Chapitre IV

Arrangements de polycourbes : résultats théoriques

IV.1. Introduction

Les arrangements constituent un des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique. Leurs applications sont très nombreuses, allant de la conception de logiciels de dessin 2D [Gan89] à la localisation d'un objet dans une scène et le calcul de trajectoires, voir [Ede92]. Dans les deux chapitres suivants, nous nous intéressons uniquement aux arrangements du plan.

Les plus simples (et les plus étudiés) sont les arrangements de droites. Un grand nombre de résultats ont été donnés pour eux, aussi bien d'intérêt théorique (par exemple le théorème de la zone, [Ede86]) que d'intérêt calculatoire (l'étude de la robustesse des algorithmes, [For91]). Des études ont aussi été menées pour des objets ayant une topologie plus complexe, comme les segments [Boi95], [Pol87], [Gui89], et les courbes (de Jordan) [Ede92], [Sno89], [Gan89], [Mil89], etc. (les référence bibliographiques que nous présentons ici ne peuvent pas et ne prétendent pas être exhaustives). Nous passons brièvement en revue quelques articles qui nous ont semblé illustrer les approches généralement adoptées dans l'étude des arrangements de courbes.

Un arrangement peut être construit, principalement, de deux façons : incrémentale ou par balayage. Pour chacune, des opérations élémentaires sont nécessaires : calcul de l'intersection (de cardinal pas forcément 1) de deux courbes, calcul des tangentes verticales à une courbe, etc.

[Ede92] considère ces calculs réalisables de manière exacte et en $\mathcal{O}(1)$, les auteurs concentrant leurs efforts sur l'extension des principaux résultats théoriques des arrangements de droites aux arrangements de courbes (théorème de la zone, complexité combinatoire de l'arrangement). [Sno89] n'étudie pas directement la construction des arrangements, mais les cas où un arrangement dont les courbes se coupent au plus k fois, pour k donné, peut être balayé par une courbe ne coupant aucune de celles de l'arrangement en plus de k points. Les auteurs présentent plusieures façons de balayer un arrangement et donnent, comme application, quelques résultats combinatoires. Les primitives de calcul dont nous avon parlé sont utilisées implicitement, sans être mentionnées.

[Mil89] est consacré à la définition d'un cadre de travail rigoureux en arithmétique à précision finie, l'auteur introduisant la notion de *décomposition cylindrique approximative* du plan et décrivant un algorithme qui la construit.

[Gan89] étudie à peu près le même problème que nous allons traiter, les arrangements de courbes de Bézier, mais dans un esprit assez différent, car le but final du travail des auteurs est la construction d'un outil cohérent de dessin 2D. Ainsi, ils utilisent des approximations polygonales des courbes de Bézier, tout comme nous allons faire, mais ne s'en servent pas pour déterminer la structure combinatoire de l'arrangement de courbes et se concentrent sur le fait d'assurer que la topologie de cet arrangement de lignes polygonales est correcte (même si elle n'est pas la même que celle de l'arrangement de courbes).

La section trois de ce chapitre est consacrée aux rappels sur les arrangements de droites du plan et la section quatre présente brièvement les principaux résultats concernant les arrangements de courbes nous intéressant. Une attention toute spéciale est accordée aux résultats contenus dans la thèse de Vo Phi [VoP94], dont nous nous sommes inspirés pour la façon de poser le problème des arrangements de polycourbes.

La section cinq est dédiée aux arrangements de polycourbes, en montrant comment les notions de base peuvent être adaptées au cas de ce type d'arrangements, en particulier en ce qui concerne l'équivalence d'arrangements. Dans la première partie de la section, des critères d'équivalence de deux arrangements de polycourbes (quelconques) sont donnés, et dans la dernière sous section est prouvée l'existence d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier simple donné.

IV.2. Concentré de chapitre (IV)

Les niveaux de lecture sont plus difficiles à définir dans ce chapitre, qui contient en une bien plus grande mesure que les précédents des rappels. Ainsi, si vous très familier avec les arrangements, la troisième section peut être ignorée, tout comme une bonne partie de la quatrième. Lisez quand même les définitions IV.12 et IV.13, pour vous familiariser avec les notations. Et surtout, ne passez pas sans lire la sous section IV.4.4, présentant les résultats de Khanh Vo Phi, dont, si vous étes intéressé par les arrangements, je vous recommande de lire la thèse (pour écourter la lecture d'un chapitre, rien de tel que de recommander la lecture d'une autre thèse...).

Pour la section IV.5, je ne crois pas que plus de deux niveaux de lecture peuvent être raisonnablement trouvés. Le premier consiste à lire attentivement toute la première sous section, contenant de nombreuses définitions, et seulement les énoncés des résultats IV.23 et IV.24, en accordant le temps nécessaire à la convention de la page 147. Le deuxième niveau est celui de la lecture intégrale.

IV.3. Bref rappel sur les arrangements d'hyperplans

La notion d'arrangement est définie pour un ensemble fini d'hyperplans de l'espace affine E^d, mais nous donnerons ici les définitions et les principales propriétés uniquement pour $d = 2$, donc pour les arrangements de droites du plan. Une présentation complète du cas général peut facilement être trouvée dans la littérature (par exemple [Ede87]).

IV.3.1. *Définitions concernant les arrangements de droites*

Définition IV.1. – *Un ensemble fini de droites $\mathcal{D}$ dans le plan définit un découpage de ce plan en un ensemble de parties connexes de dimension* 0, 1 *ou* 2*. Ce découpage s'appelle l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de l'ensemble $\mathcal{D}$.*

Définition IV.2. –

1. *Les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ s'appellent les faces de l'arrangement.*
2. *Les éléments de dimension* 0 *de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ s'appellent sommets de l'arrangement.*
3. *Les éléments de dimension* 1 *s'appellent arêtes de l'arrangement.*
4. *Les éléments de dimension* 2 *représentent les cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$.*

Définition IV.3. – *Soient f_1 et f_2 deux faces de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Nous dirons que f_2 est une sous-face de f_1 si et seulement si la dimension de f_2 est égale à la dimension de f_1 moins 1 et si f_2 est incluse dans la frontière (topologique) de f_1. Les faces f_1 et f_2 sont alors dites incidentes, ou elles définissent une incidence.*

Une notion fondamentale dans les résultats présentés par Edelsbrunner [Ede87] est celle de *vecteur de position* d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Pour pouvoir l'introduire, le *demi-plan positif* et le *demi-plan négatif* doivent être définis pour toute droite du plan. Il existe plusieurs manières d'établir les demi-plans positif et respectivement négatif déterminés par une droite donnée, dépendant de la représentation choisie pour la droite. Par exemple, si une droite Δ est donnée par l'équation

$$(\Delta)\ :\ ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \in I\!R \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

nous posons $\Delta^+ = \{\mathrm{P}(x, y) \in I\!R^2 \mid ax+by+c > 0\}$ le demi-plan positif et $\Delta^- = \{\mathrm{P}(x, y) \in I\!R^2 \mid ax + by + c < 0\}$ le demi-plan négatif déterminé par Δ. Cette définition est utilisée par Vo Phi [VoP94]. Si Δ est une droite non-verticale donnée par l'équation

$$(\Delta)\ :\ y = ax + b \qquad a, b \in I\!R$$

nous pouvons poser $\Delta^+ = \{\mathrm{P}(x, y) \in I\!R^2 \mid y > ax + b\}$ le demi-plan positif et $\Delta^- = \{\mathrm{P}(x, y) \in I\!R^2 \mid y < ax + b\}$ le demi-plan négatif déterminés par Δ, celle-ci étant la définition utilisée par Edelsbrunner [Ede87]. Nous mentionnons encore une façon de fixer les demi-plans positif et négatif définis par une droite Δ ne passant pas par l'origine, qui ne dépend pas de la représentation de la droite, mais de la position de l'origine du plan : le demi-plan Δ^+ sera celui qui ne contient pas l'origine et le demi-plan Δ^- sera celui qui la contient.

Remarque. Dans ce chapitre, pour toutes les figures présentant des exemples faisant intervenir des vecteurs de position c'est cette dernière définition des régions positive et négative déterminées par une droite qui a été utilisée.

Supposons que la façon de définir Δ^+ et Δ^- est fixée pour toute droite Δ et soit $\mathcal{D} = \{\Delta_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de droites du plan, pour n un entier positif. Pour tout point P nous posons

$$v_{\Delta_i}(\mathrm{P}) = \begin{cases} +1 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i^+ \\ \ \ 0 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i \\ -1 & \text{si } \mathrm{P} \in \Delta_i^- \end{cases}$$

Définition IV.4. – *Le vecteur de position d'un point* P *par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est*

$$V_{\mathcal{D}}(\mathrm{P}) = (v_{\Delta_1}(\mathrm{P}), v_{\Delta_2}(\mathrm{P}), \ldots, v_{\Delta_n}(\mathrm{P}))$$

L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ peut alors être considéré comme l'ensemble des plus grandes parties connexes de $I\!R^2$ dont les points ont le même vecteur de position.

Définition IV.5. – *Le vecteur de position $V_{\mathcal{D}}(f)$ d'une face f de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est défini comme étant égal au vecteur de position $V_{\mathcal{D}}(\mathrm{P})$ d'un point* P *quelconque de f.*

Nous nous intéressons particulièrement aux arrangements introduits par la définition suivante :

Définition IV.6. – *Nous dirons qu'un arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est simple si et seulement si deux droites quelconques de $\mathcal{D}$ ont exactement un point en commun et trois droites quelconques de $\mathcal{D}$ sont disjointes.*

La figure IV.1 présente des exemples d'arrangements du plan.

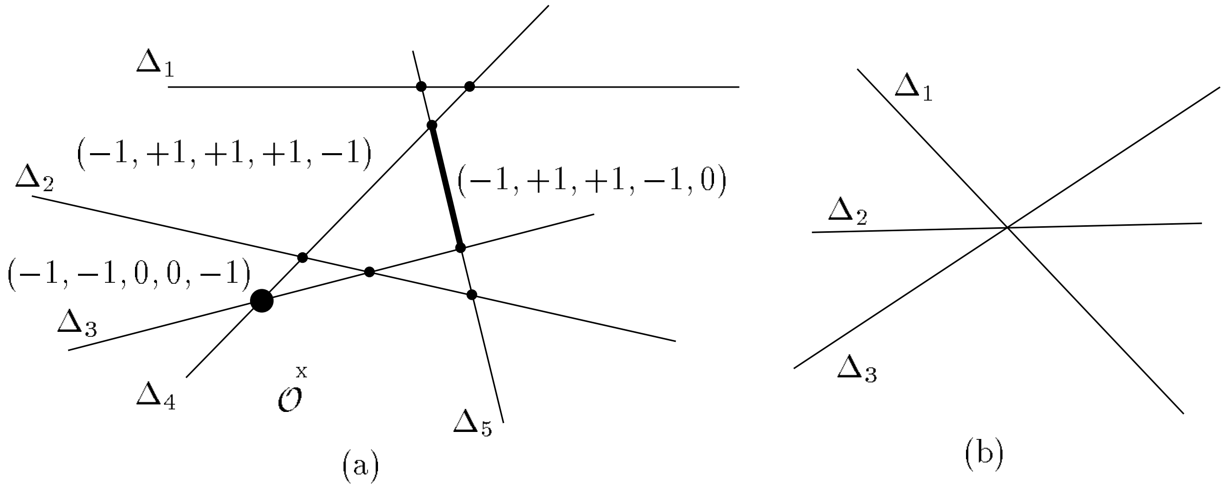

Figure IV.1 (a) *arrangement simple de cinq droites et quelques vecteurs de position ;* (b) *arrangement non-simple de trois droites*

IV.3.2. *Propriétés des vecteurs de position*

Quelques relations très intuitives relient les dimensions des faces et leurs vecteurs de position. Ainsi, toute cellule c a la propriété $v_{\Delta_i}(c) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour toute arête a, il existe un indice i_a tel que $v_{\Delta_{i_a}}(a) = 0$. Si toutes deux droites de l'ensemble $\mathcal{D}$ sont distinctes, alors l'indice i_a est unique et $v_{\Delta_i}(a) \neq 0$ pour tout $i \neq i_a$. Si s est un sommet, il existe deux indices $i_1 \neq i_2$ tel que $v_{\Delta_{i_1}}(s) = v_{\Delta_{i_2}}(s) = 0$, et si toutes trois droites de $\mathcal{D}$ sont disjointes, alors $v_{\Delta_i}(s) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$. Par conséquent, si $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est simple, la face f sera une cellule si et seulement si il n'y a aucun zéro dans l'écriture de son vecteur de position, elle sera une arête s'il y a exactement un zéro dans l'écriture de son vecteur de position et elle sera un sommet s'il y a exactement deux zéros dans l'écriture de son vecteur de position.

