=1}^{n_k} \mathcal{B}_{k,i}$, pour $k = 1, 2$, telles que si $i_1 \in \{1, \ldots, n_1\}$ et $i_2 \in \{1, \ldots, n_2\}$ ont la propriété $\mathrm{R} \in \mathcal{B}_{1,i_1} \cap \mathcal{B}_{2,i_2}$, alors il existe $j_k \in \{1, \ldots, i_k\}$ et $\ell_k \in \{i_k, \ldots, n_k\}$, $k = 1, 2$, tels qu'en mettant*

$$\overline{\mathcal{P}}_k = \bigcup_{i=j_k}^{\ell_k} \mathcal{P}_{k,i} \qquad et \qquad \overline{\mathcal{S}}_k = \bigcup_{i=j_k}^{\ell_k} [\mathrm{P}_0^{(k,i)} \mathrm{P}_{m_{k,i}}^{(k,i)}] \ , \quad k = 1, 2$$

les polygones $\overline{\mathcal{P}}_k$ et $\overline{\mathcal{S}}_k$, $k = 1, 2$, satisfassent (V.4) et $\overline{\mathcal{P}}_1$ et $\overline{\mathcal{P}}_2$ satisfassent (V.2) et (V.3).

Preuve – Remarquons que $m_{k,i} = m_k$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n_k\}$, $k = 1, 2$, car toutes les courbes obtenues par la subdivision de $\mathcal{B}_k$ ont bien sûr le même degré que celle-ci. Nous convenons de noter $\mathrm{P}_0^{(k)}$ et $\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}$ les extrémités de la courbe $\mathcal{B}_k$, car aucune confusion n'est possible.

De par l'hypothèse que nous avons fait, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \subset \big(\mathcal{B}_1 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}\big) \cap \big(\mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}\big)$; il est alors facile à voir qu'une démonstration similaire à celle du théorème IV.24 construit des écritures de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ telles que les polygones $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ et $\widetilde{\mathcal{S}}_k$, $k = 1, 2$, définis dans l'énoncé du lemme V.2 satisfassent (V.4), et donc il existe $j_k \in \{1, \ldots, i_k\}$ et $\ell_k \in \{i_k, \ldots, n_k\}$ tels que les polygones $\overline{\mathcal{P}}_k$ et $\overline{\mathcal{S}}_k$, $k = 1, 2$, satisfassent aussi cette condition.

Soit Δ la droite d'appui commune des courbes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ayant les propriétés (figure V.9)

$$\Delta \cap \mathcal{B}_1 \subset \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\tan_{\mathrm{R}}(\mathcal{B}_2), \mathcal{B}_2) \qquad \text{et} \qquad \Delta \cap \mathcal{B}_2 \subset \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\tan_{\mathrm{R}}(\mathcal{B}_1), \mathcal{B}_1)$$

Une telle droite d'appui existe, car $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ne sont pas tangentes en R, et elle est unique (cette droite a déjà été utilisée dans la preuve du théorème IV.24). Nous notons $\{\mathrm{T}_1\} = \Delta \cap \mathcal{B}_1$ et $\{\mathrm{T}_2\} = \Delta \cap \mathcal{B}_2$ et soit P_1 le point de $\mathcal{B}_1$ qui divise en deux arcs égaux $\mathcal{B}_1\big|_{[\mathrm{R},\mathrm{T}_1]}$ et P_2 le point de $\mathcal{B}_2$ qui divise en deux arcs égaux $\mathcal{B}_2\big|_{[\mathrm{R},\mathrm{T}_2]}$. La tangente à $\mathcal{B}_1$ en P_1, $\tan_{\mathrm{P}_1}(\mathcal{B}_1)$, coupe l'arc $\mathcal{B}_2\big|_{]\mathrm{R},\mathrm{T}_2[}$ en un point Q_1 ; symétriquement, $\tan_{\mathrm{P}_2}(\mathcal{B}_2) \cap \mathcal{B}_1\big|_{]\mathrm{R},\mathrm{T}_1[} = \{\mathrm{Q}_2\}$. Pour fixer les notations, supposons que la valeur du paramètre est croissante sur $\mathcal{B}_1\big|_{[\mathrm{R},\mathrm{T}_1]}$ en allant de R vers T_1, et de même elle est croissante sur $\mathcal{B}_2\big|_{[\mathrm{R},\mathrm{T}_2]}$ en allant de R vers T_2 ; les extrémités des deux courbes seront alors dans la position de la figure V.9.

Il est évident que nous pouvons obtenir par subdivision une écriture de $\mathcal{B}_1$ telle qu'il existe un point $\mathrm{P}_0^{(1,\ell_1+1)}$ sur l'arc $\mathcal{B}_1\big|_{[\mathrm{Q}_1,\mathrm{P}_1]}$ et de même pour $\mathcal{B}_2$, nous pouvons obtenir par subdivision une écriture telle qu'il existe un point $\mathrm{P}_0^{(2,\ell_2+1)}$ sur l'arc $\mathcal{B}_2\big|_{[\mathrm{Q}_2,\mathrm{P}_2]}$. Soit $\{\mathrm{Q}_3\} = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{Q}_1$; les positions des points $\mathrm{P}_0^{(1,\ell_1)}$ et $\mathrm{P}_0^{(2,\ell_2)}$ impliquent

$$\widetilde{\mathcal{P}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{P}}_2 \in reg([\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3], [\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_2], [\mathrm{Q}_2\mathrm{R}], [\mathrm{R}\mathrm{Q}_1])$$

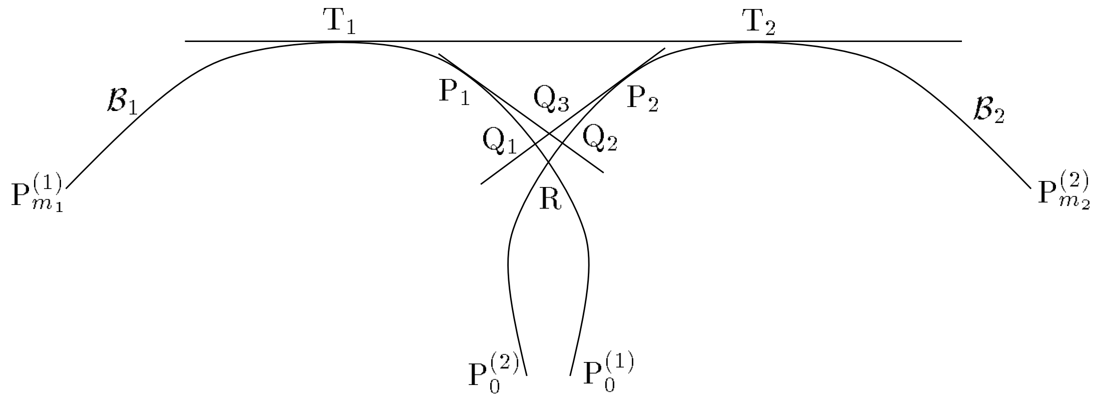


Figure V.9

En notant $\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1}^{(1)}$, $\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1+1}^{(1)}$, $\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2}^{(2)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2+1}^{(2)}$ les sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_1$, respectivement $\widetilde{\mathcal{P}}_2$, pour lesquels

$$[\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1}^{(1)}\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1+1}^{(1)}] \cap [\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2}^{(2)}\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2+1}^{(2)}] = \widetilde{\mathcal{P}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{P}}_2 \ ,$$

la relation précédente nous dit que

$$\mathcal{B}_1\big|_{[\mathrm{Q}_1,\mathrm{P}_1]} \subset \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2}^{(2)}\widetilde{\mathrm{P}}_{i_2+1}^{(2)}, \mathcal{B}_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2\big|_{[\mathrm{Q}_2,\mathrm{P}_2]} \subset \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1}^{(1)}\widetilde{\mathrm{P}}_{i_1+1}^{(1)}, \mathcal{B}_1)$$

Comme $\mathrm{P}_0^{(k,\ell_k+1)} = \mathrm{P}_{m_{k,\ell}}^{(k,\ell_k)}$ et les indices des sommets de $\widetilde{\mathcal{P}}_k$ sont bien sûr croissants de $\mathrm{P}_0^{(k)}$ vers $\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}$, pour $k = 1, 2$, il suffit de prendre $j_k = 1$ pour $k = 1, 2$ pour que toutes les conditions du lemme soient satisfaites. □

V.3.2. *Les triangles simples*

Soit $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{n}$ une famille de polcourbes de Bézier telle que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple et supposons que dans son écriture initiale toutes deux courbes de Bézier n'appartenant pas à la même polycourbe se coupent en au plus un point. Cette supposition ne restreint pas la généralité, car nous avons vu au début de la preuve du théorème IV.24 que pour un arrangement ne la satisfaisant pas nous pouvons obtenir par subdivision une écriture qui la satisfait, et nous n'avons qu'à considérer cette nouvelle écriture comme étant celle initiale de l'arrangement.

Les résultats de la sous-section précédente nous permettent de concevoir un algorithme qui construit, par subdivisions de de Casteljau successives, des écritures des polycourbes $\mathcal{B}_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, comme $\mathcal{B}_i = \cup_{j=1}^{n_i} \mathcal{B}_{i,j}$ telles que

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) = \operatorname{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = \operatorname{card}(\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{i_2,j_2}) \in \{0,1\} \\ \forall i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, n\} \forall j_1 \in \{1, \dots, n_{i_1}\} \forall j_2 \in \{1, \dots, n_{i_2}\} \end{aligned} \tag{V.5}$$

Mais cette condition n'est pas suffisante pour l'équivalence des arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$. Par exemple, la figure V.10 nous présente un arrangement de trois polycourbes de Bézier composées chacune d'une seule courbe de Bézier qui satisfont la relation (V.5) sans que les deux arrangements soient équivalents.

Nous allons prouver que la condition (V.5) est suffisante pour l'équivalence des deux arrangements, à l'exception des cas où des cellules comme celles décrites par la définition suivante existent dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$:

Définition V.4. – *Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de polycourbes de Bézier tel que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple. Nous appelons triangle simple tout triplet $\big((i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)\big)$ avec $i_k \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts et $j_k \in \{1, \dots, n_{i_k}\}$ pour $k = 1, 2, 3$ tel que*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset \quad \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset$$

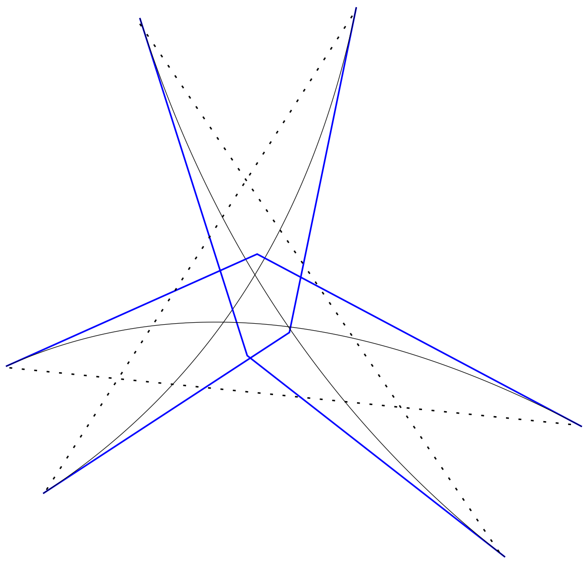


Figure V.10

Si la condition (V.5) est satisfaite, ce que nous allons supposer dans tout le reste de cette section, alors les trois courbes de Bézier désignées par un triangle simple forment effectivement un unique pseudo-triangle.

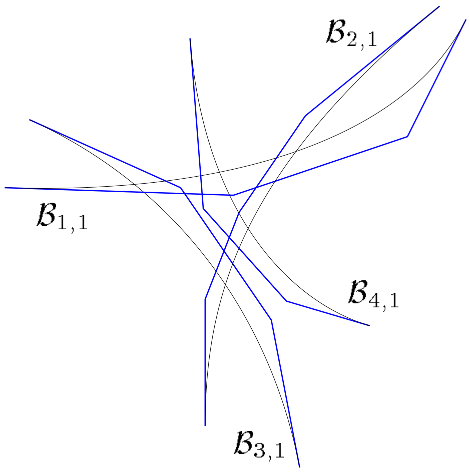


Figure V.11 *Le triplet* $\big((1,1),(2,1),(3,1)\big)$ *est un triangle simple sans définir une cellule de* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

Remarque. Un triangle simple ne représente pas forcément une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, comme nous pouvons le voir dans la figure V.11.

Notation. Si $\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ est un triangle simple de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, nous allons l'appeler $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ pour identifier quel est l'arrangement auquel il fait référence.

Nous pouvons facilement voir que si nous avons, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, un triangle simple $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ et si la condition (V.5) est satisfaite, alors les B-polygones $\mathcal{P}_{i_1,j_1}$, $\mathcal{P}_{i_2,j_2}$ et $\mathcal{P}_{i_3,j_3}$ définissent dans $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ un unique triangle simple, que nous noterons $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$. Nous observons que la simplicité de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ n'implique pas celle de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, même si la condition (V.5) est vérifiée, et les trois polygones de contrôle peuvent avoir un point commun, cas auquel nous dirons que le triangle $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ est dégénéré.

Définition V.5. – *Soit* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ *un triangle simple de l'arrangement* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. *Nous dirons que le triangle simple* $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ *de l'arrangement* $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ *lui est équivalent ssi* $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ *n'est pas dégénéré et l'ordre des points* $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ *et* $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}\cap\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ *sur* $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ *est le même que l'ordre des points* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ *et* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}\cap\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ *sur* $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$.

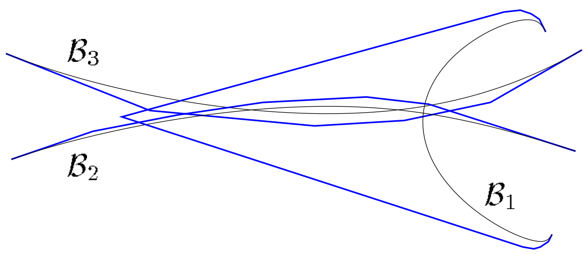


Figure V.12 *Si* $\mathcal{B}_2,\mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{B}_3,\mathcal{P}_3$ *sont parcourus de gauche à droite et* $\mathcal{B}_1,\mathcal{P}_1$ *de haut en bas,* $\mathcal{P}_1$ *coupe d'abord* $\mathcal{P}_3$ *et ensuite* $\mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{B}_1$ *coupe d'abord* $\mathcal{B}_3$ *et ensuite* $\mathcal{B}_2$. *Mais* $\mathcal{P}_2$ *coupe d'abord* $\mathcal{P}_1$, *ensuite* $\mathcal{P}_2$ *deux fois, tandis que* $\mathcal{B}_2$ *coupe d'abord* $\mathcal{B}_2$ *deux fois et seulement ensuite* $\mathcal{B}_1$.

Évidemment, si $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$, alors la condition (V.5) implique que l'ordre des points $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ sur $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ est le même que l'ordre des points $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ sur $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et l'ordre des points $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ sur $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ est le même que l'ordre des points $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ sur $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$. La figure suivante donne un exemple où la relation (V.5) n'est pas satisfaite et où l'affirmation précédente est fausse.

En utilisant les notations et définitions données, nous pouvons formuler des conditions suffisantes d'équivalence des arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$:

Lemme V.6. – *Soit $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^n$ une famille de polcourbes de Bézier telle que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple et que la condition (V.5) soit satisfaite. Supposons que pour tout triangle simple $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ le triangle simple $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ lui est équivalent. Alors les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ sont équivalents.*

Preuve – Nous allons montrer que si les propriétés de l'énoncé sont satisfaites, alors les conditions de la proposition IV.23 sont vérifiées par les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et par conséquent ces deux arrangements sont équivalents.

Comme nous avons déjà mentionné à la fin de la preuve du théorème IV.24, les propriétés des courbes de Bézier complètement convexes font que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ satisfont les conditions (IV.23.i) et (IV.23.ii) ; il nous reste donc à étudier les hypothèses (h1) et (h2).

Le fait que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est simple résulte de l'équivalence des triangles simples de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ avec les triangles simples leur correspondant dans $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. En effet, si nous supposons que l'arrangement des polygones de contrôle n'est pas simple, il existe un triplet de polygones de contrôle $\mathcal{P}_{i_1,j_1}$, $\mathcal{P}_{i_2,j_2}$ et $\mathcal{P}_{i_3,j_3}$ qui ont un point commun ; mais alors les polygones $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ ont un point commun et courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ devront elles aussi en avoir un, de par l'équivalence de $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1,j_i),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1,j_i),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\big)$, ce qui contredit la simplicité de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

La bijection φ_0 de l'hypothèse (h2) est très facile à construire : tout sommet s de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ est l'intersection de deux courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et nous lui faisons correspondre le sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ qui est l'intersection de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$; la propriété (V.5) nous dit que ce sommet est bien défini, le point d'intersection de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ existant et étant unique. La condition (h2.1) est alors satisfaite par définition et nous devons étudier la propriété (h2.2).

Supposons que cette propriété n'est pas satisfaite ; alors il existe (i_1,j_1), (i_1,j_1'), (i_2,j_2) et (i_3,j_3) tels que l'ordre des sommets $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1'} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ sur la polycourbe $\mathcal{B}_{i_1}$ ne soit pas le même que l'ordre des sommets $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1'} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ sur le polygone $\mathcal{P}_{i_1}$.

Mais j_1 et j_1' ne peuvent pas être différents, car dans ce cas nous obtiendrons $j_1 < j_1'$ et $j_1' < j_1$, absurde. D'un autre côté, les courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ doivent se couper, car si nous supposons le contraire, alors $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3} = \emptyset$ et par conséquent il existe une ligne polygonale non-bornée Δ, composée d'au plus deux demi-droites telle que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ soient chacun inclus dans une des deux parties connexes ouvertes définies par Δ et telle que $\mathrm{card}(\Delta \cap \widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}) = 1$, car la relation (V.5) est vérifiée.

Dans ce cas, la supposition faite sur les ordres des sommets $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$

sur la polycourbe $\mathcal{B}_{i_1}$, respectivement l'ordre des sommets $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ sur le polygone $\mathcal{P}_{i_1}$, signifie que tandis que la partie de la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ comprise entre les deux sommets traverse Δ par exemple de gauche à droite, la partie de son polygone associé $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ comprise respectivement entre les deux sommets la traverse de droite à gauche, ce qui est évidemment impossible dans le cas des courbes de Bézier complètement convexes.

Nous en déduisons que les courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ ne sont pas disjointes. Dans ce cas, $(i_1, j_1 = j'_i)$, (i_2, j_2) et (i_3, j_3) définissent un triangle simple dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et, suite à la condition (V.5), un autre dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$; l'inversion des ordres des sommets sur $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$, respectivement $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ contredit alors la condition d'équivalence des triangles simples des deux arrangements et ainsi la démonstration du lemme est achevée.

$\square$

V.3.3. *Équivalence de triangles simples*

En nous basant sur le lemme précédent, il nous suffit de trouver un critère d'équivalence des triangles simples $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}\big((i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)\big)$et $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}\big((i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3)\big)$ utilisant uniquement les polygones associés aux courbes de $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ pour pouvoir concévoir l'algorithme désiré de calcul d'une famille $\mathcal{P}$ de polygones de contrôle telle que $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ soient équivalents.

Remarque. Comme nous avons déjà mentionné, si la condition (V.5) est vérifiée alors les trois courbes de Bézier identifiées par un triangle simple de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ définissent un unique pseudo-triangle, qui peut ne pas être une cellule de l'arrangement. Dans la suite de cette sous-section, les deux notions (triplet de courbes et pseudo-triangle) seront confondues, la distinction se faisant d'après le contexte.

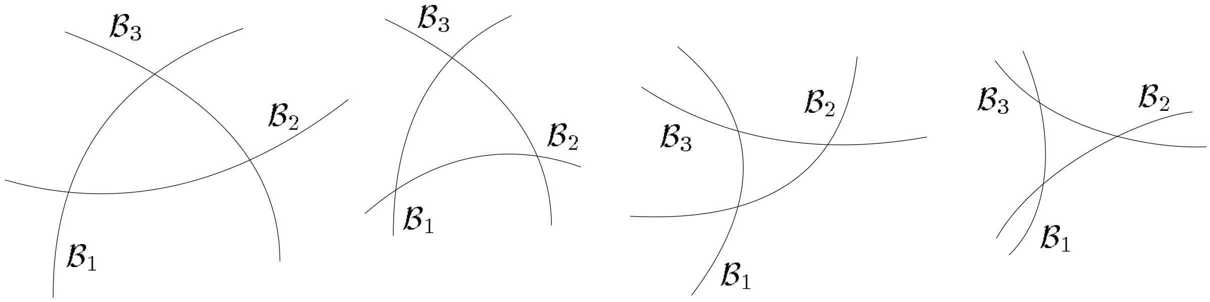


Figure V.13

Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ trois courbes de Bézier complétement convexes telles que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ soit simple et satisfasse (V.2), (V.3) et (V.4) (par conséquent, il satisfait (V.5)). $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ peuvent définir quatre types de triangles simples :

T1. $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_k, [\mathrm{P}_0^{(k)}\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]) \neq \emptyset$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$. Nous appelerons un tel triangle simple triangle (3-convexe, 0-concave) ;

T2. il existe un unique $k_0 \in \{1,2,3\}$ tel que $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_{k_0}, [\mathrm{P}_0^{(k_0)}\mathrm{P}_{m_{k_0}}^{(k_0)}]) = \emptyset$ et $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_k, [\mathrm{P}_0^{(k)}\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]) \neq \emptyset$ pour tout $k \neq k_0 \in \{1,2,3\}$. Un tel triangle simple s'appelera triangle (2-convexe, 1-concave) ;

T3. il existe un unique $k_0 \in \{1,2,3\}$ tel que $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_{k_0}, [\mathrm{P}_0^{(k_0)}\mathrm{P}_{m_{k_0}}^{(k_0)}]) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_k, [\mathrm{P}_0^{(k)}\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]) = \emptyset$ pour tout $k \neq k_0 \in \{1,2,3\}$. Un tel triangle simple s'appelera triangle (1-convexe, 3-concave) ;

T4. $\mathrm{Int}(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3) \cap reg(\mathcal{B}_k, [\mathrm{P}_0^{(k)}\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]) = \emptyset$ pour tout $k \in \{1,2,3\}$. Nous appelerons un tel triangle simple triangle (0-convexe, 3-concave).

La figure V.13 présente des exemples pour chacun des types de triangles simples énumérés.

De manière tout-à-fait analogue nous définitssons les triangles (i-convexes, j-concaves) pour $i, j \geq 0$ et tels que $i + j = 3$ pour $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$. Regardons maintenant quels peuvent être les types du triangle $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ si nous connaissons le type du triangle $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$.

- Si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ est (3-convexe, 0-concave), $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ ne peut être que (3-convexe, 0-concave) et équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$.
- Si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ est (2-convexe, 1-concave), $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ peut être soit (2-convexe, 1-concave), cas où il est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$, soit (1-convexe, 2-concave), voir figure V.14(a).
- Si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ est (1-convexe, 2-concave), $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ peut être soit (1-convexe, 2-concave), cas où il est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$, soit (2-convexe, 1-concave), voir figure V.14(b).
- Si $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ est (0-convexe, 3-concave), $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ peut être soit (0-convexe, 3-concave), cas où il est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$, soit (3-convexe, 0-concave), qui est le cas de la figure V.10.

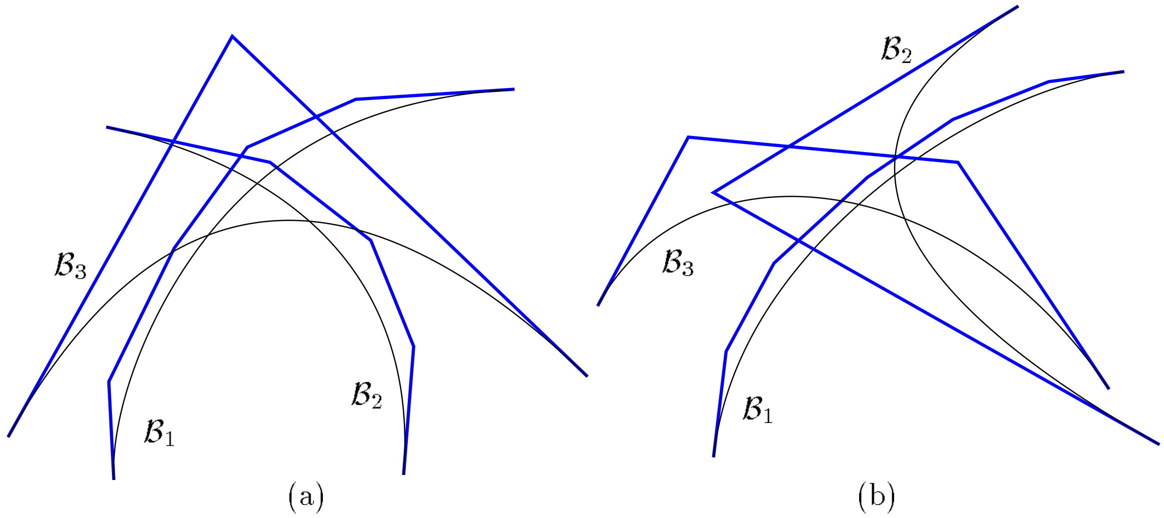


Figure V.14

Soit $\mathcal{S} = \{[\mathrm{P}_0^{(k)}\mathrm{P}_{m_k}^{(k)}]\}_{k=1,2,3}$ l'ensemble des *segments support* des courbes de Bézier $\mathcal{B}_k$, pour $k = 1,2,3$. Une étude de cas facile à faire nous dit que si $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(1,2,3)$, alors il est aussi équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$. Ainsi, nous pouvons décider si les triangles $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ sont équivalents en regardant uniquement les ensembles de lignes polygonales $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ et par conséquent le critère d'équivalence de ces deux triangles que nous cherchions est trouvé.

Si les triangles $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(1,2,3)$ sont équivalents, nous savons que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ est équivalent à $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ et le problème est résolu. Mais dans le cas contraire, il ne suffit pas de dire que nous ne pouvons pas affirmer l'équivalence des triangles $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$, nous devons subdiviser les courbes $\mathcal{B}_k$, $k = 1,2,3$, jusqu'à l'obtention de la propriété désirée. Après σ subdivisions, supposons que la courbe de Bézier $\mathcal{B}_k$ s'écrit $\mathcal{B}_k = \cup_{i=1}^{n_k} \mathcal{B}_{k,i}$, pour $k = 1,2,3$. Alors $\mathcal{P}$ sera

$$\mathcal{P} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n_k} \mathcal{P}_{k,i} \right\}_{k=1,2,3}$$

et $\mathcal{S}$ sera

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n_k} [\mathrm{P}_0^{(k,i)} \mathrm{P}_{m_k}^{(k,i)}] \right\}_{k=1,2,3}$$

et pour avoir l'équivalence des triangles $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ il suffira toujours que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(1,2,3)$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(1,2,3)$ soient équivalentes. Comme $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{S}_k$ convergent, par subdivision de de Casteljau de rapport 1/2, vers $\mathcal{B}_k$, pour $k = 1,2,3$, après un nombre fini d'itérations l'équivalence de ces deux derniers triangles sera vérifiée. Par exemple, en nous référant à la figure V.14(a) pour un triangle $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(1,2,3)$ (2-convex, 1-concave), il suffira de subdiviser jusqu'à ce que

$$\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{P}}_3, \widetilde{\mathcal{B}}_3) < \mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2, \widetilde{\mathcal{B}}_3)$$

(nous utilisons bien sûr les notations de T2 pour $k_0 = 3$).

Corollaire V.7. – *Si au moment ou l'arrangement des polygones de contrôle est équivalent à celui de polycourbes toutes les lignes polygonales support sont simples, alors l'arrangement des lignes polygonales support est équivalent aux deux autres arrangements.*

Cette affirmation résulte immédiatement de la relation (V.5) et du critère décrit ci-dessus que nous utiliserons pour l'équivalence des triangles simples de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$. La condition de simplicité des lignes polygonales support est nécessaire à cause de l'existence des configurations comme celle de la figure suivante, où la courbe de Bézier (qui constitue à elle seule une polycourbe dans ce cas) $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ a comme polygone support $\mathcal{S}_1 = [\mathrm{PQ}] \cup [\mathrm{QP}]$.

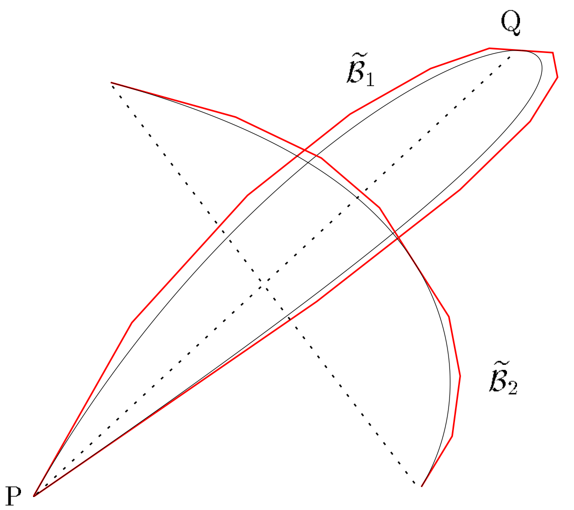


Figure V.15

Bien sûr, si une telle situation apparaît, elle est très facile à éliminer par la subdivision d'une des deux courbes de Bézier de l'écriture courante de $\widetilde{\mathcal{B}}_1$. Par conséquent, nous disposons de deux arrangements de lignes polygonales équivalents à $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, et l'arrangement de lignes support est de taille évidemment inférieure à celle de l'arrangement de polygones de contrôle.

V.4. Présentation de l'algorithme

En nous basant sur les résultats de la section précédente, nous allons présenter dans cette section un algorithme calculant, pour une famille de polycourbes de Bézier donnée telle que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple, une famille de polygones de contrôle $\mathcal{P}$ telle que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ soient équivalents.

V.4.1. *Structures de données utilisées*

Bien sûr, nous avons toujours besoin de la classe `courbe_de_Bézier` ; par contre, si une classe codant une polycourbe nous est aussi nécessaire, celle introduite dans la sous-section III.3.1, `polycourbe`, n'est pas adaptée aux procédures de ce chapitre. Nous la remplaçons par la classe `tab_polycourbe`, qui est en fait `méta_polygone<courbe_de_Bézier>`. Par un léger abus de notation, nous appellerons `arrangement` la classe `méta_polygone<tab_polycourbe>`, qui n'est donc en fait pas un arrangement, mais une famille de polycourbes, et celle-ci sera la classe de base de notre algorithme.

Si $\mathcal{A}$ est un `arrangement`, $\mathcal{A}[i]$ sera une `tab_polycourbe` et $\mathcal{A}[i][j]$ sera une `courbe_de_Bézier`. Pour simplifier les notations, nous introduisons une nouvelle classe, `ident_courbe`, ayant deux champs :
- `quelle_polycourbe`, un entier qui donnera l'indice dans l'`arrangement` de la polycourbe à laquelle la courbe de Bézier appartient ;
- `quelle_courbe`, un entier qui donnera l'indice de la courbe de Bézier dans $\mathcal{A}$[`quelle_polycourbe`].

Ainsi, si `id` est un `ident_courbe`, $\mathcal{A}$(`id`) sera $\mathcal{A}$[`id.quelle_polycourbe`][`id.quelle_courbe`].

Deux autres classes qui nous seront nécessaires sont `paire_de_courbes`, qui a deux champs, `première_courbe` et `seconde_courbe`, chacun étant un `ident_courbe`, et `triangle_simple`, qui a trois champs, `première_courbe`, `seconde_courbe` et `troisième_courbe`, chacun étant aussi un `ident_courbe`.

Très schématiquement, l'algorithme que nous proposons consiste à construire la liste de toutes les paires de courbes de Bézier intervenant dans l'arrangement qui ne satisfont pas (V.5), et à subdiviser toutes les courbes apparaissant dans cette liste, dans une première phase, et ensuite de traiter les triangles simples. Nous verrons dans les descriptions des procédures que l'algorithme appelle que la structure de données codant la liste de paires de courbes doit permettre d'effectuer de manière optimale l'ensemble d'opérations suivantes :
- insertion ordonnée d'une nouvelle `paire_de_courbes` (en utilisant l'ordre lexicographique pour cette classe) ;
- suppression d'une `paire_de_courbes` ;
- recherche/localisation d'une `paire_de_courbes` ;
- successeur ;
- prédécesseur.

Cette structure de données sera donc un dictionnaire augmenté ; en l'implémentant à l'aide d'un arbre rouge-noir, l'insertion, a suppression et la recherche d'une `paire_de_courbes` se fait en $\mathcal{O}(\log k)$, où k est la taille du dictionnaire, et les deux dernières opérations de la liste ci-dessus se font en temps constant (pour plus de détails sur ces structures de données, voir [Boi95] chap. 2).

Nous aurons aussi besoin d'une structure codant la liste des courbes qui doivent être subdivisées à chaque itération, et les opérations qui seront exécutées sur cette structure sont les mêmes que dans le cas des `paires_de_courbes` ; ainsi, un `dico_paires_de_courbes` est un dictionnaire augmenté de `paires_de_courbes`, un `dico_courbes` est un dictionnaire augmenté de `ident_courbe` ; en plus, nous introduisons le `tableau_triangles`, un tableau de `triangles_simples`.

Enfin, nous appelons `coord_extremale_courbe` une classe dont les deux champs sont `coordonnée`, un réel, et `courbe`, un `ident_courbe`, et un `dico_cec` sera un dictionnaire augmenté de `coord_extremale_courbe`.

V.4.2. *L'algorithme de calcul de $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soient équivalents*

La structure de l'algorithme est la suivante :

```
Arrangements_équivalents(arrangement 𝒜)
dico_paires_de_courbes LPC
dico_courbes ℒ
tableau_triangles 𝒯
begin
lecture_données(𝒜)
rectangles_superposés(𝒜,LPC)
construction_liste_triplets(LPC,𝒯)
vérification_intersections(𝒜,LPC)
liste_courbes_à_subdiviser(LPC,ℒ)
tant que ℒ ≠ ∅
     begin
     reconstruction_par_subdivision(LPC,ℒ)
     ar_subdivision(𝒜,ℒ)
     vérification_intersections(𝒜,LPC)
     liste_courbes_à_subdiviser(LPC,ℒ)
     end
équivalence_triangles(𝒜,𝒯)
écriture_résultats(𝒜)
end
```

Cet algorithme prend en entrée un `arrangement` $\mathcal{A}$, dont toutes les polycourbes sont dans leur écriture initiale, et donne à la sortie le même arrangement $\mathcal{A}$, mais dont les polycourbes ont subi des subdivisions de de Casteljau telles que dans leurs écritures courantes l'arrangement des polygones de contrôle respectifs soit équivalent à celui de polycourbes. Son idée est de chercher toutes les paires de courbes de Bézier ne faisant pas toutes les deux partie de la même polycourbe et dont nous ne pouvons pas affirmer que soit elles ne se coupent pas, soient elles vérifient (V.5), et de les introduire dans le dictionnaire `LPC` (c'est ce que font les procédures `rectangles_superposés` et `vérification_équivalence`). Ensuite, toutes les courbes de Bézier apparaissant dans au moins une des `paires_de_courbes` du dictionnaire `LPC` seront introduites dans le dictionnaire de courbes à subdiviser $\mathcal{L}$ (procédure `liste_courbes_à_subdiviser`). Si $\mathcal{L}$ n'est pas vide, nous subdivisons toutes les courbes de Bézier identifiées par $\mathcal{L}$ (procédure `ar_subdivision`) et nous recommençons. Si il l'est, la procédure `équivalence_triangles` prend en entrée le tableau $\mathcal{T}$ des triplets de courbes suscéptibles de déterminer (au moins) un triangle simple et assure, en subdivisant encore certaines des courbes de Bézier de la structure courante de l'arrangement si besoin est, l'équivalence de tous les triangles simples qui se correspondent dans $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et

$\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent de ce chapitre nous permettent d'affirmer, premièrement, que l'algorithme ci-dessus fournit réellement une écriture de la famille de polycourbes de Bézier donnée par $\mathcal{A}$ telle que l'arrangement des polygones de contrôle respectifs soit équivalent à l'arrangement de polycourbes, et deuxièmement, que cet algorithme converge.

Détaillons maintenant les procédures appelées par ce programme.