Nous pouvons facilement remarquer que les arrangements simples de droites satisfont la condition

$$f_1 \neq f_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow V_{\mathcal{D}}(f_1) \neq V_{\mathcal{D}}(f_2) \qquad \text{(IV.1)}$$

Il en résulte l'affirmation suivante [VoP94] :

Propriété IV.7. – *Soient f_1 et f_2 deux faces de l'arrangement simple $\mathcal{A}(\mathcal{D})$. Alors f_2 est une sous-face de f_1 si et seulement si il existe un unique indice i_0 tel que*

$$v_{\Delta_{i_0}}(f_1) \neq 0, \quad v_{\Delta_{i_0}}(f_2) = 0 \quad \text{et} \quad v_{\Delta_i}(f_2) = v_{\Delta_i}(f_1) \ \forall i \neq i_0$$

IV.3.3. *Équivalence d'arrangements*

Définition IV.8. – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles de droites du plan ayant le même cardinal et soit $F : \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$.*

1. *Nous dirons que F conserve les dimensions des faces si et seulement si l'image par F d'un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ est un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$, l'image d'une arête est une arête et l'image d'une cellule est une cellule.*
2. *Nous dirons que F conserve les vecteurs de position si et seulement si $V_{\mathcal{D}_1}(f) = V_{\mathcal{D}_2}(F(f))$ pour toute face f de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$.*
3. *Nous dirons que F conserve les incidences si et seulement si pour toutes deux faces f_1 et f_2 de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ nous avons*

$$f_2 \text{ sous-face de } f_1 \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \Longleftrightarrow F(f_2) \text{ sous-face de } F(f_1) \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$$

Des définitions tout-à-fait similaires seront valables pour les arrangements de courbes, donc aussi pour les arrangements de polycourbes, et nous ne les donnerons plus. Nous rappelons deux définitions de l'équivalence (combinatoire) de deux arrangements qui peuvent être trouvées dans la littérature, l'une donnée par Grünbaum et l'autre par Edelsbrunner.

Définition [Grü72] **IV.9.** – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles finis de droites du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(IV.9.i) $\mathrm{card}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_2)$;
(IV.9.ii) *il existe une fonction bijective $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ qui conserve les incidences.*

Définition [Ede87] **IV.10.** – *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux ensembles finis de droites du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(IV.10.i) $\mathrm{card}(\mathcal{D}_1) = \mathrm{card}(\mathcal{D}_2)$;
(IV.10.ii) *il existe une fonction bijective $\psi : \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ qui conserve les dimensions des faces et leurs vecteurs de position.*

Il n'est pas difficile à voir que dans le cas des arrangements de droites du plan la condition d'invariance de la dimension des faces par la fonction ψ de la définition IV.10 résulte de l'invariance des vecteurs de position. Plus, si l'un des arrangements est simple, l'autre le sera aussi et φ garde les incidences :

Propriété IV.11. – *Si deux arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents au sens de la définition IV.10, alors pour deux faces quelconques f_1 et f_2 de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ telles que f_2 soit une sous-face de f_1 $\psi(f_2)$ sera une sous-face de $\psi(f_1)$ dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$, où ψ est la fonction donnée par (IV.10.ii).*

La preuve de ce résultat découle immédiatement de la propriété IV.7 et de l'invariance des vecteurs de position par la fonction ψ. Il est aussi facile à montrer que si deux arrangements sont équivalents par la définition IV.9, alors la simplicité de l'un entraînera la simplicité de l'autre, et que la fonction φ de cette définition garde elle aussi les dimensions des faces.

Ainsi, dans le cas des arrangements de droites la définition de [Grü72] est plus générale que celle de [Ede87], qui l'implique. Elle est aussi "plus intrinsèque", indépendante du système de coordonnées du plan, fait reflété par le comportement des arrangements soumis à des transformations élémentaires du plan : translations, rotations, homoteties. Soit $\mathcal{D}_1$ un ensemble de droites et $\mathcal{D}_2$ son image par une telle transformation. Si nous pouvons facilement voir que $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ sont équivalents au sens de la définition IV.9, quelle que soit la transformation appliquée, ce n'est plus le cas, généralement, si nous considérons la définition IV.10. Pour chacune des manières (dont nous avons parlé dans le paragraphe IV.3.1) de définir les demi-plans positif et négatif déterminés par une droite donnée il existe des translations qui ne gardent pas l'équivalence des arrangements. Le même phénomène se produit pour les deux premières façons de définir Δ^+ et Δ^- pour une droite Δ donnée en ce qui concerne les rotations, pour n'importe quel centre de rotation nous pouvons trouver des angles de rotation qui font que l'arrangement obtenu après rotation ne soit pas équivalent à l'arrangement initial. Par contre, pour la troisième façon de définir Δ^+ et Δ^- il existe des centres de rotation (parmi lesquels l'origine) qui ne fourniront pas un nouvel arrangement, indépendamment de l'angle de rotation choisi. Enfin, pour les homotheties il existe pour chacune des manières de définir les deux demi-plans exactement un point, l'origine, pour lequel n'importe quel rapport d'homothetie laisse invariante la classe d'équivalence de l'arrangement.

IV.4. Généralités sur les arrangements de courbes

Dans la littérature, le problème de l'arrangement d'un ensemble de courbes est généralement posé pour des courbes simples qui sont soit fermées, soit non-bornées [Ede87], [Sno89], [Mil89], [VoP94]. Quand des courbes bornées et non-fermées sont traitées, l'approche utilisée consiste à "dédoubler" la courbes, obtenant ainsi une courbe fermée, voir par exemple [Ede92]. Une courbe Γ non-bornée ou fermée garde une propriété des droites qui est essentielle à la définition des vecteurs de position des points du plan et par conséquent des faces, le fait que l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ a exactement deux parties connexes. Nous pouvons ainsi définir pour la courbe Γ les régions Γ^+ et Γ^- sans ambiguïté. Toutes les courbes dont nous parlerons dans cette section seront fermées ou non bornées, sans que nous en faisions la précision à chaque fois.

Une autre propriété des droites, qui n'est non plus partagée automatiquement par les courbes, est l'existence d'une borne supérieure pour le nombre de points que l'intersection de deux droites distinctes peut avoir (en l'occurrence, cette borne est 1). Cette propriété garantit que l'arrangement a un nombre finit de faces et permet des études de nature combinatoire. Par contre, deux courbes peuvent avoir une infinité de points d'intersection, ce qui impliquera un nombre infini de faces pour l'arrangement les contenant ; nous imposons alors que toutes deux courbes distinctes se coupent en au plus $\alpha \geq 1$ points.

IV.4.1. *Définitions, vecteurs de position*

Soit $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un ensemble de courbes planes (fermées ou non bornées) tel que $\mathrm{card}(\Gamma_i \cap \Gamma_j) \leq \alpha$, pour un $\alpha \geq 1$ fixé. La définition de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est bien sûr identique à celle d'un arrangement de droites, ainsi que les définitions des faces de dimensions 0, 1 et 2.

Pour définir le vecteur de position d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\Gamma)$, nous devons définir pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ les ensembles Γ_i^+ et Γ_i^-, chacun étant connexe et tels que $\Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^- = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_i$. Des définitions utilisables pour les droites que nous avons mentionnées dans la sous section IV.3.1, seulement la troisième peut être utilisée pour les courbes aussi, si nous demandons comme condition supplémentaire qu'aucune des courbes de l'ensemble $\mathcal{G}$ ne passe pas par l'origine. Une autre définition possible des régions Γ^+ et Γ^-, pour une courbe Γ donnée, repose sur la notion d'orientation de Γ, qui est bien définie si nous supposons que Γ est une courbe paramétrique. Ainsi, nous définirons Γ^+ comme étant celle des deux régions connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_i$ se trouvant à gauche quand on parcourt Γ dans le sens donné par son orientation, et Γ^- comme celle se trouvant à droite. Cette dernière définition est invariante par les transformations géométriques élémentaires du plan mentionnées dans la section IV.3.3 (translation, rotation, homotetie), mais elle ne l'est pas par un changement de paramétrisation de Γ ne préservant pas l'orientation.

Une fois les régions Γ_i^+ et Γ_i^- définies pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la notion de vecteur de position d'un point P du plan par rapport à l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est similaire à celle de vecteur de position relatif à un arrangement de droites, et de même pour la notion de vecteur de position d'une face. L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ pourra alors être considéré comme l'ensemble des plus grandes parties connexes de $\mathbb{R}^2$ dont tous les points ont le même vecteur de position.

Quelle que soit la manière de définir Γ^+ et Γ^- utilisée, nous nous servons de ces deux régions du plan pour introduire (ou redéfinir) la notion de sens de parcours de la courbe Γ :

Définition IV.12. – *Si* P_1 *et* P_2 *sont deux points distincts de* Γ, *nous dirons que* Γ *est parcourue en sens positif de* P_1 *à* P_2 *si* Γ^+ *se trouve à gauche du parcours et en sens négatif si* Γ^+ *se trouve à droite.*

Évidemment, si les courbes Γ_i de l'arrangement avaient déjà une orientation associée et si nous nous en sommes servis pour définir Γ_i^+ et Γ_i^-, cette nouvelle définition n'a pas beaucoup de sens. Mais si une autre manière de définir Γ_i^+ et Γ_i^- a été utilisée, la définition n'est pas triviale, nous remarquons même que certaines courbes, si elles étaient données paramétriquement, devront être reparamétrisées par un changement ne préservant pas l'orientation (si par exemple nous avons utilisé pour définir Γ_i^+ et Γ_i^- la position de l'origine par rapport à la courbe et si l'origine se situe à gauche de la courbe du point de vue de son orientation initiale).

IV.4.2. *Arrangements simples*

Deux notations nous seront nécessaires par la suite. Si Γ est une courbe pour laquelle le sens de parcours a été défini (ce que nous considérons être le cas pour toutes les courbes intervenant à partir de maintenant) et $\mathrm{P} \in \Gamma$, nous notons $\Gamma(\mathrm{P}^-)$ l'ensemble des points $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}$ de Γ tels que Γ soit parcourue en sens positif de P_1 à P et $\Gamma(\mathrm{P}^+) = \Gamma \backslash \big(\Gamma(\mathrm{P}^-) \cup \{\mathrm{P}\}\big)$.

Si Γ est une courbe et $\mathrm{P} \notin \Gamma$ est un point, nous notons $\mathcal{R}(\Gamma, \mathrm{P})$ celle des régions Γ^+ et Γ^- qui contient P.

La notion de simplicité pour les arrangements de courbes est nécessairement plus forte que celle pour les arrangements de droites, car les polycourbes ont moins de “bonnes” propriétés que les droites.

Définition IV.13. – *Soit $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de courbes. Nous dirons que $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est un arrangement simple si et seulement si*

(IV.13.i) $\Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$ *pour tous* $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *distincts ;*

(IV.13.ii) *si* $\mathrm{P} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$, *il existe* $\mathrm{P}_1 \in \Gamma_i(\mathrm{P}^-)$ *et* $\mathrm{P}_2 \in \Gamma_i(\mathrm{P}^+)$ *tels que* $\Gamma_i\big|_{]\mathrm{P}_1,\mathrm{P}[} \cap \Gamma_j = \emptyset$, $\Gamma_i\big|_{]\mathrm{P},\mathrm{P}_2[} \cap \Gamma_j = \emptyset$ *et* $\mathcal{R}(\Gamma_j, \mathrm{P}_1) \neq \mathcal{R}(\Gamma_j, \mathrm{P}_2)$, *et symétriquement pour* j *;*

(IV.13.iii) *si* $\mathrm{P} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$, *il n'existe pas de tangente commune des polycourbes* Γ_i *et* Γ_j *en* P *;*

(IV.13.iv) *l'ensemble* $\cup_{i=1}^n \Gamma_i$ *est connexe.*

Les conditions (IV.13.ii) et (IV.13.iii) signifient qu'en chaque point commun deux courbes se traversent selon un angle non-nul. Par la suite, nous travaillerons uniquement sur des arrangements simples, sans le préciser à chaque fois.

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de droites tel que $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ soit simple, alors une face f de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ n'est pas seulement une partie connexe de $\mathbb{R}^2$ maximale du point de vue de l'inclusion des ensembles et dont tous les points ont un même vecteur de position, mais aussi l'ensemble de *tous* les points du plan ayant ce vecteur de position. Cette propriété est due au fait que deux droites distinctes de $\mathcal{D}$ ont exactement un point en commun. Ainsi, deux faces distinctes de $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ auront des vecteurs de position distincts. Par contre, si $\mathcal{G}$ est un ensemble de courbes, deux courbes distinctes peuvent avoir plus d'un point commun et la conséquence est qu'il peut exister dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ plusieurs faces distinctes ayant le même vecteur de position (car nous ne considérons pas de faces non connexes). La figure suivante présente un exemple très simple où cette situation survient.