V.4.2.1. La procédure `rectangles_superposés`

Pour vérifier si deux polygones (dans notre cas convexes) ont une intersection vide, un premier critère efficace consiste à tester si les rectangles de côtés respectivement parallèles aux axes les englobant respectivement sont disjoints. Ainsi, pour trouver toutes les paires de courbes de Bézier ne faisant pas partie de la composition de la même polycourbe de l'arrangement donné et dont les B-polygones ne sont pas disjoints, nous commençons par chercher toutes les telles paires dont les B-polygones ont les rectangles englobants non disjoints. Le schéma de cette procédure est le suivant :

```
rectangles_superposés(arrangement 𝒜, dico_paires_de_courbes LPC)
dico_cec x_min, x_max
dico_paires_de_courbes temporaire
entiers i, j, k
begin
construction_liste_croissante_minima(𝒜,x_min)
construction_liste_croissante_maxima(𝒜,x_max)
i= 0; j= 0
tant que i < N
   begin
   tant que (j < N  et  x_min[j].coordonnée ≤ x_max[i].coordonnée)
      begin
      si x_min[j].curbe.quelle_polycourbe
                  ≠ x_max[i].curbe.quelle_polycourbe
         pour k allant de i à N − 1
            si (x_max[k].curbe,x_min[j].curbe)∈temporaire
               begin
               effacer (x_max[k].curbe,x_min[j].curbe) de temporaire
               si (min_y(x_min[j].curbe) ≤ max_y(x_max[k].curbe)
                                      et
                  min_y(x_max[k].curbe) ≤ max_y(x_min[j].curbe))
                  inserer (x_min[j].curbe,x_max[k].curbe) dans LPC
               end
            sinon
               inserer (x_min[j].curbe,x_max[k].curbe) dans temporaire
      j = j +1
      end
   i = i +1
```

```
26.         end
27.     end
```

Soient R_1 et R_2 deux rectangles (considérés des ensembles fermés) ayant les arêtes parallèles aux axes et supposons que les sommets de R_1 sont (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2) et (a_1, b_2), avec $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$, et les sommets de R_2 sont (α_1, β_1), (α_2, β_1), (α_2, β_2) et (α_1, β_2), avec $\alpha_1 \leq \alpha_2$ et $\beta_1 \leq \beta_2$. Il est très facile à voir qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir la relation $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ est donnée par l'ensemble d'inégalités $\{a_1 \leq \alpha_2 \ ; \ \alpha_1 \leq a_2 \ ; \ b_1 \leq \beta_2 \ ; \ \beta_1 \leq b_2\}$, et c'est cette propriété qui a été utilisée dans l'algorithme ci-dessus.

La procédure commence par construire, lignes 6 et 7, deux dictionnaires de `coord_extrémale_courbe`, `x_min` et `x_max`. Un élément du dictionnaire `x_min` donne dans son champ `coordonnée` l'abscisse minimale du B-polygone de la courbe de Bézier désignée par son champ `courbe`. De la même manière, un élément du dictionnaire `x_max` donne dans son champ `coordonnée` l'abscisse maximale du B-polygone de la courbe de Bézier désignée par son champ `courbe`. L'ordre (total) considéré pour la classe `coord_extremale_courbe` est celui donné par son champ `coordonnée`. Chacun des dictionnaires `x_min` et `x_max` est de taille $N = \sum_{i=0}^{n} n_i$, où n est le nombre de polycourbes de l'arrangement et n_i est le nombre de courbes de Bézier composant la i-ème polycourbe. Le cycle des lignes 9-26 fait un parcours du dictionnaire `x_max`, et le cycle des lignes 11-24 fait un parcours en parallèle du dictionnaire `x_min`. Le dictionnaire `temporaire` est vide au début et nous y introduisons toute `paire_de_courbes (courbe1, courbe2)` telle que :

– `courbe1` et `courbe2` ne se situent pas sur la même polycourbe (le test de la ligne 13) ;
– la `paire_de_courbes (courbe2, courbe1)` n'appartient pas déjà à `temporaire`.

Le deuxième test de la ligne 11 nous assure que toute paire de courbes `(courbe1, courbe2)` candidate à être introduite dans `temporaire` satisfait la condition $a_1 \leq \alpha_2$, si nous considérons que les rectangles englobants des B-polygones des courbes `courbe1` et `courbe2` sont respectivement R_1 et R_2 et avec les notations ci-dessus. Si `(courbe2, courbe1)` est un élément de `temporaire`, nous déduisons que l'inégalité $\alpha_1 \leq a_2$ est également vérifiée ; dans ce cas, nous éliminons `(courbe2, courbe1)` de `temporaire` et nous testons si les deux rectangles ont une intersection non vide en vérifiant $b_1 \leq \beta_2$ et $\beta_1 \leq b_2$ (ligne 18). Si ces deux conditions sont satisfaites, `(courbe1, courbe2)` est introduite dans le dictionnaire `LPC` que la procédure donne comme résultat.

Cet algorithme fait appel à quatre sous procédures : `construction_liste_croissante_minima`, `construction_liste_croissante_maxima`, `min_y` et `max_y`. Ces deux dernières calculent respectivement l'ordonnée minimale et maximale d'un polygone convexe donné (dans notre cas, B-polygone de la courbe de Bézier donnée). Grâce à la convexité du polygone à traiter, ces procédures sont de complexité $\mathcal{O}(\log d)$, d étant le nombre de sommets du polygone. Les deux autres procédures font appel respectivement à `min_x` et `max_x`, qui sont tout à fait similaires à `min_y` et `max_y` et retournent l'abscisse minimale et respectivement maximale d'un polygone convexe donné. En plus, `construction_liste_croissante_minima` et `construction_liste_croissante_maxima` construisent chacune un dictionnaire, l'insertion d'un nouvel élément se faisant en $\mathcal{O}(\log k)$, où k est la taille du dictionnaire déjà existent. Ainsi, `construction_liste_croissante_minima` et `construction_liste_croissante_maxima` seront de complexité $\mathcal{O}\big(N \log(N) + N \log(D)\big)$, où nous avons noté $D = \max_{i=0}^{n} \max_{j=0}^{n_i} m_{i,j}$ le degré maximal des courbes de Bézier intervennant dans l'arrangement et $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$ le nombre total de courbes de Bézier intervenant dans l'arrangement.

Nous allons évaluer le coût de `rectangles_superposés` dans le cas le pire, qui survient quand chaque polycourbe est composée d'une unique courbe de Bézier et toutes deux courbes de Bézier ont les rectangles emboitants non disjoints. Dans ce cas, nous aurons la relation

$$\max_{j=0}^{N} \texttt{x\_min[j].coordonnée} \leq \min_{i=0}^{N} \texttt{x\_max[i].coordonnée}$$

et pour `i` allant de 1 à $N-1$ l'algorithme n'exécutera que le premier test de la ligne 11, de complexité $\mathcal{O}(1)$, et le coût total sera donc $\mathcal{O}(N)$. Pour $\texttt{i} = 0$, les lignes 13-22 s'exécuteront pour chaque `j` entre 0 et $N-1$. À la j_0-ème itération, le dictionnaire `temporaire` aura au plus $j_0 N$ éléments et nous pouvons voir que la somme des coûts du test de la ligne 15 et de l'opération de la ligne 17 sera $\mathcal{O}(\log(j_0 N))$. Les deux tests de la ligne 18 ont la complexité $\mathcal{O}(D)$. En sommant sur j, et comme les autres opérations du cycle des lignes 11-24 se font en temps constant à chaque itération, nous obtenons pour ce cycle la complexité $\mathcal{O}\big(N\log(N) + N\log(D)\big)$. Nous pouvons ainsi conclure que, dans le cas le pire, le coût total de la procédure `rectangles_superposés` est $\mathcal{O}\big(N\log(N) + N\log(D) + N\big)$.

V.4.2.2. La procédure `vérification_intersections`

Pour chaque paire de courbes identifiée par un élément du dictionnaire `LPC`, cette procédure vérifie si les conditions (V.1), (V.2) et (V.3) sont satisfaites, et si elles le sont, l'élément est éliminé de `LPC`. Son schéma est le suivant :

```
vérification_intersections(arrangement 𝒜, dico_paires_de_courbes LPC)
polygones 𝒫1, 𝒫2
entier cardinal
paire_de_courbes *ic1, *ic2
begin
*ic1 = premier élément de LPC
tant que ic1 ≠ NULL
   begin
   𝒫1 = 𝒜((*ic1).première_courbe)
   𝒫2 = 𝒜((*ic1).seconde_courbe)
   cardinal = intersection_lignes_polygonales(𝒫1, 𝒫2)
   si cardinal = 0
      effacer *ic1 du dictionnaire LPC
   si cardinal = 1
      si 𝒫1, 𝒫2 vérifient (V.2), (V.3)
         si 𝒫1, 𝒫2 vérifient (V.1)
            effacer *ic1 de la liste LPC
         sinon
            si vérification_avant/après_1(𝒜,LPC,ic1,ic2) = oui
               begin
               effacer *ic1 du dictionnaire LPC
               effacer *ic2 du dictionnaire LPC
               end
   si cardinal = −1
```

```
25.          si vérification_avant/après_2(𝒜,LPC,ic1,ic2) = oui
26.             begin
27.             effacer *ic1 du dictionnaire LPC
28.             effacer *ic2 du dictionnaire LPC
29.             end
30.       ic1 = (*ic1).suivant
31.       end
32.    end
```

Le cycle des lignes 7-31 s'effectue pour chaque élément du dictionnaire LPC et comme nous avons déjà mentionné, dans le cas le pire $M = \mathrm{card}(\mathtt{LPC}) = N(N-1)/2$. Les polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ seront toujours des polygones simples et convexes et nous utilisons la notation $\mathcal{P}_i = \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_1^{(i)}\ldots\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$, pour $i = 1, 2$.

Pour chaque paire de courbes correspondant à un élément de LPC, les polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les B-polygones des deux courbes de la paire. L'algorithme commence par appeler la procédure `intersection_lignes_polygonales`, qui, pour les deux polygones simples et convexes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, rendra :

- 0, si

$$\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)=\emptyset$$

et

$$\mathrm{card}\Bigg(\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\mathrm{Int}(\mathcal{P}_2)\Bigg)+\mathrm{card}\Bigg(\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\cap\mathrm{Int}(\mathcal{P}_1)\Bigg)=0$$

- -1, si

$$\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)=\emptyset \tag{V.6}$$

et

$$\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\mathrm{Int}(\mathcal{P}_2)\neq\emptyset\quad\text{ou}\quad\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\cap\mathrm{Int}(\mathcal{P}_1)\neq\emptyset \tag{V.7}$$

- 1, si

$$\mathrm{card}\Bigg(\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\Bigg)=1$$

- 2, si

$$\mathrm{card}\Bigg(\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\Bigg)\geq 2$$

Ainsi, si le résultat de cette procédure est 0, nous sommes certains que ni les B-polygones, ni les courbes de Bézier correspondant à la `paire_de_courbes` traitée ne se coupent et donc celle-ci peut être éliminée de LPC (lignes 12-13). Si, au contraire, le résultat est 2, il est sûr que les deux courbes de Bézier ne satisfont pas les conditions requises, par conséquent la `paire_de_courbes` doit rester dans la liste LPC et donc l'algorithme se contente de passer à l'élément suivant de cette liste (ligne 30). Les cas nécessitant un traitement plus compliqué apparaîssent quand la procédure `intersection_lignes_polygonales` retourne 1 où -1.

Si le résultat est 1, il a un sens de nous poser la question si les B-polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ satisfont les conditions (V.2) et (V.3) (ligne 15). Si ce n'est pas le cas, les deux courbes de Bézier devront être subdivisées et l'algorithme passe à l'itération suivante sans enlever l'élément courant de `LPC`. Si oui, alors nous vérifions si la condition (V.1) est satisfaite aussi, et si c'est le cas nous pouvons, en appliquant le lemme V.1, en déduire que cette paire de courbes ne soulève pas de problème pour l'équivalence des arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et donc nous l'effaçons de `LPC` (lignes 16-17). Si la condition (V.1) n'est pas vérifiée, la procédure `vérification_avant/après_1` est appelée.

Si nous nous situons dans le cas où cet appel est fait, il y a quatre positions relatives des B-polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ possibles ; une de ces positions est présentée dans la figure suivante, les trois autres pouvant être représentées à partir de celle-ci en changeant les rôles des B-polygones $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et en "symétrisant" la notation du B-polygone ayant une extrémité à l'intérieur de l'autre (pour le cas de la figure, $\mathrm{P}_0^{(1)}$ devient $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ et reciproquement). Étudions le fonctionnement de la procédure `vérification_avant/après_1` pour le cas présenté dans la figure, les autre cas seront traités de manière similaire.

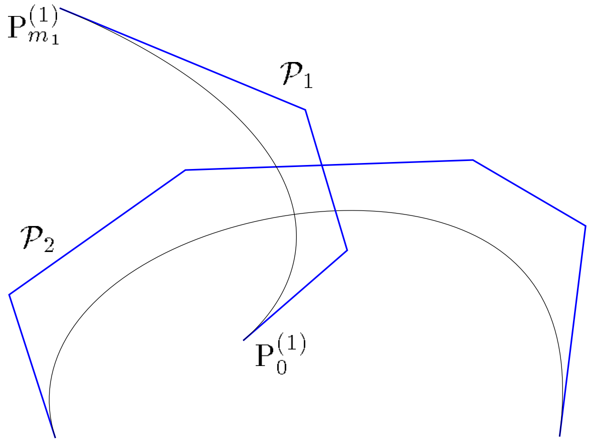


Figure V.16

On commence par tester si la courbe de Bézier correspondant au B-polygone $\mathcal{P}_1$ est la première de la polycourbe dont elle fait partie (autrement dit, nous vérifions si `(*ic1).première_courbe.quelle_courbe` $= 0$). Si c'est le cas, aucune autre opération n'est effectuée, et `*ic1` restera un élément de `LPC`, car la procédure retourne "`non`". Sinon, soit $\mathcal{P}_3$ le B-polygone de la courbe de Bézier précédant la courbe correspondant à $\mathcal{P}_1$ dans la composition de la polycourbe dont celle-ci fait partie. L'algorithme teste alors si $\widetilde{\mathcal{P}}_1 = \widetilde{\mathcal{P}}_3$. Au premier appel de la procédure `vérification_intersections` dans l'algorithme `Arrangements_équivalents`, toutes les polycourbes de l'arrangement sont dans leur écriture initiale et l'égalité ne peut évidemment pas être satisfaite, mais aux itérations suivantes elle devient possible. Si l'égalité n'est pas vérifiée, nous voudrons subdiviser les deux courbes désignées par `*ic1` et donc, pour ne pas exclure cet élément du dictionnaire `LPC`, `vérification_avant/après_1` retourne "`non`". Si oui, on vérifie les relations :

$$\operatorname{card}\left(\left(\bigcup_{i=0}^{m_3-1}[\mathrm{P}_i^{(3)}\mathrm{P}_{i+1}^{(3)}]\right)\cap[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]\right)=1 \quad \left(\bigcup_{i=0}^{m_3-1}[\mathrm{P}_i^{(3)}\mathrm{P}_{i+1}^{(3)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)=\emptyset$$

$$\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\cap[\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}]=\emptyset \qquad \mathrm{card}\Big([\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]\cap[\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}]\Big)=1$$

Le lemme V.2 nous autorise, si ces quatre conditions sont satisfaites, à effacer `*ic1` de la liste `LPC`. Plus, il existe un élément de `LPC[j]` désignant la paire de courbe qui correspond à $(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_3)$ (pas forcément dans cet ordre), le pointeur `ic2` indiquera cet élément et le même lemme nous dit que `*ic2` peut lui aussi être éliminé du dictionnaire de `paires_de_courbes`. Par conséquent, dans ce cas la procédure `vérification_avant/après_1` retournera "`oui`", mais elle déterminera d'abord le pointeur `ic2`. Ainsi, la procédure `vérification_intersections` executera les lignes 21 et 22, éliminant `*ic1` et `*ic2` du dictionnaire `LPC`. Si les quatres relations ci-dessus ne sont pas vérifiées, le résultat de la procédure sera "`non`" et `LPC` restera inchangée.

Si le résultat de la procédure `intersection_lignes_polygonales` est -1, nous nous retrouvons dans un cas qui est d'une certaine façon symétrique à celui déjà présenté. Nous savons qu'au moins une des deux relations de la condition (V.7) est satisfaite, supposons que c'est la première (l'autre cas se traite bien sûr de la même manière). La procédure `vérification_avant/après_2` commence par calculer le cardinal de l'ensemble $[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}]\cap[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]$. Si ce cardinal est 0, nous nous trouvons dans une situation similaire à l'une des deux présentées figure V.17, et les deux courbes doivent être subdivisées, donc `vérification_avant/après_2` retourne "`non`".

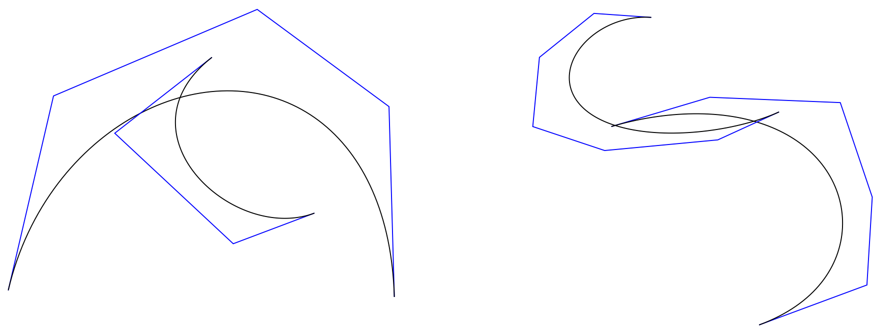


Figure V.17

Si le cardinal est $+\infty$, nous aurons la situation de la figure V.18(a), car celle de la figure V.18(b) ne satisfait pas (V.6). Dans ce cas aussi le résultat de `vérification_avant/après_2` sera "`non`".

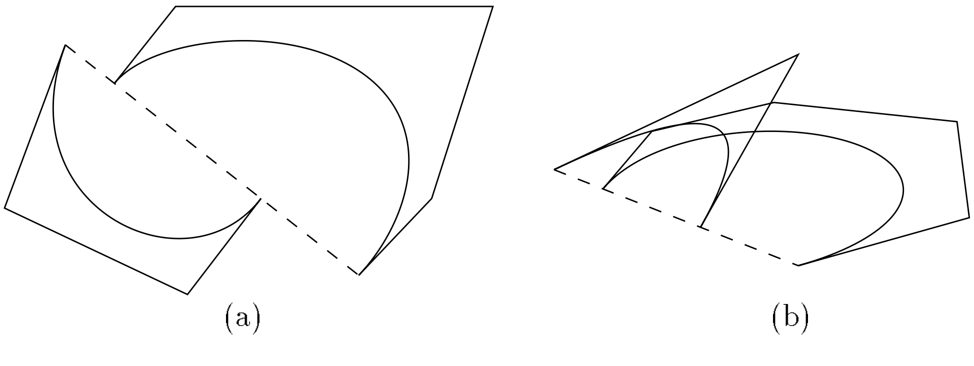


Figure V.18

Enfin, si le cardinal est 1, nous pouvons déduire que

$$\operatorname{card}\left(\left(\bigcup_{i=0}^{m_1-1}[\mathrm{P}_i^{(1)}\mathrm{P}_{i+1}^{(1)}]\right)\cap[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]\right)=1$$

car $\mathcal{P}_1$ est convexe et la condition (V.6) est satisfaite. Alors un et seulement un des points $\mathrm{P}_0^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ appartiendra à $\mathrm{Int}(\mathcal{P}_2)$, et supposons que ce point est $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$.

Nous pouvons maintenant voir la symétrie mentionnée avec les cas traités par la procédure `vérification_avant/après_1` : le B-polygone $\mathcal{P}_1$ est assimilé au B-polygone $\mathcal{P}_3$ de la discussion précédente. La marche à suivre sera donc la suivante :

- nous vérifions si la courbe de Bézier correspondant à $\mathcal{P}_1$ est la dernière de la polycourbe dont elle fait partie (autrement dit, nous testons `(*ic1).première_courbe.quelle_courbe`$=$ $\mathcal{A}$`((*ic1).première_courbe.quelle_polycourbe).taille`-1)
- si elle l'est, `vérification_avant/après_2` retourne "`non`"
- si elle ne l'est pas, soit $\mathcal{P}_3$ le B-polygone correspondant à la courbe de Bézier succédant la courbe Bézier associée à $\mathcal{P}_1$ dans la composition de la polycourbe dont elle fait partie
- si $\widetilde{\mathcal{P}}_1 \neq \widetilde{\mathcal{P}}_3$, `vérification_avant/après_2` retourne "`non`"
- si $\widetilde{\mathcal{P}}_1 = \widetilde{\mathcal{P}}_3$, nous vérifions les relations

$$[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]\cap[\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}]=\emptyset \qquad \operatorname{card}\left(\left(\bigcup_{i=0}^{m_3-1}[\mathrm{P}_i^{(3)}\mathrm{P}_{i+1}^{(3)}]\right)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\right)=1$$

$$\operatorname{card}\left(\left(\bigcup_{i=0}^{m_2-1}[\mathrm{P}_i^{(2)}\mathrm{P}_{i+1}^{(2)}]\right)\cap[\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}]\right)=1 \qquad \left(\bigcup_{i=0}^{m_3-1}[\mathrm{P}_i^{(3)}\mathrm{P}_{i+1}^{(3)}]\right)\cap[\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}]=\emptyset$$

  (en fait, la deuxième et la troisième de ces quatre conditions impliquent les deux autres, dans les hypothèses existentes, et par conséquent suffisent)
- si l'une de ces relations n'est pas vraie, `vérification_avant/après_2` retourne "`non`"
- si toutes les quatre sont vérifiées, nous testons si $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ satisfont les conditions (V.2) et (V.3)
- si ils ne les satisfont pas, `vérification_avant/après_2` retourne "`non`"
- si oui, nous attribuons `ic2` tel que `*ic2` identifie la paire de courbes correspondant respectivement aux B-polygones $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, et `vérification_avant/après_2` retourne "`oui`"

Remarquons que le pointeur `ic2` calculé par l'une ou l'autre des procédures `vérification_avant/après_1` et `vérification_avant/après_2` indique toujours une `paire_de_courbes` supérieure à celle indiquée par le pointeur `*ic1` auquel il est associé, car si il est donné par `vérification_avant/après_1` et ne satisfait pas cette condition, alors il est facile à voir que `*ic1` aurait dû lui être associé par `vérification_avant/après_2` à l'itération lui correspondant dans le cycle `tant que` des lignes 7-30, ce qui est contradictoire, et une contradiction similaire est obtenue si `*ic2` est donné par `vérification_avant/après_2`.

Avant de faire l'étude de coût de cette procédure, un commentaire sur les algorithmes de `vérification_avant/après_1` et `vérification_avant/après_2` s'impose. Nous observons que ces procédures ne tirent aucun profit du fait que les objets à traiter ne sont pas de courbes de Bézier, mais des *polycourbes*, car quand $\widetilde{\mathcal{P}}_3$ est différent de $\widetilde{\mathcal{P}}_1$, pour `vérification_avant/après_1`, ou $\widetilde{\mathcal{P}}_2$, pour `vérification_avant/après_2`, les procédures retournent tout de suite "non". Nous sommes obligés de procéder ainsi à cause des configuration similaires à celle de la figure V.19, où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ satisfont les condition nécessaires à l'appel de `vérification_avant/après_1` et $\mathcal{P}_3$ satisfait toutes les propriétés requises par cette procédure, sauf $\widetilde{\mathcal{P}}_3 = \widetilde{\mathcal{P}}_1$, et $\operatorname{card}\big(\mathcal{P}_2 \cap (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3)\big) \neq \operatorname{card}\big(\mathcal{B}_2 \cap (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3)\big)$.

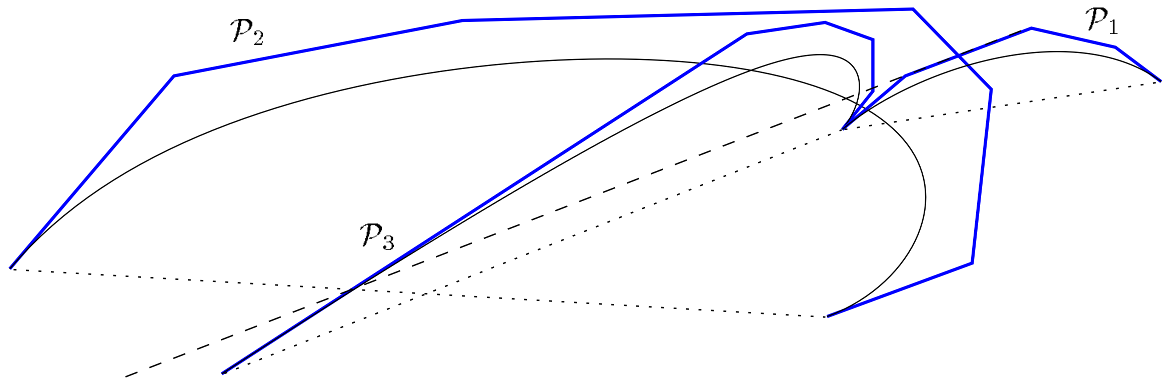


Figure V.19

Pour cette raison, nous devons imposer une condition supplémentaire à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ pour que notre algorithme converge : celle qu'aucune extrémité de *courbe de Bézier* (et non pas *polycourbe*) de l'écriture initiale de l'arrangement n'appartienne à une polycourbe autre que celle dont la courbe fait partie, hypothèse dont nous avons déjà vu la nécessité pour la preuve du lemme V.3.

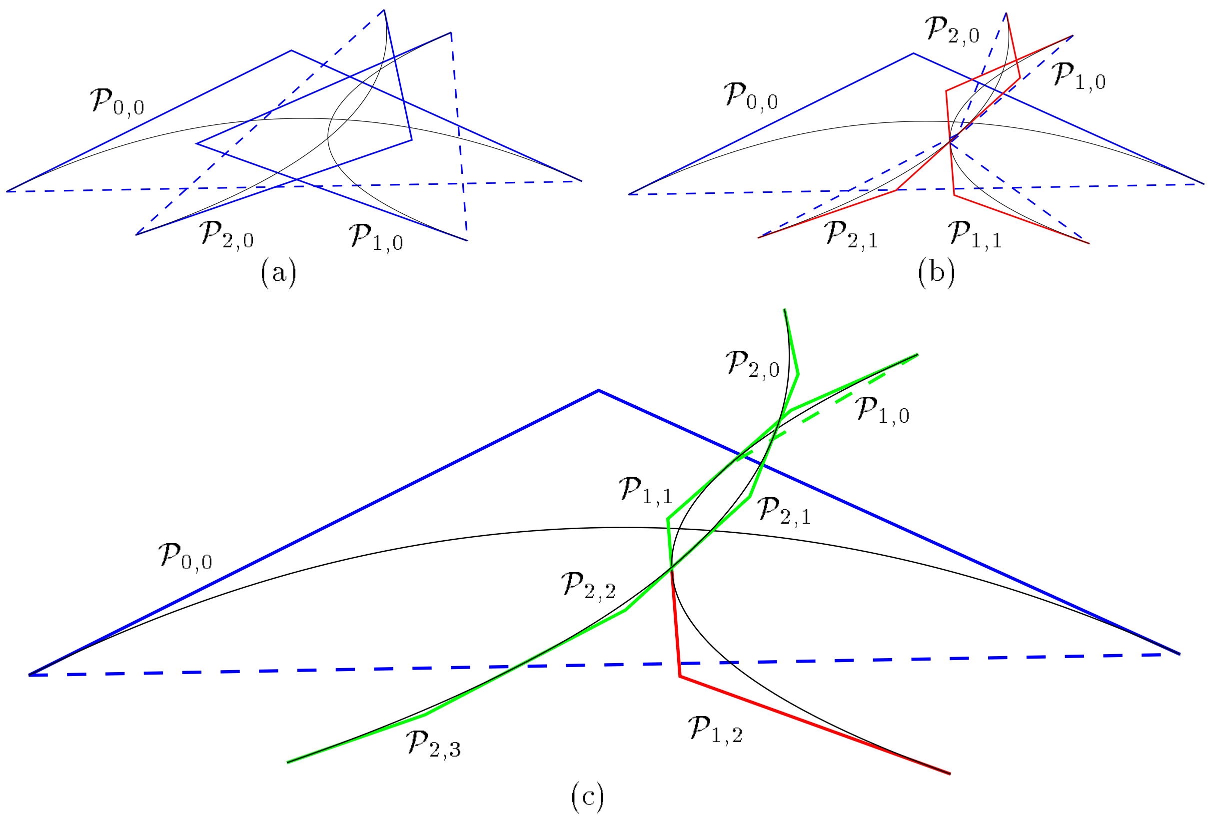


Figure V.20

D'un autre côté, nous n'utilisons pas “pleinement” le résultat V.3, car, dans les notations de ce lemme, nous vérifions les propriétés demandées uniquement pour $j_k = i_k \pm 1$, $\ell_k = i_k \pm$

1. Ainsi, pour l'arrangement de la figure V.20(a) (à la première itération) la `paire_courbes` $((1,0),(2,0))$ restera dans la liste de paires de courbes et $((0,0),(1,0))$ et $((0,0),(2,0))$ seront effacées ; après subdivision, dans la figure V.20(b) (la deuxième itération) les paires ne satisfaisant pas les conditions sont $((1,0),(2,0))$ et $((1,0),(2,1))$, tandis qu'après encore une subdivision le polygone $\mathcal{P}_{0,0}$ fera partie d'une paire de courbes ne satisfaisant pas les bonnes propriétés, car la valeur `cardinal` associée à la paire $((0,0),(1,0))$ sera 1, celle pour $((0,0),(1,1))$ sera -1 et celle pour $((0,0),(1,2))$ sera aussi -1 et c'est $\mathcal{P}_{1,2}$ qui vérifie les conditions de `vérification_avant/après_1` et non pas $\mathcal{P}_{1,1}$. Mais nous verrons dans la description de la procédure `reconstruction_par_subdivision` qu'en fait ce n'est que la première fois que le dictionnaire `LPC` est construit en vérifiant pour chaque paire de courbes n'appartenent pas à la même polycourbe de l'arrangement les conditions de `vérification_intersections`, aux itérations suivantes `LPC` se déduit à partir des paires de courbes qui ne satisfaisaient pas ces conditions à l'itération précédente.

Pour évaluer la complexité de `vérification_intersections`, nous devons étudier les coûts des procédures auxquelles cet algorithme fait appel.

La procédure `intersection_lignes_polygonales` est linéaire en la somme des tailles des deux polygones qu'elle traite, donc au pire linéaire en D, le maximum des degrés des courbes de Bézier de l'arrangement. Elle utilise l'algorithme classique de calcul de l'intersection de deux polygones convexes par décomposition en union de lignes polygonales d'abscisse croissante ; l'intersection de deux telles lignes polygonales se calcule en temps linéaire en leur nombre total de sommets, et la décomposition des B-polygones se fait en temps logarithmique, car elle consiste à trouver les sommets extrémaux sur une direction horizontale.

Le procédure `vérification_avant/après_1` est elle aussi linéaire en le maximum des degrés des trois polygones qui interviennent, qui peut être majoré par D, mais à ce coût s'ajoute celui de la recherche du pointeur `ic2` satisfaisant les conditions mentionnées, ce qui amène la complexité de cette procédure à $\mathcal{O}(\log(M))$. Il est facile à voir que la procédure `vérification_avant/après_2`, très semblable à la précédente, a la même complexité.

En sommant pour tous les éléments de `LPC`, nous obtenons pour `vérification_intersections` le coût $\mathcal{O}(M\log(M) + MD)$ (le test de la ligne 15 se fait en temps constant ; celui de la ligne 16 se fait en $\mathcal{O}(D)$; enfin, l'élimination des éléments de `LPC` se fait en $\mathcal{O}(\log(M))$). Dans le cas le pire, comme nous avons vu, $M = N(N-1)/2$ et ce coût sera $\mathcal{O}(N^2\log(N) + N^2D)$.

V.4.2.3. La procédure `liste_courbes_à_subdiviser`

Cette procédure construit, à partir du dictionnaire contenant les `paires_de_courbes` qui ne satisfont pas les critères donnés pour assurer l'équivalence des arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$, le dictionnaire de courbes de Bézier participant à l'arrangement qui doivent être subdivisées. Son schéma est extrémement simple :

```
liste_courbes_à_subdiviser(dico_paires_de_courbes LPC, dico_courbes ℒ)
paire_de_courbes *ic = premier élément de LPC
begin
tant que ic ≠ NULL
   begin
   si (*ic).première_courbe ∉ ℒ
```

```
 7.          inserer (*ic).première_courbe dans ℒ
 8.       si (*ic).seconde_courbe ∉ ℒ
 9.          inserer (*ic).seconde_courbe dans ℒ
10.       si card ℒ = N
11.          sortir
12.       ic = (*ic).suivant
13.       end
14.    end
```

Le fonctionnement est aussi facile à suivre : pour chaque `paire_de_courbes` du dictionnaire `LPC`, on vérifie si les deux courbes sont déjà dans $\mathcal{L}$, et si elle ne le sont pas, on les y introduit.

$\mathcal{L}$ étant un dictionnaire, les tests des lignes 6 et 8 seront réalisés en $\mathcal{O}(\log k)$, où k est la taille courante du tableau, et les insertions des lignes 7 et 9 s'executent aussi en $\mathcal{O}(\log k)$.

Le test de la ligne 10 a été conçu dans l'espoir de réduire le nombre d'itérations à effectuer, qui dans le cas le pire est $N(N-1)/2$. Ainsi, si la taille de `LPC` est effectivement $N(N-1)/2$, ce test aménera le nombre d'itération, au pire, à $(N-1)(N-2)/2$, et au mieux, à $\lceil N/2 \rceil$. Dans le cas le pire, le coût de la procédure sera donc $\mathcal{O}(N^2 \log N)$, et dans le meilleur cas elle sera $\mathcal{O}(N \log N)$.

V.4.2.4. La procédure `ar_subdivision`

Cette procédure construit la nouvelle structure de l'arrangement, en subdivisant toutes les courbes de Bézier désignées par le dictionnaire $\mathcal{L}$. Elle utilise la procédure `subdivision` décrite dans le paragraphe III.3.2.3, mais, comme celle-ci traite des `polycourbes` et non pas des `tab_polycourbes`, une conversion de type doit être fait. Aussi, nous devons convertir les `ident_courbe` du dictionnaire $\mathcal{L}$ en pointeurs à des `courbes_de_Bézier` ; chacune de ces deux conversions se fait en temps linéaire en la taille de l'objet à convertir, elle coûteront donc $\mathcal{O}(N)$. En plus, après la subdivision de toutes le courbes de Bézier identifiées par $\mathcal{L}$ nous devons reconvertir chaque polycourbe, dans sa nouvelle écriture, de liste doublement chaînée au tableau, opération qui est toujours de complexité $\mathcal{O}(N)$. Le coût total de la procédure `ar_subdivision` sera, compte tenu de celui de `subdivision`, $\mathcal{O}(ND^2)$.

V.4.2.5. La procédure `reconstruction_par_subdivision`

Dans l'algorithme `Arrangements_équivalents`, nous utilisons cette procédure pour les itérations du cycle des lignes 12-18, plutôt que `rectangles_superposés`. La raison est que sa complexité est, comme nous le verrons, inférieure à celle de l'autre procédure, et tandis qu'au fur et à mesure des itérations le coût de `rectangles_superposés` serait croissant, car le nombre de courbes de Bézier intervenant dans l'arrangement croît, celui de `reconstruction_par_subdivision` décroît, car le cardinal de `LPC` est décroissant. Nous pouvons faire cette "substitution" de procédure, car il n'est pas difficile de voir que les propriétés requises pour les paires de courbes de Bézier de l'arrangement sont invariantes à la subdivisions (même si les conditions (V.4), (V.2) et (V.3) ne le sont pas à la subdivision non uniforme). Autrement dit, si une `paire_de_courbes` ne se trouve pas dans le dictionnaire `LPC` après son traitement par `vérification_intersections`, les deux courbes de Bézier que cette paire identifie ne se coupent pas ou ont exactement un point d'intersection, propriétés qui ne seront pas changées par subdivision. Par conséquent, à l'itération suivante nous aurons à chercher les “mauvaises” paires de courbes uniquement parmi celles provenant, par subdivision, des “mauvaises” paires de courbes à l'itération courante. Par ailleurs, cette façon de construire LPC à l'itération i à partir de LPC à l'itération $i-1$ fait aussi que l'exemple donnée dans la figure V.20 ne pose pas de problème, comme nous l'avons déjà mentionné. Le schéma de la procédure est le suivant :

```
1.   reconstruction_par_subdivision(dico_paires_de_courbes LPC,
                                                   dico_courbes ℒ)
2.   entiers i,a,b
3.   tableau_entiers ℐ
4.   tableau_paires_de_courbes copie = LPC
5.   begin
6.   effacement LPC
7.   création_liste_témoin(ℒ,ℐ)
8.   pout i allant de 0 à M − 1
9.      begin
10.     a = ℐ[copie[i].première_courbe]
11.     b = ℐ[copie[i].seconde_courbe]
12.     inserer transformée_1(copie[i],a,b) dans LPC
13.     inserer transformée_2(copie[i],a,b) dans LPC
14.     inserer transformée_3(copie[i],a,b) dans LPC
15.     inserer transformée_4(copie[i],a,b) dans LPC
16.     end
17.  end
```

Le tableau $\mathcal{I}$ est indexée sur tous les `indent_courbe` désignant une courbe de Bézier qui participe à l'arrangement. Si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ est l'indice d'une polycourbe dans l'arrangement et $j \in \{0, \ldots, n_i\}$ est l'indice d'une courbe de Bézier de la composition courante de $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{I}[(i,j)]$ donnera le nombre de courbes de Bézier (toujours par rapport à la composition courante) de la polycourbe $\mathcal{B}_i$ qui correspondent à un indice dans cette polycourbe inférieur à j et qui apparaîssent dans la liste $\mathcal{L}$, donc qui seront subdivisées. Ainsi, après la subdivision de toutes les courbes de Bézier de $\mathcal{B}_i$ indiquées par le dictionnaire $\mathcal{L}$, la courbe qui était j-ème avant subdivision donnera les $j+\mathcal{I}[(i,j)]$-ème et $j+\mathcal{I}[(i,j)]+1$-ème courbes dans la nouvelle écriture de $\mathcal{B}_i$, si elle est subdivisée, et sera la $j+\mathcal{I}[(i,j)]$-ème courbe de $\mathcal{B}_i$, si elle ne l'est pas. La procédure `création_liste_témoin` crée la liste $\mathcal{I}$ en comptant pour chaque (i,j) les nombre de `indent_courbe` (i,k) avec $k < j$ qui sont des éléments de $\mathcal{L}$.