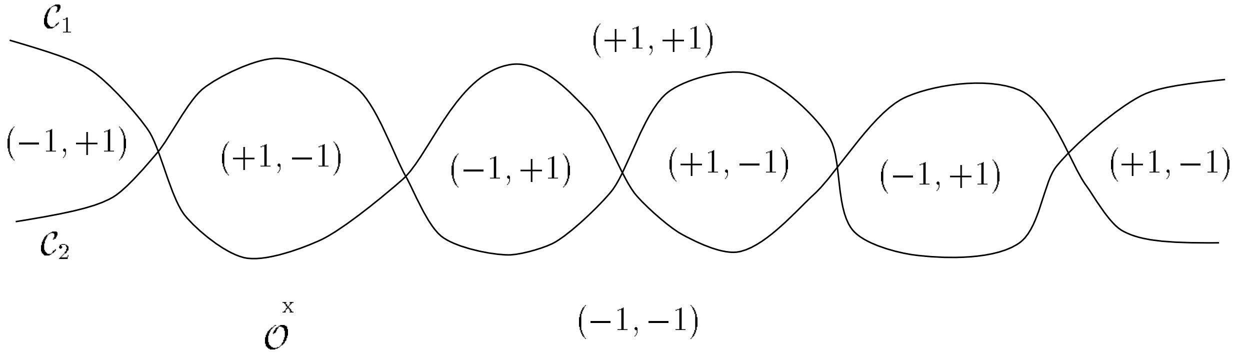

Figure IV.2

Ainsi, la propriété IV.7 n'est généralement pas satisfaite par les arrangements de courbes. La propriété similaire qui est vérifiée par ces arrangements est la suivante :

Propriété IV.14. – *Soit $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ un arrangement (simple) de courbes, $\mathcal{G} = \{\Gamma_i\}_{i=1}^n$, et soient f_1 et f_2 deux de ses faces.*

1. *Si f_2 est une sous-face de f_1, il existe un unique $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $v_{\Gamma_{i_0}}(f_1) \neq 0$, $v_{\Gamma_{i_0}}(f_2) = 0$ et $v_{\Gamma_i}(f_1) = v_{\Gamma_i}(f_2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$.*
2. *S'il existe un unique $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $v_{\Gamma_{i_0}}(f_1) \neq 0$, $v_{\Gamma_{i_0}}(f_2) = 0$ et $v_{\Gamma_i}(f_1) = v_{\Gamma_i}(f_2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$, il existe une face f_1' telle que $V_{\mathcal{G}}(f_1') = V_{\mathcal{G}}(f_1)$ et f_2 soit une sous-face de f_1'.*

IV.4.3. *Équivalence d'arrangements de courbes*

L'équivalence de deux arrangements de courbes peut être définie de plusieurs façons, les deux que nous discuterons étant les extensions immédiates des définitions IV.9 et IV.10. Mais, la propriété IV.14 étant plus faible que la propriété IV.7, IV.10 n'implique plus de manière directe IV.9, car la fonction ψ de la condition (IV.10.ii) ne conserve plus forcément les incidences. Pour les deux arrangements de la figure IV.3, où $\mathcal{G}^i = \{\Gamma_1^i, \Gamma_2^i\}$ pour $i = 1, 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
V_{\mathcal{G}^1}(s_1^1) = V_{\mathcal{G}^1}(s_2^1) = V_{\mathcal{G}^2}(s_1^2) = V_{\mathcal{G}^2}(s_2^2) &= (0, 0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_1^1) = V_{\mathcal{G}^1}(a_3^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_1^2) = V_{\mathcal{G}^2}(a_3^2) &= (0, +1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_2^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_2^2) &= (0, -1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_4^1) = V_{\mathcal{G}^1}(a_6^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_4^2) = V_{\mathcal{G}^2}(a_6^2) &= (-1, 0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(a_5^1) = V_{\mathcal{G}^2}(a_5^2) &= (+1, 0)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_2^1) = V_{\mathcal{G}^1}(c_4^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_2^2) = V_{\mathcal{G}^2}(c_4^2) &= (-1, +1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_1^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_1^2) &= (-1, -1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_3^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_3^2) &= (+1, -1)\\
V_{\mathcal{G}^1}(c_5^1) = V_{\mathcal{G}^2}(c_5^2) &= (+1, +1)
\end{aligned}$$

En prenant la fonction ψ telle que $\psi(c_2^1) = c_4^2$, $\psi(c_4^1) = c_2^2$ et $\psi(s_i^1) = s_i^2$ pour $i = 1, 2$, $\psi(a_i^1) = a_i^2$ pour $1 \leq i \leq 6$ et $\psi(c_i^1) = c_i^2$ pour $i = 1, 3, 5$, les propriétés de la définition IV.14 sont satisfaites, mais a_1^1 est une sous-face de c_2^1 et $a_1^2 = \varphi(a_1^1)$ n'est pas une sous-face de $c_4^2 = \varphi(c_2^1)$.

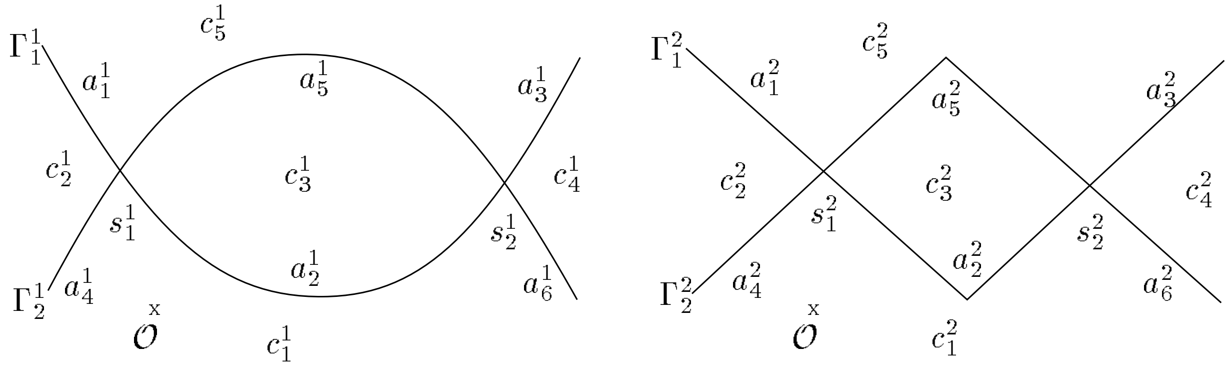

Figure IV.3

À la différence des arrangements de droites, la simplicité d'un arrangement de courbes n'implique pas la simplicité de tout arrangement de courbes qui lui est équivalent, à cause de la condition (IV.13.iii), raison pour laquelle nous ne considérerons que des arrangement simples. Dans ce cas, l'invariance de la dimension des faces par la fonction ψ, pour la définition IV.10, résulte, comme dans le cas des droites, de l'invariance des vecteurs de position. Pour la première définition de l'équivalence, le résultat similaire apparaît dans la sous section suivante.

IV.4.4. *Équivalence d'arrangements et ordre des intersections*

Dans cette section, nous présentons brièvement quelques résultats de Vo Phi [VoP94] sur les arrangements de courbes du plan, car ils nous seront nécessaires dans l'étude des arrangements de polycourbes de Bézier.

La définition que Vo Phi utilise pour l'équivalence de deux arrangements de courbes est celle de Grünbaum, IV.9, que nous reformulons ici pour des ensembles de courbes :

Définition IV.15. – *Soient $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ deux ensembles finis de courbes du plan. Nous dirons que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont équivalents si et seulement si*
(IV.15.i) $\mathrm{card}(\mathcal{G}^1) = \mathrm{card}(\mathcal{G}^2)$ *;*
(IV.15.ii) *il existe une fonction bijective $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ qui conserve les incidences.*

Vo Phi prouve facilement que la fonction φ de cette définition conserve aussi les dimensions des faces.

Supposons que les ensembles $\mathcal{G}^1$ et $\mathcal{G}^2$ sont indexés sur un ensemble d'indices I : $\mathcal{G}^1 = \{\Gamma_i^1\}_{i\in \mathrm{I}}$ et $\mathcal{G}^2 = \{\Gamma_i^2\}_{i\in \mathrm{I}}$. Un premier résultat sur l'équivalence des arrangements est donné par le théorème suivant [VoP94] :

Théorème IV.16. – *Si les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont simples et équivalents et $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ est une bijection gardant les incidences, alors il existe σ une permutation de* I *telle que*
(IV.16.i) *$f \subset \Gamma_i^1$ si et seulement si $\varphi(f) \subset \Gamma_{\sigma(i)}^2$ pour toute face f de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et pour tout $i \in \mathrm{I}$;*
(IV.16.ii) $\mathrm{card}(\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1) = \mathrm{card}(\Gamma_{\sigma(i)}^2 \cap \Gamma_{\sigma(j)}^2)$ *pour tous $i \neq j \in \mathrm{I}$;*
(IV.16.iii) *Γ_i^1 est fermée si et seulement si $\Gamma_{\sigma(i)}^2$ est fermée ;*
(IV.16.iv) *Soient s_1 et s_2 deux sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ situés sur la courbe Γ_i^1. Alors $s_2 \in \Gamma_i^1(s_1^-)$ si et seulement si $\varphi(s_2) \in \Gamma^2(\varphi(s_1)^-)$.*

Dans la suite, nous considérons que l'ensemble $\mathcal{G}^2$ a été renuméroté de telle manière que la permutation σ du théorème précédent soit la permutation identique. La condition (IV.16.iv) implique tout de suite que si nous considérons l'ensemble de tous les sommets $s \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ tels que $v_{\Gamma_i^1}(s) = 0$ pour un i quelconque fixé de I, alors l'ordre de ces sommets sur la courbe Γ_i^1 et l'ordre de leurs images par la fonction φ sur la courbe Γ_i^2 seront identiques. En fait, (IV.16.iv) est équivalente à la condition d'ordre identique des sommets respectivement sur Γ_i^1 et sur Γ_i^2, car il est facile à voir que si (IV.16.iv) n'est pas satisfaite l'autre condition ne peut pas non plus être vérifiée.

Ainsi, pour chaque classe d'équivalence d'arrangements le nombre et l'ordre des sommets sur respectivement chacune des courbes est le même pour tout arrangement membre de la classe. Le résultat principal de Vo Phi consiste à prouver que, sous certaines hypothèses qui ne sont pas trop restrictives, la réciproque de cette affirmation est vraie aussi, c'est-à-dire le nombre et l'ordre des sommets respectivement sur les courbes d'un arrangement déterminent de manière unique la classe d'équivalence de cet arrangement. Plus précisément, il a démontre que deux arrangements pour lesquels les conditions (IV.16.ii) et (IV.16.iv) sont satisfaites sont équivalents, sous certaines hypothèses, aussi bien au sens de la définition IV.15 qu'au sens de la définition IV.10.

Définition IV.17. – *Soient $s_1, \ldots, s_k$ des sommets d'un arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ situés tous sur la courbe $\Gamma_i \in \mathcal{G}$. Nous dirons que ces sommets sont positivement (respectivement négativement) ordonnés sur Γ_i si et seulement si $s_h \in \Gamma_i(s_{h+1}^-)$ pour tout $h \in \{1, \ldots, k-1\}$ (respectivement $s_h \in \Gamma_i(s_{h+1}^+)$ pour tout $h \in \{1, \ldots, k-1\}$).*

Il résulte immédiatement que si $s_1, \ldots, s_k$ sont positivement ordonnés sur Γ_i, alors $s_j \in \Gamma_i(s_h^-)$ pour tout $h \in \{2, \ldots, k\}$ et $j \in \{1, \ldots, h-1\}$.

Les hypothèses de travail que nous avons mentionnées sont les suivantes :

(h1) $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ sont simples et $\mathrm{card}(\mathrm{I}) = n \geq 3$.

(h2) il existe une bijection φ_0 entre les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et ceux de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ vérifiant

- (h2.1) $s \in \Gamma_i^1$ si et seulement si $\varphi_0(s) \in \Gamma_i^2$ pour tout sommet s de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et tout $i \in \mathrm{I}$;
- (h2.2) Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soient $s_1, \ldots, s_k$ tous les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ situés sur Γ_i^1. Si $k \geq 2$, alors pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ $s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(k)}$ sont positivement ordonnés sur Γ_i^1 si et seulement si $\varphi_0(s_{\sigma(1)}), \ldots, \varphi_0(s_{\sigma(k)})$ sont positivement ordonnés sur Γ_i^2.

(h3) Pour tous $i, j \in \mathrm{I}$, si $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1 = \emptyset$, alors $\Gamma_i^1 \subset \Gamma_j^{1+}(\Gamma_i^1 \subset \Gamma_j^{1-})$ si et seulement si $\Gamma_i^2 \subset \Gamma_j^{2+}(\Gamma_i^2 \subset \Gamma_j^{2-})$.

Le résultat concernant l'équivalence des arrangements s'énonce alors comme suit :

Théorème [VoP94] **IV.18.** – *Soient $\mathcal{G}^1 = \{\Gamma_i^1\}_{i\in\mathrm{I}}$ et $\mathcal{G}^2 = \{\Gamma_i^2\}_{i\in\mathrm{I}}$ deux ensembles de courbes telles que les hypothèses (h1), (h2) et (h3) soient satisfaites. Alors il existe une unique fonction bijective $\varphi : \mathcal{A}(\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}^2)$ vérifiant*

(IV.18.i) *φ conserve les incidences ;*

(IV.18.ii) *$\varphi(s) = \varphi_0(s)$ pour tout sommet s de $\mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$;*

(IV.18.iii) *$f \subset \Gamma_i^1 \Longleftrightarrow \varphi(f) \subset \Gamma_i^2$, pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et tout $i \in \mathrm{I}$.*

Ce résultat est complété par le théorème suivant [VoP94] :

Théorème IV.19. – *Dans les hypothèses du théorème précédent, supposons qu'en plus l'affirmation suivante est vérifiée :*

(h.4) *(Il existe $i, j \in \mathrm{I}$ tels que $\Gamma_i^1 \cap \Gamma_j^1 = \emptyset$)*

OU

(Il existe un sommet $s \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $i_0 \in \mathrm{I}$ tels que $v_{\Gamma_{i_0}^1}(s) = v_{\Gamma_{i_0}^2}(\varphi_0(s)) \neq 0$)

Alors $V_{\mathcal{G}^1}(f) = V_{\mathcal{G}^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$.

Les deux théorèmes précédents nous disent que si les hypothèses (h1) jusqu'à (h4) sont vérifiées, alors les deux arrangements sont équivalents dans le sens de la définition IV.10, tandis que si seulement les hypothèses (h1) jusqu'à (h3) sont satisfaites, alors les arrangements seront équivalentes uniquement au sens de la définition IV.15. Vo Phi montre que si deux arrangements sont équivalents au sens de la définition IV.15, alors nous aurons soit $V_{\mathcal{G}^1}(f) = V_{\mathcal{G}^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$, soit $v_{\Gamma_i^1}(f) = -v_{\Gamma_i^2}(\varphi(f))$ pour toute face $f \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et $i \in \mathrm{I}$. Les hypothèses (h4) et (h3) nous assurent qu'il existe au moins une face $f_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{G}^1)$ et un indice $i_0 \in \mathrm{I}$ tels que $v_{\Gamma_{i_0}^1}(f_0) = v_{\Gamma_{i_0}^2}(\varphi(f_0))$, et par conséquent si (h4), en plus de (h1), (h2), (h3), est satisfaite, alors la fonction φ du théorème IV.18 conserve les vecteurs de position.