L'initialisation de la ligne 4 est évidemment un peu abusive, elle sous-entend une conversion de type. Les fonctions `transformée_i`, pour i allant de 1 à 4, donnent comme résultat, à partir de `copie[i]` (qui est un élément de LPC de l'itération précédente), les quatre paires de courbes obtenues en associant chacune des deux courbes de Bézier résultées de la subdivision de `copie[i].première_courbe` à chacune des deux courbes de Bézier résultées de la subdivision de `copie[i].seconde_courbe`. Les entiers `a` et `b` servent, comme présenté dans la description du tableau $\mathcal{I}$, au calcul des indices des nouvelles courbes de Bézier (obtenues par subdivision) dans leurs polycourbes respectives. Après l'exécution du cycle des lignes 8-16, le dictionnaire LPC aura 4 fois plus déléments.

Pour calculer la complexité de cette procédure, sommons les coûts de ses lignes. L'instruction de la ligne 4 s'execute en $\mathcal{O}(\text{card}(\texttt{LPC}))$, donc en $\mathcal{O}(M)$. La procédure `création_liste_témoin` coûte $\mathcal{O}(\left(\text{card}(\mathcal{L})\right))$, donc au pire $\mathcal{O}(N)$. Les instructions des lignes 10-11 sont chacune effectuées en temps constant et celles des lignes 12-15 en $\mathcal{O}(\log(k))$, k étant la taille actuelle de LPC. En conséquence le cycle des lignes 8-16 coûtera $\mathcal{O}(M\log(M))$. La complexité totale de la procédure sera ainsi $\mathcal{O}(N^2\log(N))$. Remarquons que la majoration de M par $N(N-1)$ est, surtout pour les dernières itérations, très grossière.

V.4.2.6. La procédure `construction_liste_triplets`

Cette procédure construit la liste de tous les triplets de courbes de Bézier susceptibles de représenter un triangle simple. Notre algorithme commence le traitement des triangles simples seulement après avoir fini les itérations assurant que toute paire de courbes de Bézier se coupe exactement autant de fois que la paire formée par leur B-polygones "étendus" respectifs et aussi que la paire de polygones support courante, c'est-à-dire que

$$\text{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})=\text{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2})=\text{card}(\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{S}}_{i_2,j_2})$$

pour tous $i_1\neq i_2\in\{1,\ldots,n\}$, $j_1\in\{0,\ldots,m_{i_1}\}$, $j_2\in\{0,\ldots,m_{i_2}\}$. Mais nous ne savons pas quelle est cette valeur commune des cardinaux des intersections, car l'arrangement initial ne satisfait généralement pas la condition $\text{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1}\cap\mathcal{B}_{i_2,j_2})\in\{0,1\}$ et, contrairement à la supposition faite pour prouver la correctitude et la convergence de l'algorithme, nous ne changeons pas la structure initiale de l'arrangement. Il n'est quand même pas difficile à voir que si pour un triplet $\left((i_1,j_1),(i_2,j_2),(i_3,j_3)\right)$ l'ordre des points $\left(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}\right)\cup\left(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}\right)$ sur $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ est le même que l'ordre des points $\left(\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{S}}_{i_2,j_2}\right)\cup\left(\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}\cap\widetilde{\mathcal{S}}_{i_3,j_3}\right)$ sur $\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}$, et pareil pour toutes les permutations circulaires des indices $1,2,3$, alors tous les pseudo-triangles définis par $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}$ seront équivalents aux ceux définis par $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$, $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$, car nous n'aurons fait que traiter d'un seul coup tous les pseudo-triangles définis pas une triplet donné de courbes de l'arrangement initial à la place de les séparer d'abord et les traiter un par un ensuite.

Par conséquent, nous cherchons les triplets de courbes se coupant deux par deux dans l'écriture initiale de l'arrangement, car dans les conditions décrites (nous ne devons pas chercher que les triangles déterminés exactement par trois courbes de Bézier faisant respectivement partie de trois polycourbes distinctes, mais plus ; aussi, il y a bien plus de courbes de Bézier intervannant dans l'arrangement dans son écriture finale que dans l'initiale) il serait plus coûteux de faire autrement, et l'algorithme serait nettement plus compliqué. Dans cette situation, le tableau obtenu contiendra généralement un bon nombre de triplets designant trois courbes qui ne se coupent pas toutes deux, donc qui en fait ne nous interessent pas, mais la procédure appelée après, `équivalence_triangles`, se chargera de l'élimination de ces éléments de $\mathcal{T}$.

Ainsi, nous cherchons dans le dictionnaire LPC les indices `i, j, k` tels que l'ensemble de `ident_courbe`

$$\Big\{\texttt{LPC[i].première\_courbe, LPC[i].seconde\_courbe, LPC[j].première\_courbe,}$$
$$\texttt{LPC[j].seconde\_courbe, LPC[k].première\_courbe, LPC[k].seconde\_courbe}\Big\}$$

ait exactement trois éléments et que dans cette écriture chacun apparaisse exactement deux fois. Pour chaque tel triplet d'indices, nous ordonnons (par ordre lexicographique) les trois `ident_courbe` distincts de l'ensemble ci-dessus et introduisons le `triangle` ainsi obtenu dans le tableau $\mathcal{T}$ (l'ajout d'un nouvel `triangle` se fait toujours à la fin du tableau

; le fait que LPC est un dictionnaire, donc fournit les paires_de_courbes en ordre, nous garantit le bon ordre des éléments de $\mathcal{T}$). Voici le schéma de la procédure :

```
 1.  construction_liste_triplets(dico_paires_de_courbes LPC,
                                             tableau_triplets 𝒯)
 2.  paire_de_courbes *i,*j
 3.  triangle T
 4.  begin
 5.  *i = premier élément de LPC
 6.  tant que i ≠ NULL
 7.     begin
 8.     j = (*i).suivant
 9.     tant que (j ≠ NULL  et  (*j).première_courbe=(*i).première_courbe)
10.        begin
11.        si ((*i).seconde_courbe,(*j).seconde_courbe) ∈ LPC
12.           begin
13.           T.première_courbe = (*i).première_courbe
14.           T.seconde_courbe = (*i).seconde_courbe
15.           T.troisième_courbe = (*j).seconde_courbe
16.           ajouter T à 𝒯
17.           end
18.        j = (*j).suivant
19.        end
20.     i = (*i).suivant
21.     end
22.  end
```

Le test de la ligne 11 s'execute $\mathcal{O}(N^3)$ fois quand card(LPC) $= N(N-1)/2$ et il s'execute en $\mathcal{O}(\log(N))$; comme toutes les autres instructions de la procédure sont de complexité $\mathcal{O}(1)$, le coût de construction_liste_triplets est $\mathcal{O}(N^3\log(N))$.

Remarquons qu'une procédure construisant la liste de tous les triplets de courbes de Bézier de la structure initiale de l'arrangement qui sont susceptibles de former un triangle simple en testant tout simplement les intersections de tous les triplets possibles de B-polygones est de complexité $\mathcal{O}(N^3 D)$, qui généralement est inférieure à la complexité de notre procédure (N est suffisament grand par rapport à D).

V.4.2.7. La procédure équivalence_triangles

Comme précisé au début du paragraphe V.4.2.6, pour tester l'équivalence des trianlges simples trouvés par la procédure précédente nous avons choisi une méthode consistant à comparer les ordres respectifs dans lesquels $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ coupe $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$ et $\widetilde{\mathcal{S}}_{i_1,j_1}$ coupe $\widetilde{\mathcal{S}}_{i_2,j_2}$ et $\widetilde{\mathcal{S}}_{i_3,j_3}$ (et de même pour toutes les permutations des indices).

Avant de décrire cette procédure, introduisons une nouvelle structure de données, le segm_inters, ayant deux champs, segment et avec_qui. Si nous avons trois polygones, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$, un segm_inters, notons-le si, attaché à, par exemple, $\mathcal{P}_1$, indiquera une intersection de ce polygone avec l'un des deux autres : nous aurons

$$[\mathrm{P}^{(1)}_{\mathrm{si.segment}}\mathrm{P}^{(1)}_{\mathrm{si.segment+1}}] \cap \mathcal{P}_{\mathrm{si.avec\_qui}} \neq \emptyset$$

```
1.  équivalence_triangles(arrangement 𝒜, tableau_triplets 𝒯)
2.  triangle T
3.  liste_segm_inters SI
4.  polygones contr1, contr2, contr3, supp1, supp2, supp3
5.  liste_segm_inters c1, c2, c3, s1, s2, s3
6.  begin
7.  pour tout T ∈ 𝒯
8.    begin
9.    création_poly_contr/supp(𝒜,T.première_courbe,contr1,supp1)
10.   création_poly_contr/supp(𝒜,T.seconde_courbe,contr2,supp2)
11.   création_poly_contr/supp(𝒜,T.troisième_courbe,contr3,supp3)
12.   si supp1 ∩ supp2 ≠ ∅  et  supp1 ∩ supp3 ≠ ∅  et  supp2 ∩ supp3 ≠ ∅
13.     begin
14.     liste_des_intersections(contr1,contr2,contr3,
                 supp1,supp2,supp3,c1,c2,c3,s1,s2,s3)
15.     tant que comparaison(c1,s1) = faux  ou
              comparaison(c2,s2) = faux  ou  comparaison(c3,s3) = faux
16.       begin
17.       subdiviser_alternances(𝒜,T.première_courbe,s1)
18.       subdiviser_alternances(𝒜,T.seconde_courbe,s2)
19.       subdiviser_alternances(𝒜,T.troisième_courbe,s3)
20.       création_poly_contr/supp(𝒜,T.première_courbe,contr1,supp1)
21.       création_poly_contr/supp(𝒜,T.seconde_courbe,contr2,supp2)
22.       création_poly_contr/supp(𝒜,T.troisième_courbe,contr3,supp3)
23.       liste_des_intersections(contr1,contr2,contr3,
                             supp1, supp2,supp3,c1,c2,c3,s1,s2,s3)
24.       end
25.     end
26.   end
27. end
```

La procédure `création_poly_contr/supp` construit, pour un `ident_courbe ic` donné, le polygone union des B-polygones de toutes les courbes de Bézier qui proviennent, dans l'écriture courante de l'arrangement, de la courbe de Bézier de la structure initiale de l'arrangement designée par `ic`, et similairement pour les polygones support (l'identification des courbes obtenues par la subdivision d'une courbe donnée est possible grâce au champ `rang` d'une `courbe_de_Bézier`). Il est évident que le polygone `supp1` aura moins de sommets que `contr1`, et de même pour `supp2` et `contr2` et respectivement `supp3` et `contr3`. Mais aussi, nous aurons card($\texttt{supp1} \cap \texttt{supp2}$) = card($\texttt{contr1} \cap \texttt{contr2}$), card($\texttt{supp1} \cap \texttt{supp3}$) = card($\texttt{contr1} \cap \texttt{contr3}$) et card($\texttt{supp2} \cap \texttt{supp3}$) = card($\texttt{contr2} \cap \texttt{contr3}$), car l'arrangement a subi le traitement du cycle des lignes 12-18 (de l'algorithme `Arrangements_équivalents`). Ainsi, quand nous voulons vérifier si les courbes de Bézier "incriminées" (designées par le `triangle T` dans la structure initiale de $\mathcal{A}$) ont vraiment une intersection non vide deux par deux, nous regardons si cette propriété est satisfaite par `supp1`, `supp2` et `supp3`, c'est moins coûteux (ligne 12). Si ce n'est pas le cas, les trois courbes ne forment aucun pseudo-triangle et nous passons à l'élément suivant de $\mathcal{T}$.

Si les trois courbes de Bézier se coupent deux par deux, nous associons à chacune d'entre elles deux listes de `segm_inters`, créant ainsi les `liste_segm_inters c1, c2, c3, s1, s2, s3`. `c1` et `s1` correspondent à $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.première_courbe)` : `c1` indique, dans l'ordre, toutes les intersections de `contr1` avec `contr2` et `contr3`, et `s1` de même, pour `supp1`, `supp2` et `supp3`. De la même façon, les listes `c2, s2`, respectivement `c3, s3` ont associées à $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.seconde_courbe)`, respectivement $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.troisième_courbe)`. Nous avons card(`c1`) = card(`contr1` ∩ `contr2`) + card(`contr1` ∩ `contr3`) et une relation analogue est valable pour card(`s1`), d'où nous déduisons tout de suite card(`c1`) = card(`s1`), card(`c2`) = card(`s2`) et card(`c3`) = card(`s3`). La procédure `comparaison` vérifie, pour deux `liste_segm_inters` de la même longueur, si les deux listes d'entiers respectivement obtenues en considérant uniquement le champ `avec_qui` de chaque élément (de chacune des `listes_segm_inters`) sont identiques, et retourne "`vrai`" si c'est le cas et "`faux`" sinon.

Il n'est pas difficile à voir que si le test de la ligne 15 rend "`vrai`", tous les pseudo-triangles éventuellement déterminés par les trois courbes couramment traitées satisfont les "bonnes" propriétés, et nous passons alors à l'élément suivant de la liste $\mathcal{T}$. Si ce test rend "`faux`", il faudra subdiviser certaines (ou toutes) des courbes de Bézier concernées ; subdiviser toutes ces courbes peut ne pas être nécessaire. Un test déterminant exactement quelles courbes il faut subdiviser serait bien trop complexe, ce pourquoi nous avons choisi un critère qui a l'avantage d'être très simple, tout en ayant l'inconvenient de nous faire subdiviser plus des courbes de Bézier qu'il n'en est nécessaire. Nous subdiviserons donc la `i`-ème courbe correspondant à $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.première_courbe)` si et seulement si `s1[i].avec_qui` ≠ `s1[i+1].avec_qui` ou `s1[i].avec_qui` ≠ `s1[i-1].avec_qui` (au cas où l'un des éléments `s1[i-1]` et `s1[i+1]` n'existe pas, nous considérons uniquement celui qui existe). Le même critère s'applique bien sûr aux courbes provenant de $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.seconde_courbe)` et $\mathcal{A}_{\text{init}}$`(T.troisième_courbe)`. Après ces subdivisions (lignes 17-19), le proccessus est repris jusqu'à ce que le test de la ligne 15 rende "`vrai`", moment où nous passons à l'élément suivant de $\mathcal{T}$.

À la différence des autre procédures détaillées ici, nous ne pouvons pas calculer le coût de `équivalence triangles`. Ceci est dû au fait, premièrement, que nous ne savons pas (et ne pouvons pas évaluer autrement que de manière experimentale) le nombre d'itérations qui seront nécessaires dans le cycle des lignes 15-24. Deuxièmement, pour donner la complexité de la procédure `création_poly_contr/supp` nous devrions savoir combien de courbes ont été obtenues, au cours des itérations du cycle des lignes 12-18 de `Arrangements_équivalents`, à partir d'une courbe de Bézier donnée de l'arrangement initial. Pour ça, nous aurions besoin d'une évaluation du nombre de telles itérations effectuées, qui non plus ne peut être faite théoriquement.

Supposons que le cycle des lignes 12-18 de `Arrangements_équivalents` requiert κ_1 itérations et majorons par κ_2 le nombre d'itérations nécessaires dans le cycle des lignes 15-24 d'`équivalence_triangles`. Il y aura alors au plus 2^{κ_1} courbes provenant d'une même courbe de Bézier de l'écriture initiale de l'arrangement et par conséquent `création_poly_contr/supp` sera de complexité $\mathcal{O}(2^{\kappa_1}D)$, D étant toujours le degré maximal des courbes de Bézier de $\mathcal{A}$. Le test de la ligne 12 est linéaire en la somme des cardinaux des polygones `supp1, supp2, supp3`, et coûte ainsi $\mathcal{O}(2^{\kappa_1})$. La procédure `liste_des_intersections` est elle aussi linéaire en le maximum des sommes des cardinaux des polygones `contr1, contr2, contr3`, donc de complexité $\mathcal{O}(2^{\kappa_1}D)$. La procédure `comparaison` est linéaire en le cardinal des listes qu'elle traite. Comme deux courbes polynômiales distinctes peuvent avoir en commun au plus leur degré maximal au carré points (n'oublions pas que l'arrangement $\mathcal{A}$ est simple, les courbes de Bézier ne peuvent pas être confondues sur intervalles), le test de la ligne 15 coûte $\mathcal{O}(D^2)$. Pour les subdivisions (lignes 17-19), le cas le pire consiste à subdiviser toutes les courbes de Bézier impliquées, doublant ainsi leur nombre ; cette opération est de complexité $\mathcal{O}(2^{\kappa_1+i}D^2)$, quand nous sommes à l'$i$-ème itération dans le cycle des lignes 15-24. Ensuite, à leurs appels à l'intérieur de ce cycle, les procédures `création_poly_contr/supp` et `liste_des_intersections` auront toutes les deux le coût $\mathcal{O}(2^{\kappa_1+i}D)$ à la i-ème itération. En sommant, nous obtenons pour le cycle la complexité $\mathcal{O}(2^{\kappa_1+\kappa_2}(D^2+D)+\kappa_2 D^2)$. Par conséquent, la complexité de la procédure `équivalence_triangles` sera

$$\mathcal{O}\big((2^{\kappa_1+\kappa_2}(D^2+D)+2^{\kappa_1}D+\kappa_2 D^2)\,\mathrm{card}(\mathcal{T})\big)$$

La liste $\mathcal{T}$ a, au cas le pire, $\mathrm{C}_N^3 = N(N-1)(N-2)/6$ éléments.

V.4.3. *La complexité de l'algorithme* `Arrangements_équivalents`

De la même façon que pour l'algorithme de calcul de l'enveloppe convexe topologique d'une polycourbe fermée, le coût de l'algorithme ne peut pas être évalué en fonction uniquement de la taille des données, car le nombre d'itérations nécessaires pour que les conditions d'équivalence soient satisfaites par $\mathcal{A}$ reflète les propriétés "qualitatives" et non pas "quantitatives" de l'arrangement. Pour donner quand même une idée de la complexité de l'algorithme, supposons, comme dans le paragraphe précédent, que les instructions du cycle des lignes 12-18 seront exécutées κ_1 fois. Nous verrons dans la section suivante que de toute manière le coût théorique que nous obtiendrons ici est largement supérieur au coût moyen obtenu expérimentalement, et par conséquent nous allons négliger dans les expressions des coûts des procédures qu'`Arrangements_équivalents` appelle tous les termes à part les plus significatifs.