Nous pouvons maintenant remarquer que si les hypothèses (h1), (h3) et (h4) sont vérifiées, alors la définition IV.10 de l'équivalence de deux arrangements est équivalente à la définition IV.15 utilisée par Vo Phi, car cette dernière implique, par le théorème IV.16, l'hypothèse (h2), et (h1), (h2), (h3) et (h4) impliquent IV.10.

IV.4.5. *Équivalence : dans le plan ou sur la sphère ?*

Avant de passer à la discution sur les arrangements de polycourbes, regardons les deux arrangements de la figure IV.4 : nous ne dirions pas, à la première vue, qu'ils sont équivalents. Pourtant, en faisant l'étude des sommets, arêtes et cellules, il résulte facilement qu'ils le sont, au sens de la définition de Grünbaum. À la cellule hachurée du premier arrangement correspond la cellule non bornée du second, tandis qu'à la cellule non bornée du premier arrangement correspond celle qui est hachurée dans le deuxième.

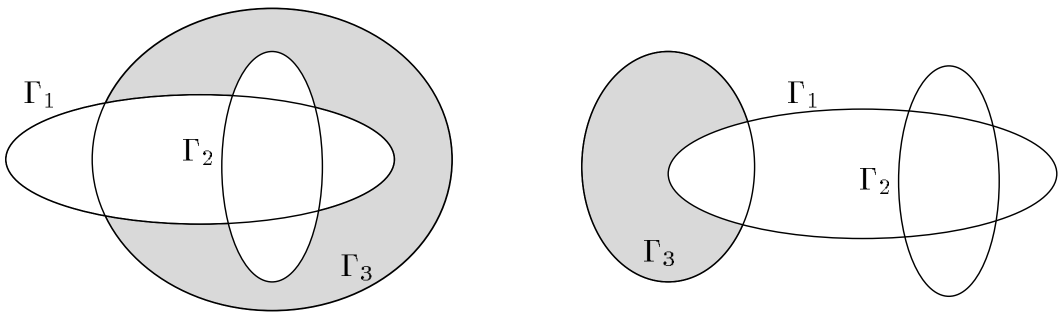

Figure IV.4 *Ces deux arrangements sont équivalents*

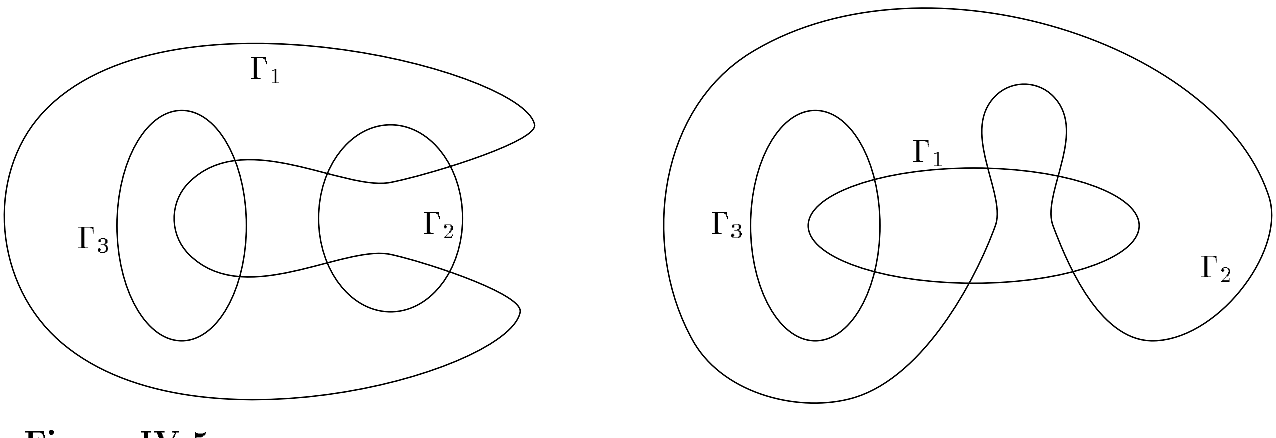

Figure IV.5

L'équivalence des deux arrangements persiste si nous utilisons la définition donnée par Edelsbrunner en définissant Γ^+ et Γ^- d'après la position de l'origine par rapport à la courbe Γ, à condition de positionner l'origine dans la cellule hachurée pour l'un des arrangements et dans la cellule non bornée pour l'autre. Il existe quand même des définitions possibles pour Γ^+ et Γ^- telles que les deux arrangements ne soient plus équivalentes au sens de la définition IV.10 ; par exemple, si pour toute courbe fermée Γ^+ est la région non bornée des deux régions connexes délimitées par Γ et Γ^- est la région bornée.

Remarquons qu'en "plaçant" les deux arrangements de la figure sur la sphère, leur équivalence devient très naturelle (et en accord avec le "bon sens géométrique"). Les deux arrangements de la figure IV.5 seront eux aussi équivalents aux deux précédents, et en raisonant sur la sphère nous pouvons trouver tous les arrangements "visuellement différents" qui sont, conformément à la définition IV.15, équivalents à ceux de la figure IV.4.

IV.5. Arrangements de polycourbes de Bézier

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le calcul exact d'un arrangement de courbes ne peut pas se faire sans la résolution des systèmes d'équations algébriques qui peuvent être de degré élevé. Les imprécisions des résultats numériques de ces systèmes peuvent conduire à des contradictions dans la topologie et la combinatoire de l'arrangement, par exemple par l'inversion des positions des deux sommets successifs sur une des courbes de l'arrangement.

Dans cette section, nous étudions les arrangements de polycourbes de Bézier, en nous posant non pas la question du calcul d'un tel arrangement, mais celle de la construction d'un arrangement de lignes polygonales qui lui soit équivalent dans le sens de la définition IV.15. Le calcul exact d'un arrangement de lignes polygonales, tout en étant d'une complexité bien supérieure à celle du calcul d'un arrangement de droites, ne fait pas intervenir des équations de degré supérieur à un et par conséquent peut être considéré comme réalisable de manière exacte. Mais avant de passer aux polycourbes de Bézier, une discussion sur les arrangements de polycourbes (quelconques) s'impose.

IV.5.1. *Arrangements de polycourbes*

Nous avons vu que toutes les courbes considérées dans l'étude sur les arrangements de courbes sont soit fermées, soit non bornées, et définissent par conséquent une partition du plan en deux régions ouvertes connexes disjointes. Les polycourbes qui ne sont pas fermées n'ont pas cette propriété, car les polycourbes sont toujours des compacts, donc bornées ; par exemple l'arrangement présenté dans la figure IV.6 a une seule cellule.

Les arrangements de polycourbes seraient ainsi plus proches des arrangements de segments [Boi95] que des arrangements de droites. Nous verrons ainsi apparaître des cellules *non banales*, dont l'intérieur de l'adhérence contient au moins une extrémité de polycourbe, et des cellules *banales*, celles qui ne satisfont pas la propriété ci-dessus. L'unique cellule de l'arrangement de la figure IV.5 est non banale.

Dans un arrangement de courbes non bornées ou fermées, il peut exister (et il existera pourvu qu'au moins une courbes est non bornée) des arêtes ayant un seul sommet, et ces arêtes seront non bornées. Dans un arrangement de polycourbes, toutes les arêtes sont évidemment bornées, mais il peut toujours en exister qui n'ont qu'un seul sommet, et nous appellerons *arête libre* une telle arête.

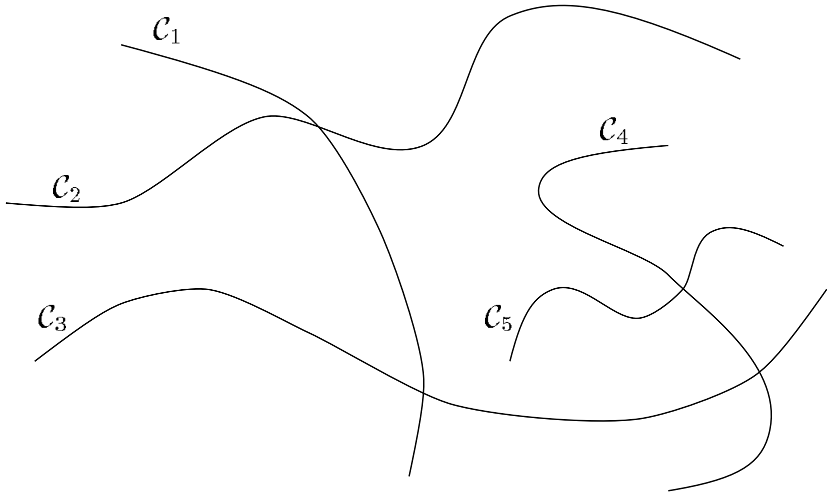

Figure IV.6

Remarquons aussi qu'à une polycourbe $\mathcal{C}$ nous pouvons associer de manière naturelle un sens de parcours, car elle est une courbe paramétrique, donc la notion de sommets positivement ordonnés, ainsi que les ensembles $\mathcal{C}(\mathrm{P}^-)$ et $\mathcal{C}(\mathrm{P}^+)$ pour $\mathrm{P} \in \mathcal{C}$, ont un sens et seront utilisés.

La définition d'un arrangement simple est à peu près la même que pour les courbes fermées ou non bornées, mais la condition (IV.13.ii) doit être reformulée, car $\mathcal{R}(\mathcal{C}, \mathrm{P})$ n'a pas de sens si la polycourbe $\mathcal{C}$ n'est pas fermée. Pour pouvoir donner la définition d'un arrangement simple de polycourbes, la notion suivante nous est nécessaire :

Définition IV.20. – *Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux polycourbes et soit* P *un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ qui n'est pas une extrémité de $\mathcal{C}_2$.*

(IV.20.a) *Si $\mathcal{C}_1$ n'est pas une polycourbe fermée et* P *est l'une de ses extrémités, nous dirons que $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de gauche à droite en* P *si et seulement si*

- (IV.20.a.i) *il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_1) = 1$ *et* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_2) = 2$ *pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$;*
- (IV.20.a.ii) *si en parcourant $\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon_0)$ à partir du point $\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_1$ vers la gauche par rapport au sens de parcours de $\mathcal{C}_1$ nous notons P_1 et P_2 les points d'intersection de $\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon_0)$ et $\mathcal{C}_2$ dans l'ordre où nous les avons trouvés, alors $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{C}_2(\mathrm{P}_2^-)$.*

(IV.20.b) *Si $\mathcal{C}_1$ est une polycourbe fermée ou* P *n'est pas l'une de ses extrémités, nous dirons que $\mathcal{C}_2$ traverse $\mathcal{C}_1$ de gauche à droite en* P *si et seulement si*

- (IV.20.b.i) *il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_1) = 2$ *et* $\mathrm{card}(\mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon) \cap \mathcal{C}_2) = 2$ *pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$;*
- (IV.20.b.ii) *si $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2\} = \mathrm{C}(\mathrm{P}, \varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_2$ tels que $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{C}_2(\mathrm{P}_2^-)$, alors en notant $\mathrm{C}_g(\mathrm{P}, \varepsilon_0)$*

l'arc de $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *se trouvant à gauche de* $\mathcal{C}_1$ *par rapport à son sens de parcours (considéré sans ses extrémités, qui sont les points d'intersection de* $\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0)$ *et* $\mathcal{C}_1$*) et* $\mathrm{C}_d(\mathrm{P},\varepsilon_0) = \mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \setminus \Big(\mathrm{C}_g(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cup \big(\mathrm{C}(\mathrm{P},\varepsilon_0) \cap \mathcal{C}_1\big)\Big)$,

alors

$$\mathrm{P}_1 \in \mathrm{C}_g(\mathrm{P},\varepsilon_0) \text{ et } \mathrm{P}_2 \in \mathrm{C}_d(\mathrm{P},\varepsilon_0).$$

De manière symétrique se définit la traversée de droite à gauche.

Pour simplifier l'expression, donnons encore une définition, qui découle directement de celle-ci :

Définition IV.21. – *Soient* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *deux polycourbes et soit* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$*. Nous dirons que* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_2$ *se traversent en* P *si et seulement si* $\mathcal{C}_2$ *traverse* $\mathcal{C}_1$ *de gauche à droite en* P *ou* $\mathcal{C}_2$ *traverse* $\mathcal{C}_1$ *de droite à gauche en* P.

Nous reformulons l'énoncé de IV.13 comme suit :

Définition IV.22. – *Soit* $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_i\}_{i=1}^n$ *un ensemble de polycourbes. Nous dirons que* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ *est un arrangement simple si et seulement si*

(IV.22.i) $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \emptyset$ *pour tous* $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *distincts ;*

(IV.22.ii) *si* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$, $\mathcal{C}_i$ *et* $\mathcal{C}_j$ *se traversent en* P *;*

(IV.22.iii) *si* $\mathrm{P} \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j$*, il n'existe pas de tangente commune des polycourbes* $\mathcal{C}_i$ *et* $\mathcal{C}_j$ *en* P *;*

(IV.22.iv) *l'ensemble* $\cup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ *est connexe.*

IV.5.2. *Équivalence d'arrangements de polycourbes*

La définition de l'équivalence donnée par Edelsbrunner n'a plus de sens pour les arrangements de polycourbes, et les hypothèses (h.3) et (h.4) perdent aussi toute signification, car les vecteurs de position des faces ne peuvent plus être définis. Par contre, la définition de Grünbaum reste pertinente et nous allons l'utiliser pour les arrangements de polycourbes.

Proposition IV.23. – *Soient* $\mathcal{C}^1 = \{\mathcal{C}_i^1\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *et* $\mathcal{C}^2 = \{\mathcal{C}_i^2\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *deux ensembles de polycourbes tels que les arrangements* $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ *et* $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ *satisfassent les hypothèses (h1) et (h2) et les conditions*

(IV.23.i) $\mathcal{C}_i^1$ *est fermée si et seulement si* $\mathcal{C}_i^2$ *est fermée.*

(IV.23.ii) $s \in \mathcal{C}_i^1 \cap \mathcal{C}_j^1$ *n'est pas une extrémité de* $\mathcal{C}_j^1$ *si et seulement si* $\varphi_0(s)$ *n'est pas une extrémité de* $\mathcal{C}_j^2$ *et si c'est le cas, alors* $\mathcal{C}_j^1$ *traverse* $\mathcal{C}_i^1$ *de gauche à droite en* s *si et seulement si* $\mathcal{C}_j^2$ *traverse* $\mathcal{C}_i^2$ *de gauche à droite en* $\varphi_0(s)$.

Alors les deux arrangements sont équivalents au sens de la définition IV.15.

Preuve – La fonction φ_0 de (h2) étant une bijection, la condition (h2.1) implique immédiatement l'égalité des cardinaux des ensembles de sommets situés respectivement sur $\mathcal{C}_i^1$, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$, et $\mathcal{C}_i^2$, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. En utilisant (IV.23.i), nous déduisons que le nombre d'arêtes situées sur $\mathcal{C}_i^1$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est égal au nombre d'arêtes situées sur $\mathcal{C}_i^2$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Si nous notons $s_1^{1,i}, \ldots, s_{k_i}^{1,i}$ les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ appartenant à $\mathcal{C}_i^1$ dans l'ordre croissant des valeurs des paramètres auxquels ils correspondent sur la polycourbe, et $s_1^{2,i},\ldots,s_{k_i}^{2,i}$ les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ appartenant à $\mathcal{C}_i^2$ toujours dans l'ordre croissant, la condition (h2.2) implique $\varphi_0(s_h^{1,i})=s_h^{2,1}$ pour tout $h\in\{1,\ldots,k_i\}$, et ceci pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Notons les arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ situées sur $\mathcal{C}_i^1$, dans l'ordre de leur "apparition" sur la polycourbe, $a_1^{1,i},\ldots,a_{k_i'}^{1,i}$, et les arêtes de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ situées sur $\mathcal{C}_i^2$, toujours dans le bon ordre, $a_1^{2,i},\ldots,a_{k_i'}^{2,i}$. Nous observons que $k'=k+1$, si les polycourbes $\mathcal{C}_i^1$ et $\mathcal{C}_i^2$ ne sont pas fermées, et $k'=k$ si elles le sont ; dans ce dernier cas, l'arête $a_1^{1,i}$ sera celle comprise entre $s_1^{1,i}$ et $s_2^{1,i}$ et $a_{k_i}^{1,i}$ sera l'arête comprise entre $s_{k_i}^{1,i}$ et $s_1^{1,i}$, contenant éventuellement l'origine de la polycourbe (si $s_1^{1,i}$ en est différent).

Définissons alors la fonction φ_1 faisant correspondre à une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$:

$$\varphi_1(a_h^{1,i})=a_h^{2,i}\qquad \forall h\in\{1,\ldots,k_i'\}\quad \forall i\in\{1,\ldots,n\}$$

Cette fonction est de manière évidente une bijection, et il est aussi évident que si s et a sont respectivement un sommet et une arête de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ définissant une incidence, alors $\varphi_0(s)$ et $\varphi_1(a)$ définissent une incidence dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Soit maintenant c une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$. Sa frontière, qui sera notée δ^1, est un ensemble d'arêtes et de sommets de l'arrangement. Discutons d'abord le cas où c est une cellule banale.

Si c est banale, il y a autant d'arêtes que de sommets dans la composition de cette frontière, qui est une courbe fermée (et simple). En commençant par un sommet quelconque de δ^1, suivi par un sommet incident à une des deux arêtes qui sont en même temps incidentes à c et au sommet déjà pris, nous aurons une direction de parcours de δ^1 ; nous faisons la liste des faces composant δ^1 suivant cette direction de parcours et prenons leurs images respectivement par φ_0 et φ_1 dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$. L'union des images formera une courbe δ^2 et les propriétés des bijections φ_0 et φ_1 impliquent facilement que δ^2 est une courbe fermée (et simple). Nous montrons que l'une des deux régions du plan délimitées par δ^2 est une cellule de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Soit $\mathcal{L}_1=\{s_1,a_1,s_2,a_2,\ldots,s_\ell,a_\ell\}$ la liste des faces de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ composant δ^1 ; δ^2 sera composée des éléments de l'ensemble $\mathcal{L}_2=\{\varphi_0(s_1),\varphi_1(a_1),\ldots,\varphi_0(s_\ell),\varphi_1(a_\ell)\}$. Les arêtes $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$ ne peuvent être qu'incidentes à une cellule c' de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$.

Supposons que, du point de vue de la cellule c, la courbe δ^1 est parcourue trigonométriquement, ce qui veut dire que c se trouve à gauche de δ^1 quand nous parcourons cette courbe dans le sens donné par la liste $\mathcal{L}_1$. Alors pour tout $h\leq\ell$ l'arête a_{h+1} sera "la première à gauche" partant du sommet s_h quand nous sommes arrivés par a_h (les indices h sont considérés de manière circulaire).

Il n'est pas difficile de voir que c' se trouve à gauche des arêtes $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$. En effet, soient $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ tels que $a_1\subset\mathcal{C}_i^1$ et $a_2\subset\mathcal{C}_j^1$.

Cas 1. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_i^1$ et une extrémité de $\mathcal{C}_j^1$. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$, il n'y a que deux arêtes incidentes à s_2, qui sont précisément a_1 et a_2. De par la condition (IV.23.ii), $\varphi_0(s_2)$ est une extrémité de $\mathcal{C}_i^2$ et une extrémité de $\mathcal{C}_j^2$ et dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ les seules deux arêtes incidentes à $\varphi_0(s_2)$ sont $\varphi_1(a_1)$ et $\varphi_1(a_2)$. Dans ce cas, notre étude "se déplace" au sommet s_3, impliquant les arêtes a_2 et a_3 ; si ce sommet aussi est une extrémité pour les deux polycourbes supportant a_2 et a_3, nous passons au suivant et ainsi de suite jusqu'au premier sommet qui n'est pas dans cette situation. Si tous les sommets s_h, pour $h \in \{1, \ldots, \ell\}$, se trouvent dans ce cas, alors l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ ne peut avoir que deux cellules, qui sont respectivement les deux régions connexes du plan définies par δ^1, car cet arrangement étant simple, $\cup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i^1$ doit être un ensemble connexe et donc toutes les polycourbes de $\mathcal{C}^1$ sont incluses dans δ^1. Il est très facile à voir que la condition (IV.23.ii) implique exactement la même structure pour l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ et nous n'avons qu'a considérer que c' est celle des deux cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ se trouvant à gauche du parcours de δ^2.

Cas 2. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_i^1$, mais il n'en est pas une de $\mathcal{C}_j^1$. Supposons que $\mathcal{C}_j^1$ traverse $\mathcal{C}_i^1$ de gauche à droite en s_2 (si $\mathcal{C}_j^1$ traverse $\mathcal{C}_i^1$ de droite à gauche en s_2, la discussion est similaire). Alors $s_3 \in \mathcal{C}_j^1(s_2^-)$, de par la définition de la traversée de gauche à droite et compte tenant de la supposition faite sur le sens de parcours de δ^1. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, le raisonnement se fait en sens inverse : comme la condition (IV.23.ii) implique $\varphi_0(s_3) \in \mathcal{C}_j^2(\varphi_0(s_2)^-)$, nous déduisons que $\varphi_1(a_2)$ est "la première à gauche" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_1)$ et par conséquent c' se trouve à gauche du parcours donné par la liste $\mathcal{L}_2$ sur δ^2.

Cas 3. s_2 est une extrémité de $\mathcal{C}_j^1$, mais il n'en est pas une de $\mathcal{C}_i^1$. Supposons que $\mathcal{C}_i^1$ traverse $\mathcal{C}_j^1$ de gauche à droite en s_2 (si $\mathcal{C}_i^1$ traverse $\mathcal{C}_j^1$ de droite à gauche en s_2, la discussion est similaire). Alors la définition de la traversée de gauche à droite et la supposition faite sur le sens de parcours de δ^1 impliquent $s_1 \in \mathcal{C}_i^1(s_2^+)$. Dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, nous raisonnons à l'inverse : comme la condition (IV.23.ii) implique $\varphi_0(s_1) \in \mathcal{C}_i^2(\varphi_0(s_2)^+)$, nous déduisons que $\varphi_1(a_1)$ est "la première à droite" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_2)$ et par conséquent que $\varphi_1(a_2)$ est "la première à gauche" partant du sommet $\varphi_0(s_2)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_1)$; nous obtenons ainsi que c' se trouve à gauche du parcours donné par la liste $\mathcal{L}_2$ sur δ^2.

Cas 4. s_2 n'est une extrémité ni pour $\mathcal{C}_i^1$, ni pour $\mathcal{C}_j^1$. La discussion à faire dans ce cas est identique à celle du Cas 2 et nous obtenons la propriété voulue pour le sens de parcours de δ^2 par rapport à la cellule c'.

Cas 5. i=j. Ce cas survient quand s_2 est une extrémité d'une polycourbe qui "part vers l'extérieur" de la cellule c, et il est facile à voir la discussion est symétrique à celle du Cas 3 (où s_2 est une extrémité d'une polycourbe qui "part vers l'intérieur" de la cellule c).

Soit $p \in \{3, \ldots, \ell\}$ et supposons que les arêtes $\varphi_1(a_h)$ sont incidentes à c' pour $h \in \{1, \ldots, p-1\}$; il est alors évident que $\varphi_1(a_p)$ l'est aussi. En effet, dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ l'arête a_p est "la première à gauche" en partant de s_p quand nous sommes arrivés par a_{p-1} et une discussion par cas très semblable à celle faite pour prouver que c' se trouve à gauche de δ^2 par rapport au sens de parcours donné par $\mathcal{L}_2$ nous mènera à la conclusion que dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ l'arête $\varphi_1(a_p)$ est "la première à gauche" en partant de $\varphi_0(s_p)$ quand nous sommes arrivés par $\varphi_1(a_{p-1})$ et donc incidente à c'. Par récurrence, nous obtenons ainsi que toutes les arêtes de l'ensemble $\mathcal{L}_2$ sont incidentes à c'.

Dans ses grandes lignes, la discution pour le cas où la cellule c n'est pas banale est identique à celle déjà faite pour le cas c banale, en nous servant du fait que la fonction φ_1 est telle que si a est une arête libre de $\alpha(\mathcal{C}^1)$, alors $\varphi_1(a)$ est une arête libre de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$. Dans la liste $\mathcal{L}_1$ décrivant le bord de c une arête libre sera identifiable au fait qu'elle est précédée et suivie par un même sommet, son unique sommet incident ; la liste $\mathcal{L}_2$ des images des éléments de $\mathcal{L}_1$ par φ_0, respectivement φ_1, aura bien sûr la même particularité. En plus, pour les arêtes libres il n'a pas de sens de dire que la cellule se trouve à gauche (ou à droite), mais nous pouvons éviter ce problème en considérant que toute arête libre est "creuse". Avec ces conventions sur l'ensemble $\mathcal{L}_1$ et sur les arêtes libres, prouver que la liste $\mathcal{L}_2$ définit le bord d'une cellule c' dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ se fait de la même façon que dans le cas où c est banale.

Nous pouvons par conséquent définir une fonction φ_2 associant à une cellule c de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ la cellule c' de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ dont le bord est l'image par les fonctions φ_0 et φ_1 du bord de c. Nous avons prouvé que pour chaque cellule c de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ il existe une telle cellule c' dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$, donc le nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est inférieur ou égal au nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$; mais φ_0 et φ_1 sont des bijections et toutes les conditions imposées aux deux arrangements sont symétriques en $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$, par conséquent tout le raisonnement peut se faire en inversant les rôles des deux ensembles de polycourbes et nous pouvons donc déduire que le nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ est inférieur ou égal au nombre de cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ et conclure que les deux arrangements ont le même nombre de cellules. Comme il est évident que si $c_1 \neq c_2$ sont deux cellules de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ les cellules c'_1 et c'_2 leur correspondant dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^2)$ sont elles aussi distinctes, nous obtenons que la fonction φ_2 est aussi une bijection.

Pour définir la bijection φ de la définition IV.15, il nous reste à préciser que sa restriction aux sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^1)$ est égale à φ_0, sa restriction aux arêtes est égale à φ_1 et sa restriction aux cellules est égale à φ_2. Il est évident que φ ainsi définie garde les incidences.