Soit N_0 le nombre de courbes de Bézier intervennant dans l'écriture initiale de l'arrangement. La procédure `rectangles_superposés` sera alors de complexité $\mathcal{O}(N_0 \log N_0 + N_0 \log D)$. À l'appel de la ligne 9, `vérification_intersections` coûtera $\mathcal{O}(N_0^2 \log N_0 + N_0^2 D)$. À la ligne 10, `liste_courbes_à_subdiviser` est de complexité $\mathcal{O}(N_0^2 \log N_0)$. Pour voir quels sont les coûts des appels faits à l'intérieur du cycle des lignes 12-18, il nous faut évaluer la taille (en courbes de Bézier) N_i de l'arrangement à l'i-ème itération. Au cas le pire, à chaque itération toutes les courbes de Bézier de l'arrangement sont subdivisées, donc à chaque itération N_i double. Nous aurons ainsi $N_i = 2^{i-1}N_0$. En conséquence, à l'i-ème itération les lignes 14-17 auront un coût total de $\mathcal{O}(2(i-1)2^{2(i-1)}N_0^2 \log N_0 + 2^{2(i-1)}N_0^2 D^2)$ et nous obtenons, en sommant, la complexité du cycle des lignes 12-18 $\mathcal{O}(\kappa_1 2^{2\kappa_1}N_0^2 \log N_0 + 2^{2\kappa_1}N_0^2 D^2)$. En y ajoutant les coûts des procédures qui ne sont pas comprises dans le cycle, nous obtenons le coût de l'algorithme `Arrangements_équivalents` : $\mathcal{O}(\kappa_1 2^{2\kappa_1}N_0^2 \log N_0 + 2^{2\kappa_1}N_0^2 D^2 + 2^{\kappa_1+\kappa_2}N_0^3 D^2 + N_0^3 \log N_0)$.

Il faut remarquer que le "cas le pire" est assez dificile à avoir, voir impossible dans les dernières itérations (aussi bien dans le cycle des lignes 12-18 d'`Arrangements_équivalents` que dans le cycle des lignes 15-24 d'`équivalence_triangles` et en ce qui concérne le cardinal de la liste $\mathcal{T}$ dans cette dernière procédure), à moins d'avoir un très faible nombre de courbes de Bézier qui interviennent, ou alors des valeurs de κ_1 et κ_2 très faibles. En plus, même en considérant le cas le pire pour la structure initiale de l'arrangement, où chaque courbe de Bézier représente une polycourbe, il est évident que si au début nous avons effectivement N_0 polycourbes à une courbe de Bézier chacune, après une itération, donc la subdivision de partie ou toutes les courbes de Bézier, ceci n'est plus possible.

V.5. Résultats numériques

Le programme issu de l'implémentation des algorithmes présentés dans la section précédente a été testé sur un échantillon de 60 arrangements. Chacun des arrangements contient autour de 100 courbes de Bézier et nous avons fait varier le nombre de courbes composant chaque polycourbe de l'arrangement entre 1 et 10. Nous avons ainsi 10 arrangements de 100 polycourbes composées chacune d'une seule courbe de Bézier, 10 arrangements de 20 polycourbes composés chacune de 5 courbes de Bézier et 10 arrangements de 10 polycourbes composées chacune de 10 courbes de Bézier, le reste des exemples étant uniformement distribués entre les arrangements de polycourbes à 2, 3, 4, 6, ..., 9 courbes de Bézier.

Le tableau suivant donne quelques valeurs correspondant aux arrangements initiaux, ceux qui n'ont pas encore été traités par le programme. Ces valeurs sont n, le nombre moyen de polycourbes par arrangement, N_0, le nombre moyen de courbes de Bézier par arrangement, et D, le degré moyen de ces courbes de Bézier.

	n	N_0	D
Arrangement initial	$33,52$	$100,2$	$3,51$

Pour les arrangements résultant après traitement, ceux pour lesquels l'arrangement des polygones de contrôle est équivalent à l'arrangement de polycourbe (et à l'arrangement des polygones support, si la situation mentionnée à la fin de la section V.3 n'apparaît pas), nous avons trouvé que les valeurs suivantes donnent une bonne idée du fonctionnement de l'algorithme et de sa complexité :
- N, le nombre de courbes de Bézier (de la structure finale de l'arrangement) ;
- κ_1, le nombre d'itération nécessaires dans le cycle des lignes 12-18 de l'algorithme `Arrangements_équivalents` ;
- $\tau = \mathrm{card}(\mathcal{T})$, le nombre de triplets que la liste $\mathcal{T}$ contient après l'appel de la procédure `construction_liste_triplets` (ligne 9) ;
- τ_{eff}, le nombre de triplets de $\mathcal{T}$ qui forment effectivement un triangle simple ;
- τ_{non-eq}, le nombre de triangles simples ne satisfaisant pas les conditions d'équivalence et devant être subdivisés ;
- κ_2, le nombre d'itérations nécessaires pour que les triangles simples qui ne satisfaisaient les conditions d'équivalence le fassent.

Le tableau qui suit donne pour tous ces paramètres les valeurs moyennes et les valeurs maximales pour l'échantillon étudié.

Si, pour un arrangement donné, le nombre d'opérations à effectuer pour que les conditions d'équivalence soient satisfaites est celui donné par la complexité théorique de la sous section V.3.3, la forme finale de l'arrangement devrait contenir $2^{\kappa_1+\kappa_2}N_0$ courbes de Bézier. Donc dans notre cas, la valeur moyenne de N devrait être 12800, d'un ordre de grandeur supérieure à celle effectivement obtenue (et encore quatre fois plus grande que la pire valeur de nos exemples).

	N	κ_1	τ	τ_{eff}	τ_{non-eq}	κ_2
Valeur moyenne	$1202,38$	$6,69$	$17373,6$	$5287,7$	$77,15$	$1,285$
Valeur maximale	3296	10	81486	47913	278	10

Aussi, le nombre le pire (le plus grand) de triplets de l'ensemble $\mathcal{T}$ est $N_0(N_0-m)(N_0-2m)$, où m est le nombre de courbes de Bézier constituant une polycourbe, considéré ici le même pour toutes les polycourbes de l'arrangement. Pour notre échantillon, il résulte $\tau = 720000$ même en mettant $m = 10$, le meilleur cas, ce qui est 40 fois la valeur que nous avons obtenue en moyenne et toujours 9 fois plus pour le pire exemple. Il faut en plus remarquer qu'en moyenne deux tiers de ces triplets ne constituent pas des triangles simples et sont éliminés tout de suite et à un coût réduit, car nous testons l'intersections des polygones support correspondant aux courbes de Bézier identifiées par un tel triplet ; ces polygones ont au cas le pire 1024 sommets et en moyenne pas plus de 12 sommets. Et encore, parmi ceux-là seulement 1/70 ne satisfont pas les conditions d'équivalence des triangles simples et nous devrons subdiviser les trois courbes de Bézier qu'ils identifient. Dans la plupart des cas, une seule subdivision de ces courbes suffira.

Nous avons calculé aussi le nombre maximal de subdivisions qui ont été appliquées aux courbes de l'échantillon d'arrangements, et il est égal à 16 (d'où, évidemment, la conclusion que le pire cas pour κ_1 et le pire cas pour κ_2 ne sont pas survenus pour le même exemple). La figure suivante présente la repartition des courbes de Bézier par nombre de subdivisions appliquées (voir la définition III.10 pour la notion de "courbe de Bézier subdivisée k fois"), en pourcentage sur le nombre total de courbes de l'échantillon.

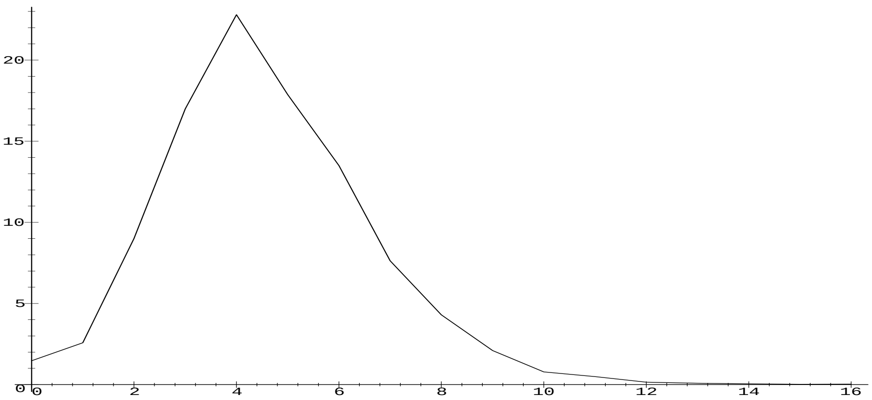


Figure V.21

Ce graphe a l'allure d'une gaussienne, comme c'était à attendre, car à la différence du cas de l'enveloppe convexe les subdivisions se font "dans toute la masse" de l'arrangement. Le pic correspond à 4 subdivisions et est de 22,81% ; les valeurs correspondant à 13 ou plus subdivisions sont inférieures à 0,1%.

Précisons aussi que le nombre moyen de sommets d'un arrangement dans son écriture finale est 4208,59 et nous voyons ainsi quelle est l'importance du corollaire V.7, car nous avons aussi un arrangement, celui des polygones support, ayant en moyenne 1232,38 sommets (soit plus de trois fois moins que celui de polygones de contrôle) et qui est équivalent à l'arrangement de polycourbes.

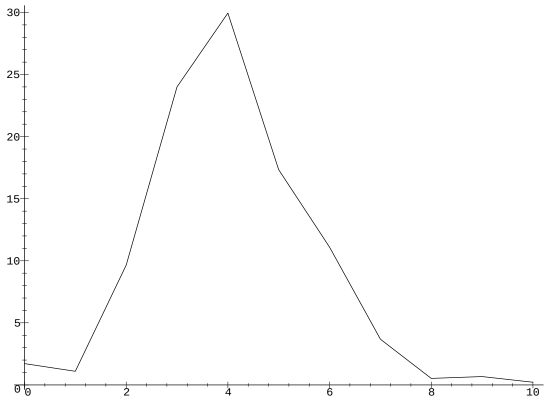
Nous avons précisé dans les discussions de complexité des diverses procédures appelées par l'algorithme que le cas le pire survient quand l'arrangement initial est composé de N_0 poycourbes à une courbe de Bézier chacune (sauf pour la procédure de subdivision). Le tableau suivant illustre cette affirmation, en présentant les mêmes valeurs que le précédent respectivement pour des arrangements de 100 polycourbes à 1 courbe de Bézier, 20 polycourbes à 5 courbes de Bézier et 10 polycourbes à 10 courbes de Bézier.

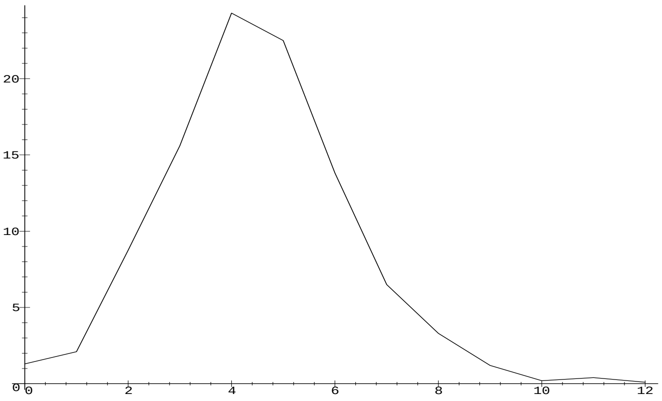
Dans ce tableau, les valeurs de κ_1 et κ_2 sont sensiblement approchées (et approchées de la valeur du tableau précédent, correspondant à la totalité de l'échantillon). Nous déduisons que les valeurs très différentes des tailles (en courbes de Bézier) des arrangements finaux pour les trois cas résultent du nombre de courbes à subdiviser à chaque itération, qui est bien plus important pour les polycourbes à une seule courbe de Bézier que pour celle à dix courbes de Bézier. La même observation est valable en ce qui concerne le traitement des triangles simples, ce qui est d'ailleurs reflété par les valeurs de τ, τ_{eff} et τ_{non-eq} dans les trois cas.

		N	κ_1	τ	τ_{eff}	τ_{non-eq}	κ_2
100x1	Valeur moyenne	$2474,6$	$7,7$	$52330,2$	$16709,6$	$179,8$	$1,31$
	Valeur maximale	3296	9	81486	47913	278	10
20x5	Valeur moyenne	$1102,7$	$6,6$	$10488,9$	$2620,5$	$63,8$	$1,3$
	Valeur maximale	1729	8	15749	3824	124	6
10x10	Valeur moyenne	$858,44$	6	$4790,56$	$1361,56$	$44,9$	$1,31$
	Valeur maximale	1184	7	12197	5401	103	6

La figure suivante présente la distribution des courbes par nombre de subdivisions appliquées respectivement pour les polycourbes à 10 courbes, à 5 courbes et à une courbe de Bézier. Si pour les exemples d'arrangements de polycourbes à une courbe de Bézier le nombre maximal de subdivisions appliquées est 16 (d'ailleurs ces exemples fournissent, dans l'échantillon intégral, la totalité des courbes de Bézier subdivisées 16 fois), pour les exemples d'arrangements de polycourbes à 5 courbes de Bézier cette valeur descend à 12 et pour ceux à 10 courbes à 10.

Ces graphes aussi ressemblent à des gaussiennes. Le pic pour le premier (correspondant aux arrangements de dix polycourbes à dix courbes) correspond à 4 subdivisions et est de 29,95% (avec 24% pour 3 subdivisions) ; le pic pour le deuxième (correspondant aux arrangements de vingt polycourbes à cinq courbes) est atteint pour 4 subdivisions et représente 24,35% (avec 22,46% pour cinq subdivisions) ; enfin, le pic du troisième graphe est de 21,57% et est atteint pour 6 subdivisions (avec 19% pour 7 subdivisions).





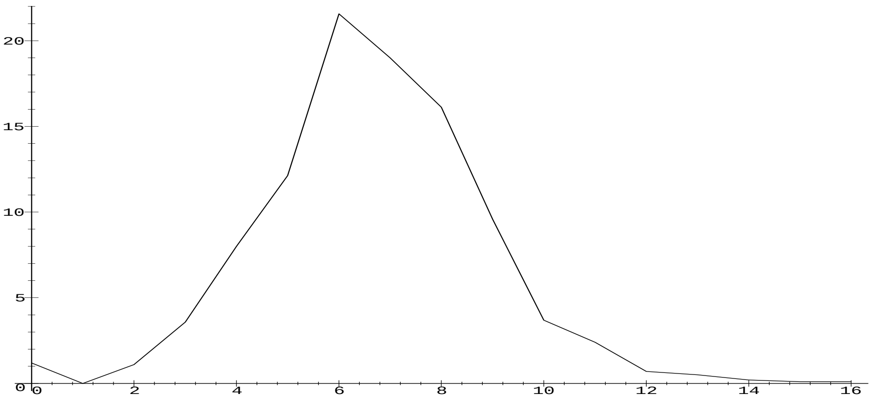


Figure V.22

V.6. Exemples

Nous n'allons pas donner beaucoup d'exemples faisant partie de notre échantillon, car le nombre élevé de courbes, respectivement polygones, fait les faces des arrangements difficiles à distinguer. Les figures sont groupées par trois, **A** est l'arrangement de polycourbes, **B** celui de polygones de contrôle et **C** l'arrangement de polygones support.