□

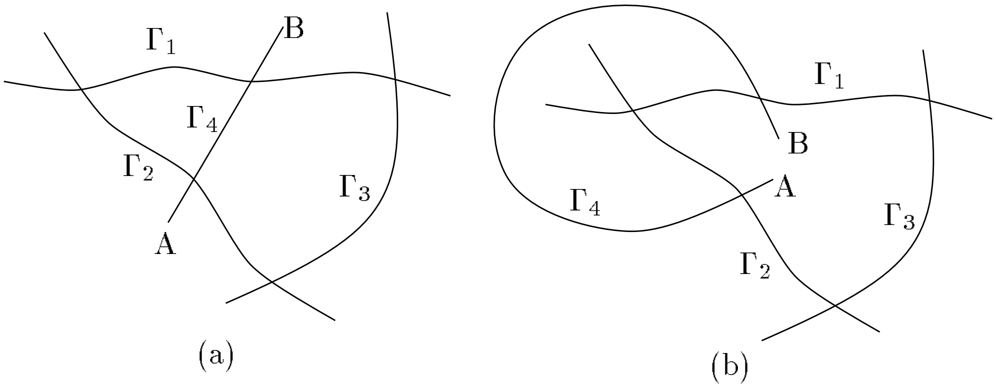

Figure IV.7 *Dans le cas (a), Γ_4 est parcouru de* A *à* B. *Si dans le cas (b) Γ_4 est parcouru de* A *à* B, *(IV.23.ii) n'est pas satisfaite ; si Γ_4 est parcouru de* B *à* A, *c'est (h2.2) qui n'est pas satisfaite.*

La condition (IV.23.i) est évidemment nécessaire pour que les deux arrangements de polycourbes soient équivalents, car une polycourbe fermée sur laquelle il existe k sommets contiendra k arêtes, aucune libre, tandis qu'une polycourbe non fermée ayant k sommets contiendra $k+1$ arêtes, parmi lesquelles deux libres ; les hypothèses (h1) et (h2) ne nous permettant pas de la déduire, cette condition a dû être posée de manière explicite.

La condition (IV.23.ii), par contre, n'est pas nécessaire : dans un arrangement de polycourbes il suffit de changer l'orientation d'une seule polycourbe pour obtenir un nouvel arrangement qui est bien sûr équivalent au précédent au sens de la définition sans que la condition (IV.23.ii) soit satisfaite. Mais cette condition est la plus faible (et intuitive) que nous ayons pu trouver pour assurer l'équivalence de deux arrangements quelconques de polycourbes, car nous pouvons voir dans la figure IV.7 deux arrangements ne la satisfaisant pas et qui ne sont pas équivalents.

IV.5.3. *Arrangements de polycourbes de Bézier et de polygones de contrôle*

Comme pour le problème du calcul de l'enveloppe convexe, l'approximation polygonale que nous utiliserons pour une polycourbe de Bézier sera son polygone de contrôle. Ainsi, de façon naturelle, à tout ensemble de polycourbes de Bézier $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ sera associé un ensemble de lignes polygonales $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ ayant le même cardinal. La polycourbe $\mathcal{B}_i$, pour tout $i \in \mathrm{I}$, s'écrit $\mathcal{B}_i = \cup_{j=1}^{n_i} \mathcal{B}_{i,j}$, où $\mathcal{B}_{i,j}$ est une courbe de Bézier complètement convexe de B-polygone $\mathcal{P}_{i,j} = \mathrm{P}_0^{(i,j)}\mathrm{P}_1^{(i,j)} \ldots \mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}$.

Comme nous avons annoncé au début de cette section, nous cherchons un arrangement de lignes polygonales qui soit équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier donné. Nous construirons cet arrangement à partir de l'arrangement de polygones de contrôle des polycourbes de Bézier, en utilisant la subdivision de de Casteljau de rapport 1/2.

Avant d'énoncer et prouver le théorème d'existence d'un arrangement de polygones de contrôle équivalent à un arrangement de polycourbes de Bézier donné, nous établissons une convention de notation dont nous aurons besoin.

Convention Soient $\mathcal{B}_1 = \cup_{i=1}^{n_1} \mathcal{B}_{1,i}$ et $\mathcal{B}_2 = \cup_{i=1}^{n_2} \mathcal{B}_{2,i}$ deux polycourbes de Bézier telles que l'arrangement $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\})$ soit simple. Supposons qu'il existe $i_1 \in \{2, \ldots, n_1\}$ et $i_2 \in \{1, \ldots, n_2\}$ tels que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)} \in \mathcal{B}_{2,i_2} \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}, \mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}\}$ (i_1 est différent de 1, car l'arrangement étant simple nous aurons $\mathrm{P}_0^{(1,1)}, \mathrm{P}_{m_{n_1}}^{(1,n_1)} \notin \mathcal{B}_2$ et $\mathrm{P}_0^{(2,1)}, \mathrm{P}_{m_{n_2}}^{(2,n_2)} \notin \mathcal{B}_1$). La simplicité de $\mathcal{A}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\})$ implique l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{B}_{m_{1,i_1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{1,i_1}}^{(1,i_1)}\,;\,]0,\varepsilon[) \cap reg(\mathcal{B}_{2,i_2}, [\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}]) = \emptyset$$
$$\text{et} \tag{IV.2}$$
$$\mathrm{B}_{m_{1,i_1-1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1-1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\,;\,]\varepsilon, 1[) \subset reg(\mathcal{B}_{2,i_2}, [\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])$$

ou

$$\mathrm{B}_{m_{1,i_1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{1,i_1}}^{(1,i_1)}\,;\,]0,\varepsilon[) \subset reg(\mathcal{B}_{2,i_2}, [\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}])$$
$$\text{et} \tag{IV.3}$$
$$\mathrm{B}_{m_{1,i_1-1}}(\mathrm{P}_0^{(1,i_1-1)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)}\,;\,]\varepsilon, 1[) \cap reg(\mathcal{B}_{2,i_2}, [\mathrm{P}_0^{(2,i_2)}\mathrm{P}_{m_{2,i_2}}^{(2,i_2)}]) = \emptyset$$

À chaque fois que la situation décrite par les formules (IV.2) survient, nous considérons que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)} \in \mathcal{B}_{2,i_2}$ et $\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)} \notin \mathcal{B}_{2,i_2}$, et si nous avons la situation décrite par (IV.3), nous considérons que $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)} \notin \mathcal{B}_{2,i_2}$ et $\mathrm{P}_{m_{1,i_1-1}}^{(1,i_1-1)} \in \mathcal{B}_{2,i_2}$. Autrement dit, nous considérons que celle des deux courbes de Bézier ayant le point $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$ comme extrémité commune qui “part vers l'intérieur” de la courbe $\mathcal{B}_{2,i_2}$ ne coupe pas $\mathcal{B}_{2,i_2}$ en $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$, et seulement celle qui “part vers l'extérieur” aura en commun avec $\mathcal{B}_{2,i_2}$ ce point. Cette convention n'introduit pas d'incohérence dans le nombre ou l'ordre des intersections de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et elle est faite, comme nous le verrons dans la démonstration du théorème suivant, à cause des situations comme celle de la figure IV.8, où nous ne pourrons jamais avoir $\mathcal{P}_{1,i_1} \cap \mathcal{P}_{2,i_2} \neq \emptyset$ si le paramètre correspondant à $\mathrm{P}_0^{(1,i_1)}$ sur la courbe $\mathcal{B}_{2,i_2}$ n'est pas de la forme $i/2^k$.

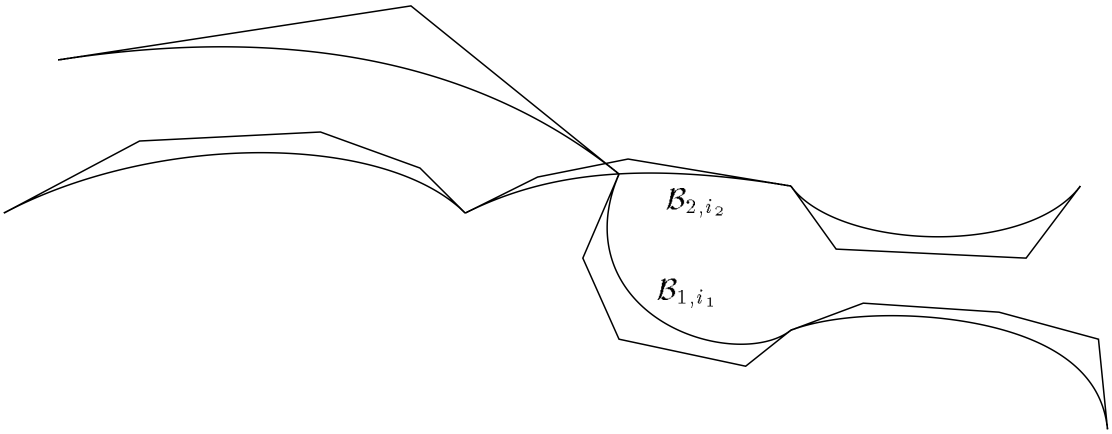

Figure IV.8

Théorème IV.24. – *Soit $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i=1,\dots,n}$ une famille de polycourbes telle que $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ soit simple et $n \geq 3$. Supposons en plus que*

$$\mathrm{P}_0^{(i,n_i)}, \mathrm{P}_{m_{i,n_i}}^{(i,n_i)} \notin \bigcup_{k\neq i} \mathcal{B}_k \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Alors il existe une famille $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\dots,n}$ de polygones de contrôle de ces polycourbes ayant les propriétés

(IV.25.i) *$\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ sont équivalents ;*

(IV.25.ii) *toute famille de polygones de contrôle obtenue par subdivision de de Casteljau à partir de $\mathcal{P}$ satisfait la propriété* (IV.25.i).

Preuve – Nous utiliserons les mêmes notations que précédemment, en considérant que la polycourbe $\mathcal{B}_i$ courante s'écrit $\mathcal{B}_i = \cup_{j=1}^{n_i}\mathcal{B}_{i,j}$ et a le polygone de contrôle $\mathcal{P}_i = \cup_{j=1}^{n_i}\mathcal{P}_{i,j}$ avec $\mathcal{P}_{i,j} = \mathrm{P}_0^{(i,j)}\mathrm{P}_1^{(i,j)}\dots\mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}$.

Sans restriction de la généralité, nous pouvons supposer que

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i\neq i_1}\mathcal{B}_i)) \leq 1 \quad \forall i_1 \in \{1,\dots,n\}\forall j_1 \in \{1,\dots,n_{i_1}\} \tag{IV.4}$$

En effet, soient $i_1 \in \{1,\dots,n\}$ et $j_1 \in \{1,\dots,n_{i_1}\}$ tels que $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i\neq i_1}\mathcal{B}_i)) = p > 1$. Nous pouvons écrire $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap (\cup_{i\neq i_1}\mathcal{B}_i) = \{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \dots, \mathrm{Q}_p\}$, en supposant que les points $\mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_p$ sont ordonnés sur la courbe $\mathcal{B}_{i_1,j_1}$. Il existe alors $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \leq 1$ tels que $\mathrm{Q}_k = \mathrm{B}_{m_{i_1,j_1}}(\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)}, \dots, \mathrm{P}_{m_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}; t_k)$. Nous prenons

$$\kappa = \left\lceil -\log_2\left(\min_{\alpha=2}^{p}(t_\alpha - t_{\alpha-1})\right)\right\rceil$$

et nous subdivisons la courbe $\mathcal{B}_{i_1,j_1}$ κ fois. Chacune des courbes de Bézier ainsi obtenues sera en fait la restriction de la courbe initiale a un intervalle de longueur $1/2^\kappa$. Cette valeur étant inférieure à $\min_{\alpha=2}^{p}(t_\alpha - t_{\alpha-1})$ par le choix de κ, il ne peut pas y avoir de tel intervalle de définition contenant plus d'un paramètre t_α. Toutes les courbes obtenues par les subdivisions décrites satisfont donc la propriété ci-dessus, et en répétant ce procédé à chaque fois qu'une courbe de Bézier d'une des polycourbes de l'arrangement coupe l'ensemble des polycourbes auxquelles elle n'appartient pas en plus d'un point nous obtenons une nouvelle écriture de l'arrangement pour laquelle la condition donnée est satisfaite.

Ainsi, l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ satisfait la condition (IV.4). Pour prouver l'existence d'une famille $\mathcal{P}$ de polygones de contrôle des polycourbes de la famille $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ soit un arrangement simple, nous traiterons une par une les conditions de la définition d'un arrangement simple. Soit

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \min_{\substack{i_1 \neq i_2 \\ \mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} = \emptyset}} \mathrm{d}\Big(\mathcal{B}_{i_1,j_1}, \mathcal{B}_{i_2,j_2}\Big)$$

Suite aux propriétés des courbes de Bézier, il existe une famille de polygones de contrôle $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ telle que

$$\delta^{\mathrm{H}}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i,j}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i,j}\big) < \varepsilon_0 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \forall j \in \{1,\ldots,n_i\} \tag{IV.5}$$

Si nous supposons que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ ne satisfait pas (IV.22.i), il existe $i_1, i_2, i_3 \in \{1,\ldots,n\}$ tous distincts et $j_k \in \{1,\ldots,n_{i_k}\}$ pour $k = 1,2,3$ tels que

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset$$

Soit $\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}$. Comme la relation (IV.4) est satisfaite, nous ne pouvons pas avoir $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} \neq \emptyset$. Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3} = \emptyset$. Alors

$$\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) + \mathrm{d}(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) + \delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_3,j_3}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_3,j_3}) < 2\varepsilon_0$$

contradiction avec la définition de ε_0. La condition (IV.5) est invariante à la subdivision de de Casteljau, ce qui signifie que toute famille de polygones de contrôle obtenue par subdivision de de Casteljau à partir de $\mathcal{P}$ va générer un arrangement vérifiant la condition (IV.22.i).