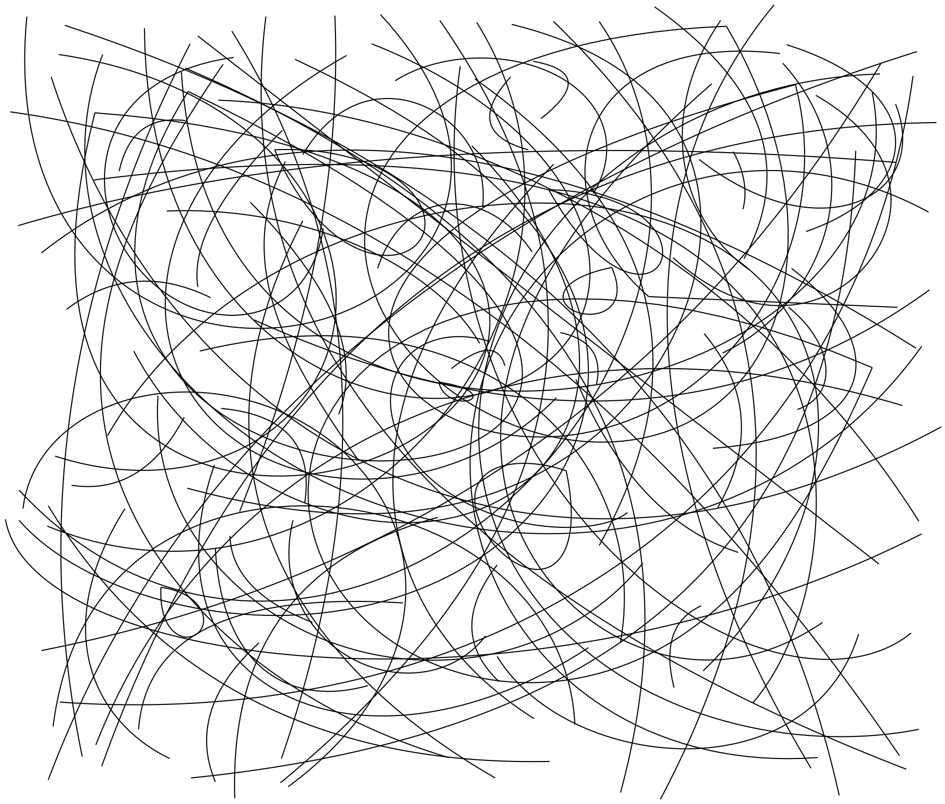


Figure V.23 A *Arrangement de 100 polycourbes à une courbe de Bézier chacune*

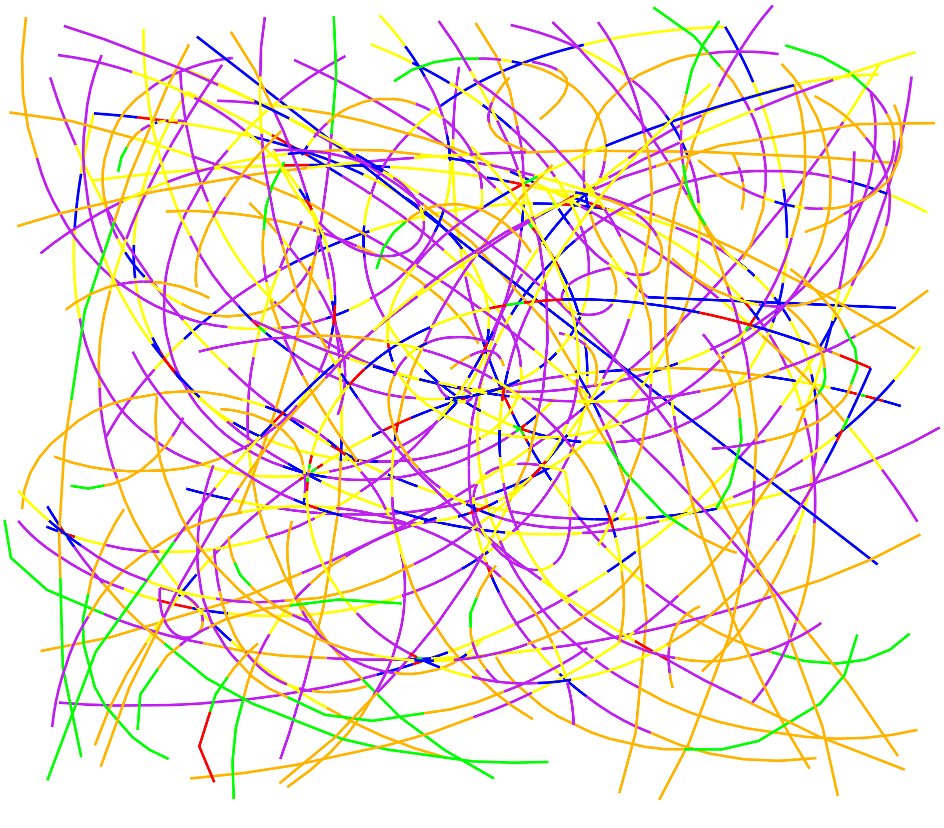


Figure V.24 B *L'arrangement de polygones d contrôle a 7318 sommets*

Figure V.25 C *L'arrangement de polygones support a 1953 sommets*

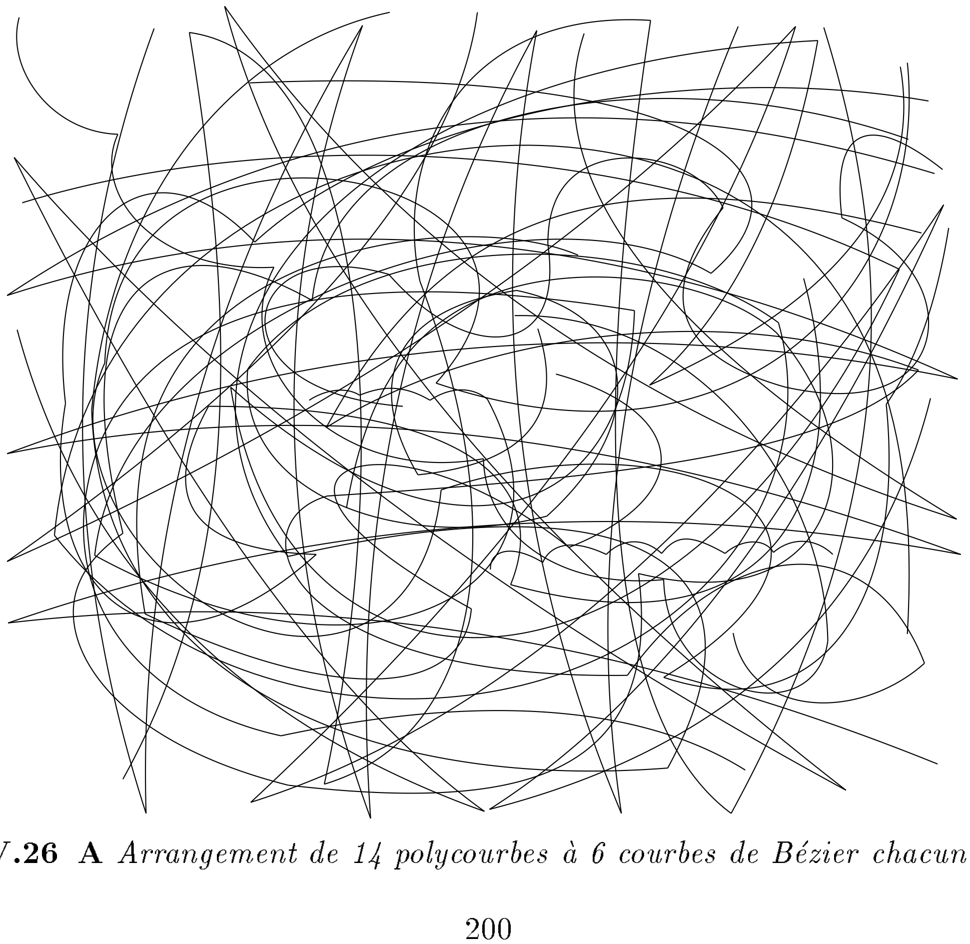


Figure V.26 A *Arrangement de 14 polycourbes à 6 courbes de Bézier chacune*

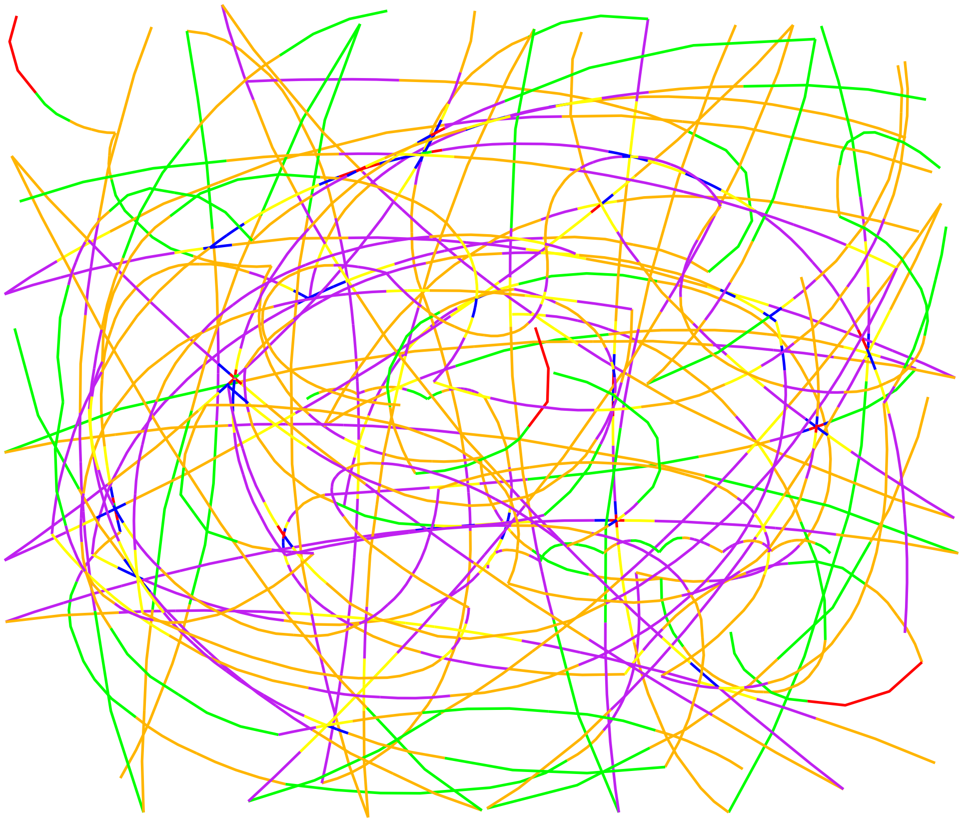


Figure V.27 B *L'arrangement de polygones de contrôle a 2370 sommets*

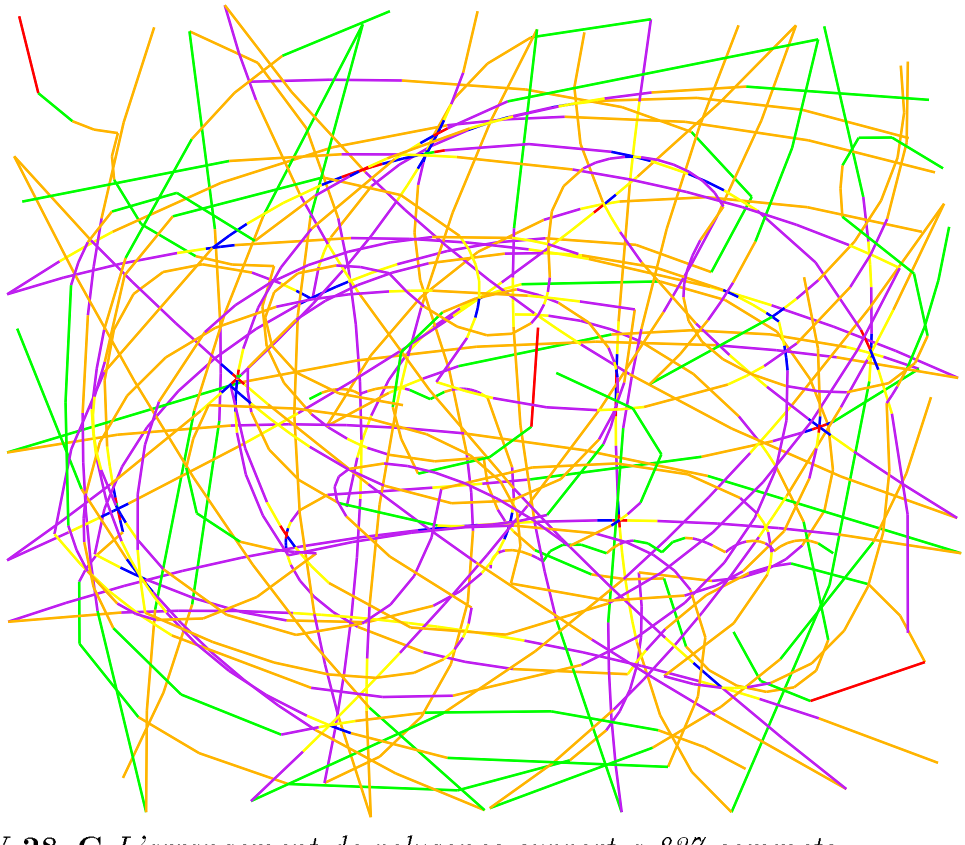


Figure V.28 C *L'arrangement de polygones support a 837 sommets*

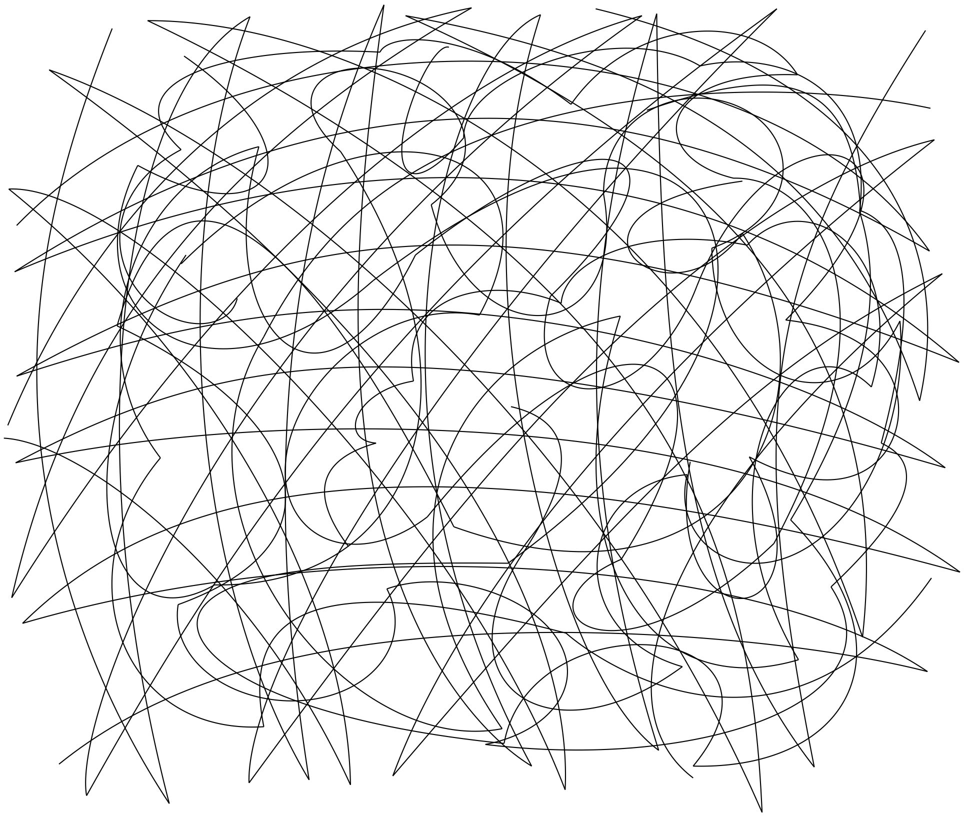


Figure V.29 A *Arrangement de 10 polycourbes à 10 courbes de Bézier chacune*

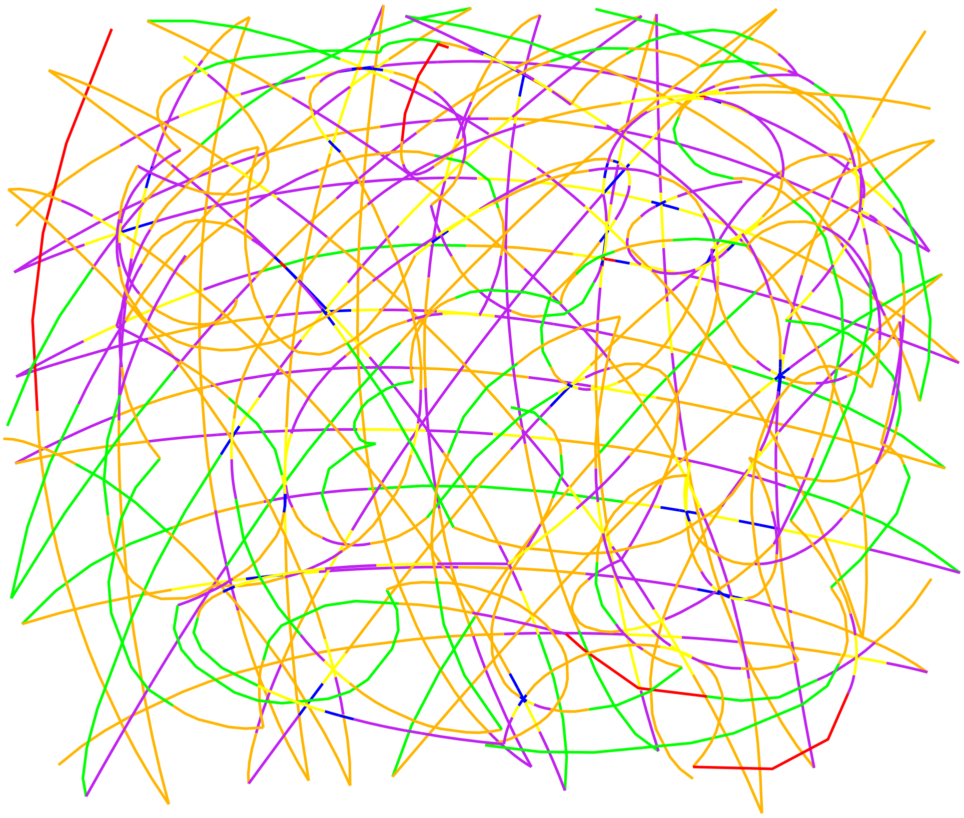


Figure V.30 B *L'arrangement de polygones de contrôle a 2339 sommets*

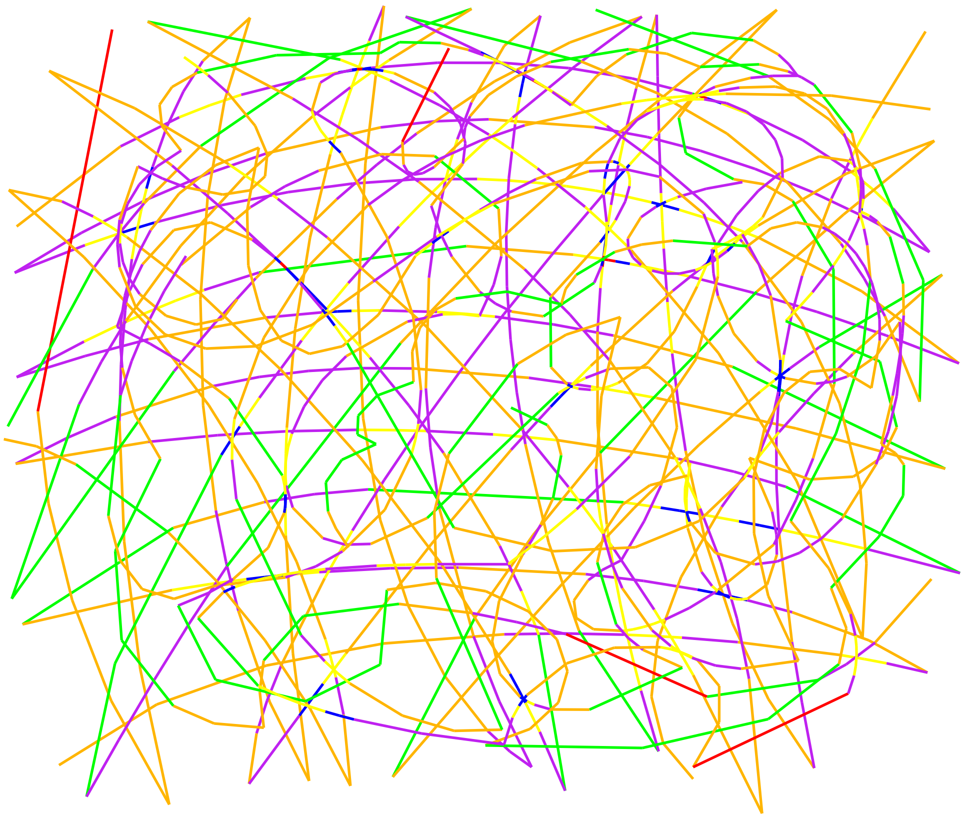


Figure V.31 C *L'arrangenent de polygones support a 716 sommets*

Les trois figures suivantes présentent un arrangement de 27 polycourbes à une courbe de Bézier chacune, sauf une qui en a deux. Les courbes de Bézier ont été introduites de telle manière que le plus d'intersections possible. Ainsi, tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{T}$, au nombre de 2935, étaient des triangles simples, mais seulement 23 parmi eux ont demandé des subdivisions pour satisfaire les conditions d'équivalence. Pourtant, ceci a grandement augmenté la taille en courbes de Bézier de l'arrangement : dans sa forme initiale il avait 28 courbes, après le cycle des lignes 12-18 de l'algorithme il avait 142 courbes, pour arriver dans sa forme finale à 280 courbes de Bézier. Le nombre moyen d'itérations nécessaire pour rendre tous les triangles simples équivalents est 1,78, le maximum étant 4.