Pour montrer l'existence d'une famille $\mathcal{P}$ satisfaisant les conditions (IV.22.ii) et (IV.22.iii), nous allons prouver qu'il existe une famille $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ telle que

$$\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \qquad \begin{array}{l} \forall i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\} \\ \forall j_k \in \{1,\ldots,n_{i_k}\},\ k = 1,2 \end{array}$$

Si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, un raisonnement identique à celui fait pour prouver que l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ satisfaisant la relation (IV.5) vérifie (IV.22.i) nous mènera à la conclusion $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset$. Il nous reste donc à prouver l'existence d'une famille de polygones de contrôle telle que si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = 1$ (car $\mathcal{B}$ satisfait la condition (IV.4)). Cette preuve sera faite en deux étapes, nous construirons d'abord une famille $\mathcal{P}$ telle que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ et ensuite une telle que $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) < 2$. Deux nouvelles notations nous sont nécessaires.

Notations

$$D_{i,j} = \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i,j)} \mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}, \mathcal{B}_{i,j}) \setminus \overline{reg(\mathrm{P}_0^{(i,j)} \mathrm{P}_{m_{i,j}}^{(i,j)}, \mathcal{B}_{i,j})}$$

$$\widetilde{D}_{i,j} = \mathrm{DP}(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i,j)}\widetilde{\mathrm{P}}^{(i,j)}_{\widetilde{m}_{i,j}}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i,j}) \setminus \overline{reg(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i,j)}\widetilde{\mathrm{P}}^{(i,j)}_{\widetilde{m}_{i,j}}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i,j})}$$

Soit $\{\mathrm{Q}\} = \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$.
Premier cas. Si nous avons la situation de la figure IV.9, où

$$\mathrm{Q} \in \left\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}^{(i_1,j_1)}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}\right\} \cap \left\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}^{(i_2,j_2)}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}\right\} ,$$

il est évident que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$.

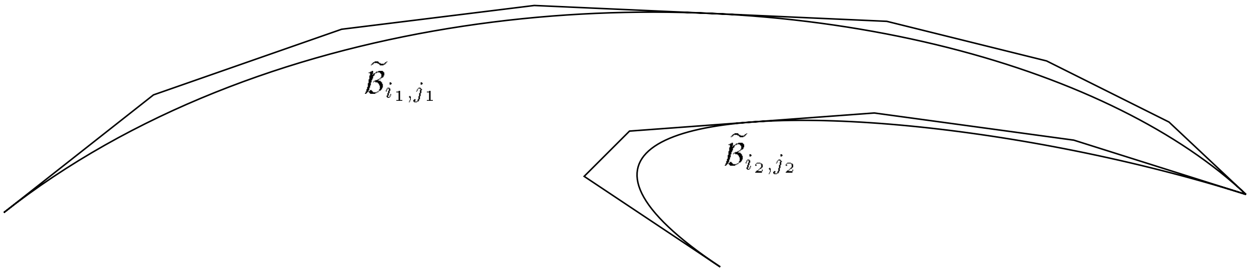

Figure IV.9

Deuxième cas. Un autre cas possible est celui de la figure IV.10, où le point Q est une des extrémités de l'une des deux courbes et appartient à l'intérieur (en dimension 1) de l'autre, et supposons que $\mathrm{Q} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \left\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}^{(i_1,j_1)}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}\right\}$. $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant un arrangement simple et compte tenant de la convention de notation faite, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1} \neq \emptyset$ et soit

$$\varepsilon_1 = \sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$$

Nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à ce que $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_1$. De par la définition de ε_1, la courbe $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$ partage la région $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}$ en deux parties connexes. D'un autre côté,

$$\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_1 \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{i_1,j_1)}, \mathrm{P}^{(i_1,j_1}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}\right\} \subset \mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}$$

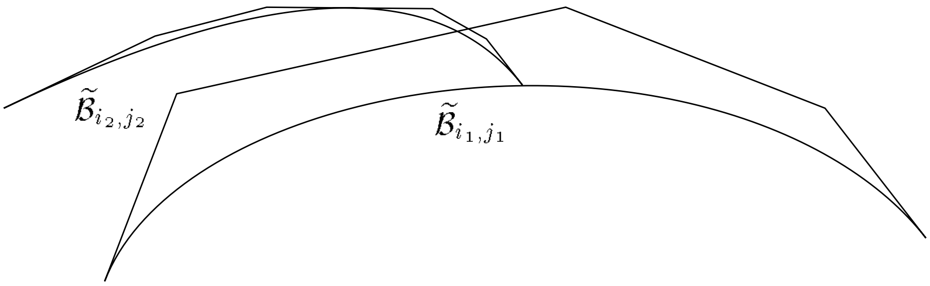

Figure IV.10

Nous en déduisons que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \neq \emptyset \qquad \text{(IV.6)}$$

Pour fixer les notations, supposons que $\mathrm{Q} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$. Suite à la convention de notation, nous aurons $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$.

Supposons, par l'absurde, que

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset \tag{IV.7}$$

Nous savons $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big) \neq \emptyset$. Si $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big)$, les propriétés des courbes de Bézier impliqueront $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big)$, contradiction avec la relation (IV.6). Il résulte $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \delta\big(\mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})\big) \neq \emptyset$, ce qui, avec la relation (IV.7), donnera $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[\neq \emptyset$. Alors il existe $k \in \{1, \ldots, \widetilde{m}_{i_2,j_2} - 1\}$ tel que

$$[\widetilde{\mathrm{P}}_k^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}^{(i_2,j_2)}] \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[\neq \emptyset$$

et soit $\mathrm{R} \in [\widetilde{\mathrm{P}}_k^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{k+1}^{(i_2,j_2)}] \cap]\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}[$. Des relations

$$\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{(i_1,j_1)} \setminus \big\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}\big\}, \qquad \widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$$

et (IV.7) il résulte $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$. D'un autre côté, $\mathrm{R} \notin reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$, donc la ligne polygonale $\cup_{\alpha=1}^{k} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]$ doit couper la frontière de $reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$. Avec la condition (IV.7), cela impliquera

$$\left(\bigcup_{\alpha=1}^{k} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]\right) \cap \left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \big\{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_1,j_1}}\big\}\right) \neq \emptyset$$

Soit S un point de l'intersection des deux ensembles ci-dessus tel que, si $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$ a la propriété $\mathrm{S} \in [\widetilde{\mathrm{P}}_\ell^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\ell+1}^{(i_2,j_2)}]$, la longueur de la ligne polygonale $\cup_{\alpha=0}^{\ell} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]$ soit minimale. Soit Ω la région bornée, d'un côté, par le morceau de $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ compris entre les points Q et S, et, de l'autre côté, par le morceau de $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ compris entre $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} = \mathrm{Q}$ et S :

$$\Omega = reg\left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QS}]}, \left(\bigcup_{\alpha=0}^{\ell-1} [\widetilde{\mathrm{P}}_\alpha^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}]\right) \cup [\mathrm{P}_\ell^{(i_2,j_2)} \mathrm{S}]\right)$$

La condition (IV.7) et le fait que $\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)} \in reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$ impliquent

$$\Omega \subset reg(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1})$$

Les propriétés des courbes de Bézier (à savoir le fait que $[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)}$ est tangent à $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ en $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)} \widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}_2^{(i_2,j_2)})$) donnent $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \Omega \neq \emptyset$. Nous ne pouvons pas avoir $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \Omega$, car cela donnerait une contradiction avec la relation (IV.6), donc $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\delta(\Omega) \setminus \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\}\big) \neq \emptyset$. Comme $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \setminus \{\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}, \widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}^{(i_2,j_2)}\}\big) = \emptyset$, nous déduisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \big(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \setminus \{\mathrm{Q}\}\big) \neq \emptyset$, en obtenant ainsi une contradiction avec la relation (IV.4). La supposition (IV.7) nous ayant menés à une contradiction, elle est fausse et nous avons par conséquent prouvé

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$$

Troisième cas. Il nous reste ainsi à étudier le cas général des positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$, quand le point Q n'est l'extrémité d'aucune de ces deux courbes, cas présenté figure IV.11.

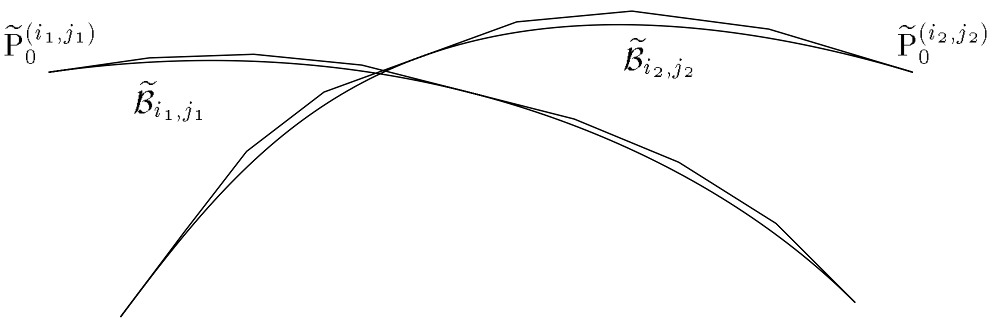

Figure IV.11

Pour fixer les notations, supposons que les deux courbes sont telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \Big(\mathrm{B}(\mathrm{Q},\varepsilon) \cap \widetilde{D}_{i_k,j_k}\Big) \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_\ell,j_\ell}\Big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_\ell,j_\ell)}\mathrm{Q}]} \neq \emptyset \quad \forall k \neq \ell \in \{1,2\}$$

Nous définissons

$$\varepsilon_1' = \sup_{\mathrm{P}\in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}\mathrm{Q}]}\cap \widetilde{D}_{i_2,j_2}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big) \qquad \varepsilon_1'' = \sup_{\mathrm{P}\in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}\mathrm{Q}]}\cap \widetilde{D}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}\big(\mathrm{P},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big)$$

ε_1' et ε_1'' sont tous les deux positifs et nous prenons $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1',\varepsilon_1''\}$. Nous pouvons obtenir par subdivision de de Casteljau deux lignes polygonales $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ telles que $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k},\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k,j_k}) < \varepsilon_1$, pour $k=1,2$. De par la définition de ε_1, la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]}$ partage la région $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2},\varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_2,j_2}$ en deux parties connexes telles que les points $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_2,j_2}}^{(i_2,j_2)}$ n'appartiennent pas à l'adhérence de la même de ces deux parties. Comme la ligne polygonale $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ joint ces deux points et est incluse dans $\mathrm{B}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2},\varepsilon_1) \cap \widetilde{D}_{i_2,j_2}$, il résulte $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]} \neq \emptyset$. Symétriquement, nous aurons aussi $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}]} \neq \emptyset$. Soit $\{\mathrm{T}\} = \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{Q}\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}]}$ et soit $h \in \{0,\dots,\widetilde{m}_{i_2,j_2}-1\}$ tel que $\mathrm{T} \in [\mathrm{P}_h^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{h+1}^{(i_2,j_2)}]$. Si nous supposons que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, nous aurons aussi

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \left(\left(\bigcup_{\alpha=0}^{h-1} [\mathrm{P}_\alpha^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\alpha+1}^{(i_2,j_2)}] \right) \cup [\mathrm{P}_h^{(i_2,j_2)}\mathrm{T}] \right) = \emptyset$$

et le raisonnement à faire pour obtenir une contradiction est identique à celui fait pour le deuxième cas , en considérant la restriction de la courbe $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$ délimitée par $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et Q et la restriction du polygone $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ délimitée par $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$ et T.

Il est évident, dans les trois cas possibles de positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$, qu'aucune subdivision ultérieure ne changera le fait que l'intersection des polygones de contrôle est non-vide, car les majorations imposées à $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k},\widetilde{\mathcal{P}}_{i_k,j_k})$, pour $k=1,2$, seront toujours vérifiées.

Nous arrivons ainsi à la deuxième étape de notre preuve et nous cherchons des polygones de contrôle $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ tels que $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) = 1$. Pour cette preuve aussi nous devons traiter séparément les trois cas évidentiés dans l'étape précédente.

Premier cas. Supposons que $\mathrm{Q} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_2,j_2)}$. Nous notons

$$\widetilde{A}_{i_k,j_k} = \mathrm{DP}\big(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_k,j_k)}\widetilde{\mathrm{P}}_1^{(i_k,j_k)},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_k,j_k)}\widetilde{\mathrm{P}}_{\widetilde{m}_{i_k,j_k}}^{(i_k,j_k)},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}\big) \qquad k=1,2$$

Les affirmations suivantes résultent de manière évidente des propriétés des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}$, pour $k = 1, 2$:

– $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2} = \{\mathrm{Q}\} \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} = \{\mathrm{Q}\}$

– si $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2} \neq \{\mathrm{Q}\}$, alors

$$\left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}\right) \cap \left(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1}\right) = \emptyset \tag{IV.8}$$

et ces deux morceaux de courbes partagent la région $\widetilde{A}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}$ en trois parties connexes (figure IV.12).