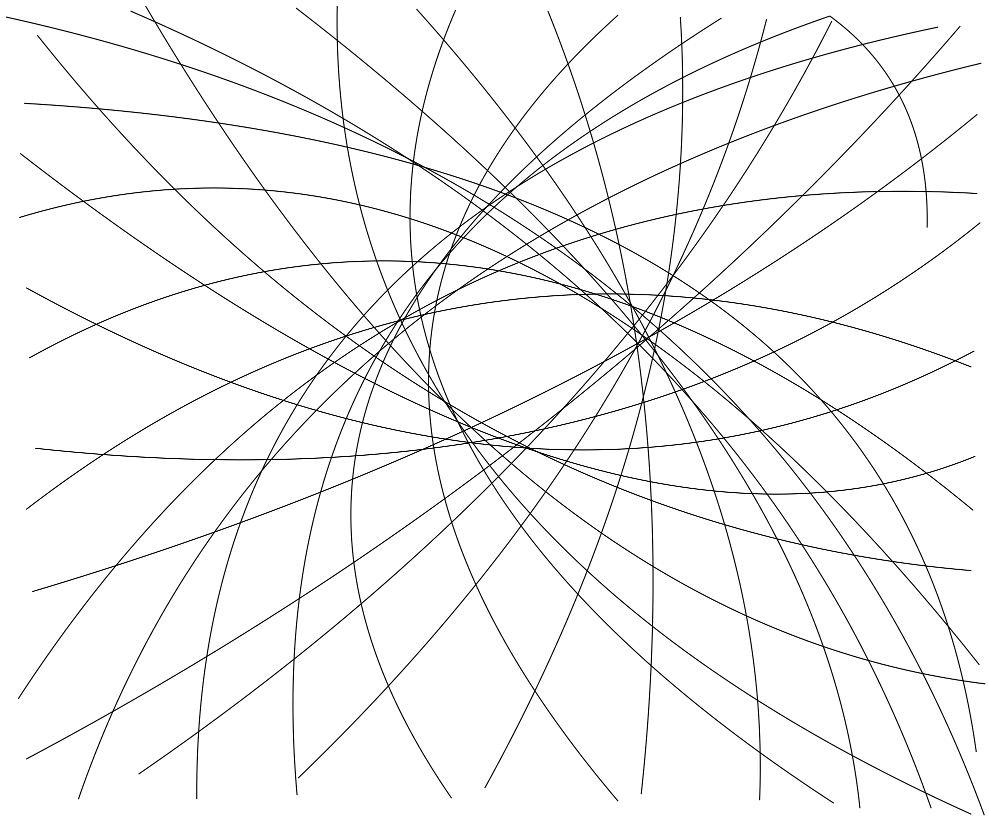


Figure V.32 A

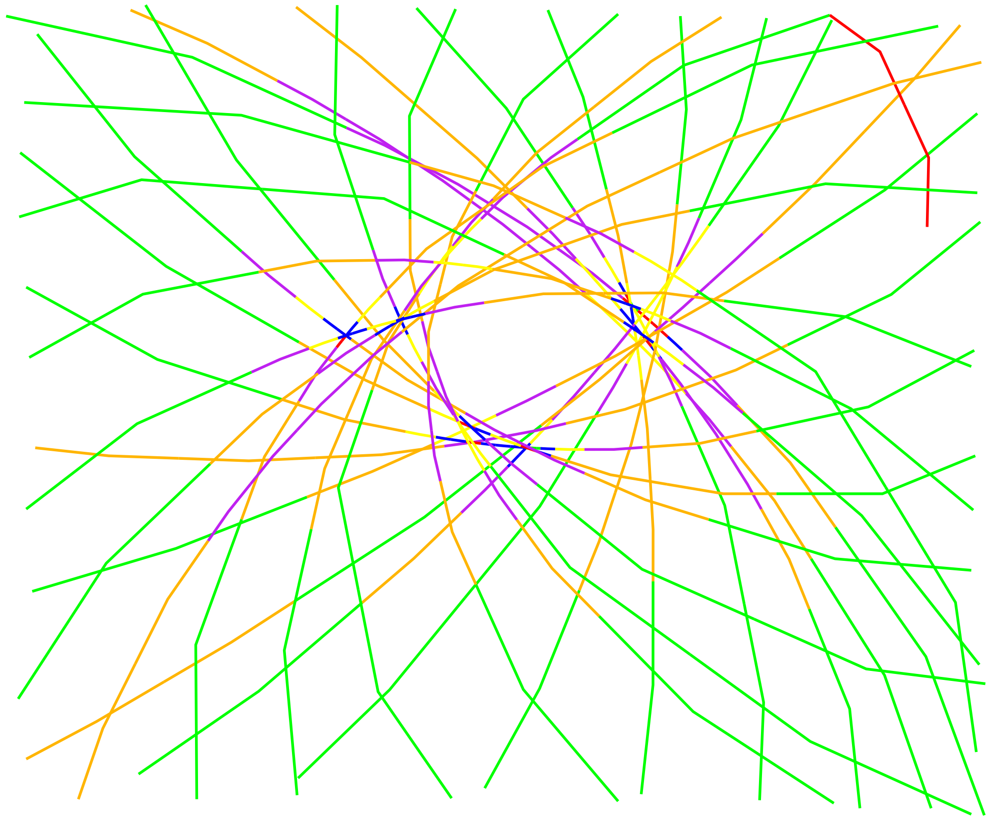


Figure V.33 B *L'arrangement de polygones de contrôle a 587 sommets*

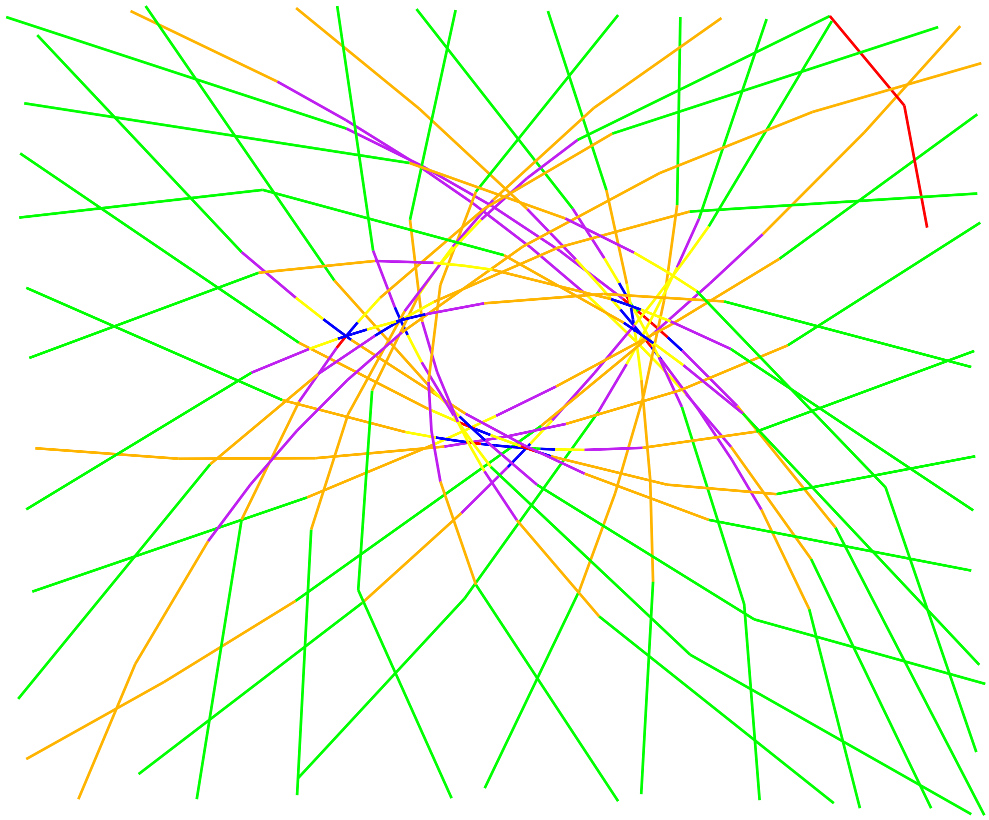


Figure V.34 C *L'arrangement de plygones support a 308 sommets*

Conclusion

Cette thèse a été consacrée à l'étude de deux des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique, l'enveloppe convexe et les arrangements, considérés pour des objets modélisant le monde réel mieux que les lignes polygonales, des objets "courbes". Nous avons commencé par introduire un objet général, la polycourbe, qui nous a permis de formaliser les propriétés demandées aux objets traités. Un cas particulier de polycourbe, construit à l'aide des courbes de Bézier, s'est situé au centre de la discution menée au fil des pages, car une ample littérature sur les courbes de Bézier nous assure de l'intérêt qui leur est porté, et aussi du fait que la modélisation par de telles courbes est suffisamment réaliste.

Le premier problème abordé a été le calcul de l'enveloppe convexe d'une polycourbe, et en particulier d'une polycourbe de Bézier. À la différence de la plupart des auteurs s'étant penchés sur le sujet, nous avons accordé la priorité aux aspects topologiques du problème, commençant par une définition rigoureuse de la notion de topologie dans notre cas. La méthode que nous avons proposée peut quand même fournir aussi une approximation (presque polygonale) de l'enveloppe convexe de la polycourbe de Bézier. Des résultats purement théoriques, mais aussi des résultats théoriques avec un grand intérêt "algorithmique" ont été donnés avant une description complète des algorithmes calculant diverses versions d'enveloppe convexe (approchée, topologique ou mixte). Les résultats numériques présentés donnent une bonne idée de la complexité des algorithmes, bien inférieure à celle obtenue par le calcul théorique de coût, et du fonctionnement de ces algorithmes.

Le deuxième problème discuté a été le calcul de l'arrangement d'un ensemble de polycourbes donné. Dans ce cas, la notion de topologie n'est pas seulement bien définie et connue, mais aussi au centre de l'attention de tous les chercheurs ayant travaillé sur les arrangements. Un rappel, qui est très bref en regard du nombre de publications sur le sujet, mais assez important dans le cadre du chapitre IV, s'est donc avéré indispensable. Rappelons ici que notre but n'a pas été de calculer la structure combinatoire d'un arrangement de polycourbes donné, mais de trouver un arrangement de lignes polygonales qui lui soit équivalent. Nous pourrons dire que ce but a été doublement atteint, car nous avons trouve deux tels arrangements de lignes polygonales qui en plus présentent de très bonnes propriétés d'encadrement de l'arrangement de polycourbes, permettant ainsi de résoudre certains problèmes sans avoir à travailler à aucun moment directement avec les courbes de Bézier. Cette deuxième partie de la thèse a la même structure que la première, les résultats théoriques applicables dans des algorithmes suivant les résultats purement théoriques et étant suivis par les algorithmes exhaustivement commentés. La thèse s'achève par des résultats numériques et exemples pour le problème des arrangements.

Ainsi, nous avons présenté dans cette thèse une méthode de résolution des problèmes de la géométrie algorithmique posés pour des objets non linéaires mettant l'accent sur les aspects topologiques de la solution fournie. Notre approche consiste à résoudre les problèmes pour des suites convergentes d'approximations polygonales des objets donnés, évitant de cette manière de traiter des (systèmes d')équations algébriques. La suite logique des travaux présentés consiste, comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, à traduire tous les algorithmes en termes d'arithmétique d'intervalle, capable, à la différence de l'arithmétique flottante que nous avons utilisée, d'assurer la cohérence topologique des résultats obtenus même dans les cas dégénérés ou presque pendant le traitement des objets linéaires.

Une extension naturelle serait aussi d'adapter les algorithmes pour autre types de courbes paramétrées contrôlées par des points, rationnelles ou polynômiales, comme mentionné dans l'introduction de la deuxième partie du chapitre un. Les résultats théoriques n'ont besoin d'aucune modification, nous avons vu que les propriétés les assurant sont partagées par toutes les familles de courbes visées : B-splines, Bézier rationnelles, NURBS.

Une autre idée intéressante nous semble ressortir des remarques faites dans la sous section IV.4.5 sur l'équivalence des arrangements de courbes qui sont bornées. Ainsi, l'équivalence semble représenter (de manière plus naturelle que les définitions déjà introduites) l'existence d'une transformation continue (et réversible) du plan superposant les deux arrangements l'un à l'autre. Cette définition aurait l'inconvénient de remplacer une notion combinatoire, donc de nature discrète (et finie), par une notion de nature continue, bien plus difficile à "algorithmiser", mais pourrait avoir un intérêt théorique, étant plus exacte.

Pendant les années de travail que cette thèse a demandés, des problèmes autres que l'enveloppe convexe et les arrangements ont été un peu étudiés à travers l'approche que nous utilisons (résoudre le problème posé pour des approximations polygonales de l'objet donné, en obtenant une approximation topologiquement cohérente de la solution). Il s'est ainsi avéré que cette méthode ne paraît pas adaptée à l'étude des sommes de Minkowski, ni, au moins pas de façon directe, à celui des diagrammes de Voronoï. Par contre, les courbes de Bézier semblent offrir une possibilité, que nous désirons explorer, concernant les bissecteurs de Voronoï.

Un problème de nature pratique s'est aussi posé dans la création des échantillons de polycourbes, respectivement d'arrangements, utilisés pour les résultats numériques, nommément le problème de la génération aléatoire "uniformément distribuée" d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés. Si générer un polygone convexe "en position générale" n'est pas une tâche très ardue, générer un deuxième tel que l'union des courbes de Bézier qu'ils définissent soit une courbe simple l'est un peu plus, et vers le cinquième polygone de contrôle d'une même polycourbe l'algorithme n'arrive plus à trouver un "bon" sans une attentive implémentation de toutes les contraintes.

Nous ne pouvons pas conclure ce document sans mentionner aussi l'intérêt et l'importance qu'une extension en trois dimensions, sinon des résultats, au moins de la méthode présentée aurait. Ceci devrait évidemment commencer par une définition rigoureuse de la "polysurface", suivie par une étude des résultats que nous cherchons, qui peut être très délicate dans la phase de définition de la topologie du problème posé.

Bibliographie

[Baj91] Bajaj, C., Kim, M.-S., *Convex Hulls of Objects Bounded by Algebraic Curves*, Algorithmica 6, 1991, 533-553.

[Ber90] Berger, M., `Géométrie`, Tome 2, 1990, Editions Nathan.

[Boi95] Boissonnat, J.-D., et Yvinec, M., `Géométrie algorithmique`, 1995, Edisciences international, Paris.

[Cal96] Calcoen, E., `Approximations polygonales d'objets convexes du plan pour la Géométrie Algorithmique`, thèse de doctorat, Universitè Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

[Cho96] Cho, W., Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., *Topological reliable approximation of composite Bézier curves*, Computer Aided Geometric Design 13, 1996, 497-520.

[Deg91] Degott, F.-R., `Partitionnement du plan par des courbes`, thèse de doctorat, Universitè Joseph Fourier, Grenoble, 1991.

[Dob83] Dobkin, D. P., et Kirkpatrick, D. G., *Fast detection of polyhedral intersection*, Theoretical Computer Science 27, 1983, 241-253.

[Dob85] Dobkin, D. P., et Kirkpatrick, D. G., *A linear algorithm for determining the separation of convex polyhedra*, Journal of Algorithms 6, 1985, 381-392.

[Dob90] Dobkin, D.P., Souvaine, D.L., *Computational Geometry in a Curved World*, Algorithmica 5, 1990, 421-457.

[Dob88] Dobkin, D.P., Souvaine, D.L., Van Wyk, C. J., *Decomposition and intersection of simple splinegons*, Algorithmica 3, 1988, 473-485.

[Ede87] Edelsbrunner, H., `Algorithms in combinatorial geometry`, 1987, Springer-Verlag, Heidelberg.

[Ede92] Edelsbrunner, H., Guibas, L., Pach, J., Seidel, R., et Sharir, M., *Arrangements of curves in the plane - topology, combinatorics, and algorithms*, Theoretical Computer Science 92, 1992, 319-336.

[Far97] Farin, G., Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide, 4ème édition, 1997, London Academic Press.

[Fio87] Fiorot, J. C., *Courbes Bézier*, Colloque Courbes et surfaces Bézier/B-splines, Rennes, mai 1987, 1-31.

[For91] Fortune, S., et Milenkovič, V., *Numerical stability of algorithms for line arrangements*, ACM Symposium on Computational Geometry, 1991, 334-341.

[Gan89] Gangnet, M., Hervé, J.-C., Pudet, T., et Van Thong, J.-M., *Incremental computation of planar maps*, Computer graphics, vol. 23, no. 3, 1989, 345-354.

[Gra83] Graham, R.L., Yao, F.F., *Finding the convex hull of a simple polygon*, Journal of Algorithms 4, 1983, 324-331.

[Grü72] Grünbaum, B., Arrangements and spreads, Conference board of the mathematical sciences, AMS, Providence, RI, no 10, 1972.

[Gui89] Guibas, L., Sharir, M., Sifrony, S., *On the general motion planning problem with two degrees of freedom*, Discrete and Computational Geometry 4, 1989, 491-521.

[Hos93] Hoschek, J., Lasser, D., Fundamentals of Computing Aided Geometric Design, 1993, A K Peters, Wellesley, Massachusetts.

[Lel96] Lelong-Ferrand, J, et Arnaudiès, J. M., Cours de mathématiques, Tome 3 : Géométrie et cinématique, 2e édition, 1996, Dunod, Paris.

[Maz91] Mazure, M.-L., *Geometric continuity and Frénet continuity of parametric curves*, rapport de recherche RR 864-M, Université J. Fourier, 1991.

[McM71] McMullen, P., Shephard, G. C., Convex polytopes and the upper bound conjecture, Lecture notes vol 3, 1971, Cambridge University Press.

[Mil89] MilenKovič, V., *Calculating approximate curve arrangements using rounded arrithmetic*, ACM Symposium on Computational Geometry, 1989, 197-207.

[Pol87] Pollack, R., Sharir, M., et Sifrony, S., *Separating two simple polygons by a sequence of translations*, Discrete and Computational Geometry 3, 1987, 123-136.

[Pre85] Preparata, F. P., et Shamos, M. I., Computational geometry: an introduction, Texts and Monographs in Computer Science, 1985, Springer-Verlag.

[Sal89] Salesin, D., Stolfi, J., Guibas, L., *Epsilon geometry: building robust algorithms from imprecise computation*, ACM Symposium on Computational Geometry, 1989, 208-217.

[Sch87] Schäffer, A., Van Wyk, C., *Convex Hulls of Piecewise-Smooth Jordan Curves*, Journal of Algorithms 8, 1987, 66-94.

[Sno89] Snoeyink, J., et Hershberger, J., *Sweeping arrangements of curves*, ACM Symposium on Computational Geometry, 1989, 354-363.

[Sou86] Souvaine, D. L., `Computational geometry in a curved world`, thèse de doctorat, Princeton University, 1986.

[VoP94] Vo Phi, K., `Contributions à l'étude des arrangements : équivalences combinatoires et perturbations`, thèse de doctorat, Universitè Joseph Fourier, Grenoble, 1994.