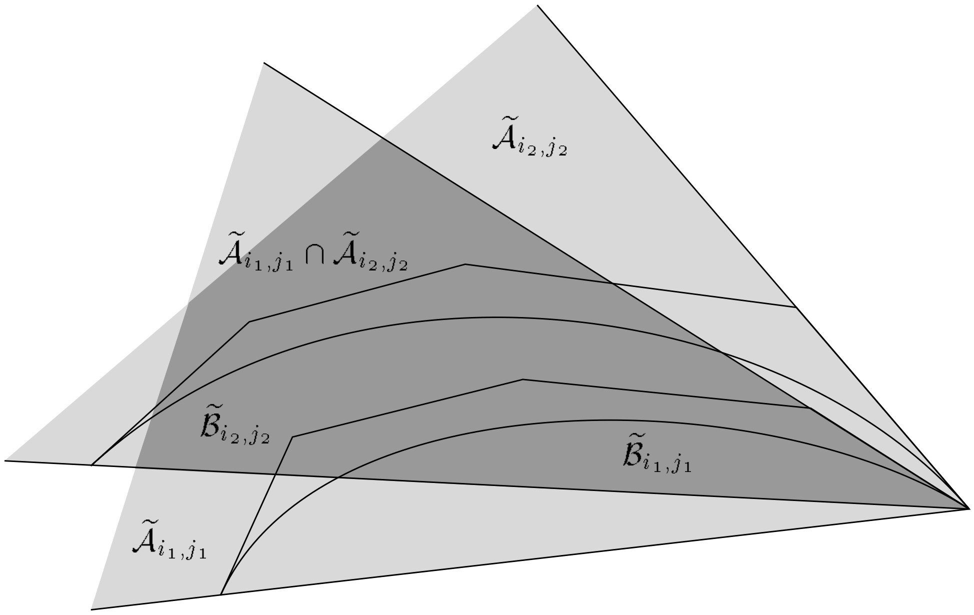

Figure IV.12

Si nous sommes dans la première des deux situations décrites ci-dessus, la relation à prouver est immédiate. Si nous sommes dans la deuxième, soit $\varepsilon_2 = \mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}, \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1})$. Supposons que

$$\sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{A}_{i_2,j_2}} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) < \sup_{\mathrm{P} \in \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \cap \widetilde{A}_{i_1,j_1}} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \tag{IV.9}$$

Nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à avoir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < (1/2)\varepsilon_2$ et quand cette condition est satisfaite il est facile à voir que $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ ne peuvent pas avoir autre point commun que Q. Si l'inégalité (IV.9) est inverse, nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$; les deux membres de (IV.9) ne peuvent pas être égaux à cause de la relation (IV.8).

Deuxième et troisième cas. Nous traiterons ces deux cas ensemble, car ils sont similaires.

Les courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ admettent quatre droites d'appui communes. Nous notons Δ celle des deux droites d'appui qui satisfait

$$\Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \subset \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \qquad \Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}), \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$$

Une telle droite d'appui existe, car l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant simple, $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ ne peuvent pas avoir une tangente commune en Q.

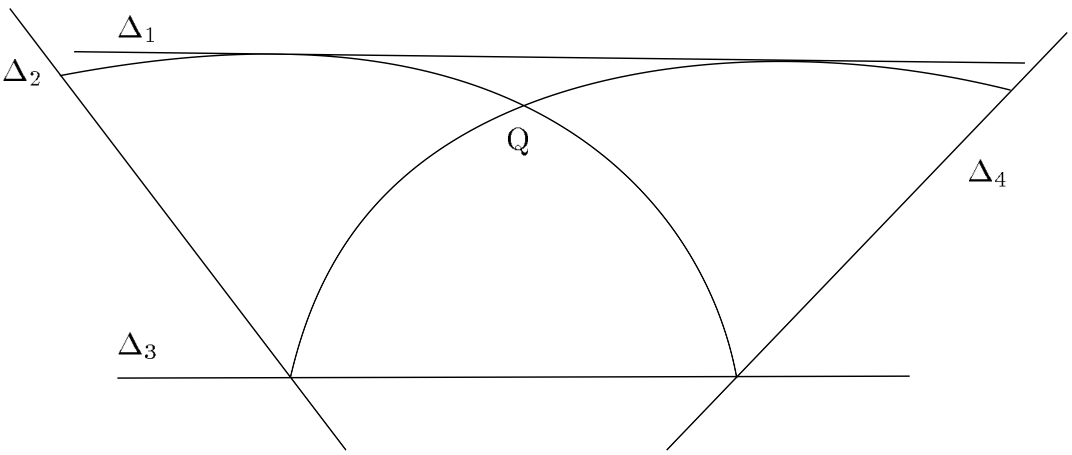

Figure IV.13 *La seule des quatre droites d'appui satisfaisant les deux conditions ci-dessus est* Δ_1

Soient θ_1 l'angle formé par Δ et $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et θ_2 l'angle formé par Δ et $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$. Nous prenons

$$\varepsilon_2' = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{Q},\Delta)\cos\theta_1 \qquad \varepsilon_2'' = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{Q},\Delta)\cos\theta_2$$

et nous subdivisons $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ jusqu'à obtenir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1},\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}) < \varepsilon_2'$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ jusqu'à obtenir $\delta^{\mathrm{H}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2},\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) < \varepsilon_2''$. Soient $\Delta_1^{(\varepsilon_2')}$ la parallèle à $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ située dans le demi-plan $\mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}),\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et telle que $\mathrm{d}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')},\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})) = \varepsilon_2'$ et $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ la droite définie de manière analogue par rapport à $\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$ et ε_2''. Il est facile à voir que $D_1^{(\varepsilon_2')}$ et $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ se coupent en un point T situé à mi-distance entre Q et sa projection sur la droite Δ.

Évidemment, $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \subset \mathrm{DP}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset \mathrm{DP}(\Delta_2^{(\varepsilon_2'')},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$, donc l'intersection des deux lignes polygonales sera contenue dans l'intersection des deux demi-plans. Plus, en notant R_1 le point d'intersection de $\Delta_2^{(\varepsilon_2'')}$ avec $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ tel que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[} \subset \mathrm{DP}(\Delta_2^{(\varepsilon_2'')},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \cap \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}),\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2})$$

et R_2 le point d'intersection de $\Delta_1^{(\varepsilon_2')}$ avec $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ tel que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR}_2[} \subset \mathrm{DP}(\Delta_1^{(\varepsilon_2')},\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) \cap \mathrm{DP}_{op}(\tan_{\mathrm{Q}}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}),\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1})$$

nous aurons

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \subset reg\big([\mathrm{R}_1\mathrm{T}] \cup [\mathrm{TR}_2] \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{R}_2\mathrm{Q}[} \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[} \qquad \text{(IV.10)}$$

La région ci-dessus est un pseudo-losange que nous appellerons $\mathcal{L}$.

Si nous supposons $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \geq 2$, il existe $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2 \in \mathcal{L}$ qui appartiennent simultanément aux deux polygones de contrôle. De par les propriétés des courbes de Bézier complètement convexes, si deux points $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ appartiennent au polygone de contrôle $\widetilde{\mathcal{P}}$ de la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}$, alors $\mathrm{card}(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \cap \mathcal{B}) \in \{0,2\}$. Nous aurons donc

$$\mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}) \in \{0,2\} \qquad \mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) \in \{0,2\}$$

Plus, pour des raisons de convexité, si $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[}$ et si $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$, alors $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} \subset \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR}_2[}$. Ainsi, nous aurons quatre possibilités pour la droite $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$.

1. $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k} = \emptyset$, $k = 1,2$ – cette situation n'est pas possible. En effet, $\mathcal{L}$ est, de par le choix des valeurs ε_2' et ε_2'', inclus dans $\mathcal{T} = reg\big([\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2] \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{T}_2\mathrm{Q}]} \cup \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT}_1]}\big)$, où $\{\mathrm{T}_k\} = \Delta \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_k,j_k}$, pour $k = 1,2$. Toute droite passant par un point de $\mathcal{T}$ devra couper au moins deux de ses côtés, donc au moins une des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT}_1]}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT}_2]}$.
2. $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} = \emptyset$, $\mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR}_2[}) = 2$ – dans cette situation, $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$ devrait couper deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT}_2]}$ et ne pas couper $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT}_1]}$, ce qui est encore une fois impossible. Les conditions symétriques, $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2} = \emptyset$, $\mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[}) = 2$, mènent à la même impossibilité.
3. $\mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QR}_1[}) = 2$, $\mathrm{card}(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{]\mathrm{QR}_2[}) = 2$ – nous avons donc une droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{[\mathrm{QT}_1]}$ et deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT}_2]}$. Toute droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}\big|_{]\mathrm{QT}_1[}$ doit couper $[\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2]$, et de même toute droite coupant deux fois $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}\big|_{[\mathrm{QT}_2]}$ doit couper $[\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2]$. Ainsi, la droite $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$ coupera la frontière de $\mathcal{T}$ au moins cinq fois, contradiction. Cette situation est donc elle aussi impossible.

Nous avons vu comment la supposition $\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}, \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \geq 2$ nous a menés, dans tous les cas, à des situations impossibles, nous déduisons qu'elle est fausse, et ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}) &= \mathrm{card}(\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}) \\ &\forall i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\} \quad \forall j_k \in \{0,\ldots,n_{i_k}\} \quad k = 1,2\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Il est aussi facile à remarquer qu'aucune subdivision ultérieure ne changera les propriétés qui impliquent cette relation. Nous allons prouver que toute famille de polygones de contrôle $\mathcal{P}$ vérifiant (IV.11) forme un arrangement qui n'est pas seulement simple, mais aussi équivalent à $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ (rappelons que $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ satisfait (IV.4)).

Nous avons déjà montré que la condition (IV.22.i) est satisfaite, passons maintenant à (IV.22.ii). Si $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ ne vérifie pas cette relation, il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\}$, $j_k \in \{1,\ldots,n_{i_k}\}$ et $\ell_k \in \{0,\ldots,m_{i_k,j_k}\}$ pour $k = 1,2$ tels que soit

$$\mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1} \in]\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2}\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1-1} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2}\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}, \mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1}) \ ,$$

soit

$$\mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1} = \mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1-1} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2-1}\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2}, \mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2}\mathrm{P}^{(i_2,j_2)}_{\ell_2+1}, \mathrm{P}^{(i_1,j_1)}_{\ell_1+1})$$

comme présenté figure IV.14.

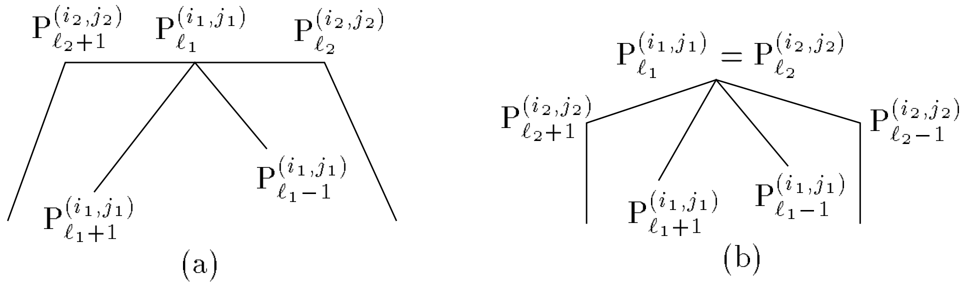

Figure IV.14 (a) *illustre la première des deux situation décrites ci-dessus,* (b) *la deuxième*

Supposons que nous nous situons dans le cas de la figure IV.14(a), l'autre cas se traite de manière tout-à-fait similaire. Il est facile à voir que nous ne pouvons pas avoir $\mathrm{P}_{\ell_1-1}^{(i_1,j_1)}, \mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)} \in \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}, \mathcal{P}_{i_2,j_2})$, car dans ce cas il résulte immédiatement $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} = \emptyset$, d'où une contradiction avec la définition de ε_0. Donc

$$\mathrm{P}_{\ell_1-1}^{(i_1,j_1)}, \mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}, \mathcal{P}_{i_2,j_2}) \tag{IV.12}$$

et en plus $\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$. Nous pouvons en déduire

$$\{\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)}, \mathrm{P}_{m_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}\} \cap reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2}) \neq \emptyset \tag{IV.13}$$

En effet, (IV.13) et le fait que $\mathrm{card}(\mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2}) = 1$ impliquent

$$\mathcal{B}_{i_1,j_1} \subset \bigcap_{k=0}^{m_{i_2,j_2}-1} \mathrm{DP}(\mathrm{P}_k^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{k+1}^{(i_2,j_2)}, \mathcal{P}_{i_2,j_2})$$

et cette région du plan est séparée en deux parties connexes par $\mathcal{B}_{i_2,j_2}$. Donc si $\mathrm{card}(\mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2})$ est impair, un et seulement un des points $\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)}$ et $\mathrm{P}_{m_{i_1,j_1}}^{(i_1,j_1)}$ appartient à $reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$. Soit $\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)}$ ce point. Si $\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1)} = \widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}$, nous avons encore une fois obtenu une contradiction avec la définition de ε_0. Sinon, un raisonnement identique au celui que nous venons de faire nous mène à la relation $\mathrm{P}_0^{(i_1,j_1-1)} \in reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de l'appartenance de $\widetilde{\mathrm{P}}_0^{(i_1,j_1)}$ à $reg(\mathcal{P}_{i_2,j_2}, \mathcal{B}_{i_2,j_2})$ et donc de la contradiction cherchée.

Ainsi, supposer que la famille $\mathcal{P}$ construite ne vérifie pas la condition (IV.22.ii) nous mène toujours à une contradiction, donc elle est fausse.

La condition (IV.22.iii) se traduit, dans le cas des arrangements de lignes polygonales, par

$$\mathrm{card}([\mathrm{P}_{\ell_1}^{(i_1,j_1)}\mathrm{P}_{\ell_1+1}^{(i_1,j_1)}] \cap [\mathrm{P}_{\ell_2}^{(i_2,j_2)}\mathrm{P}_{\ell_2+1}^{(i_2,j_2)}]) < \infty$$
$$\forall i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\} \forall j_k \in \{1,\ldots,n_{i_k}\} \forall \ell_k \in \{0,\ldots,m_{i_k,j_k}-1\}, k = 1,2$$

relation qui est évidemment satisfaite par l'ensemble de polygones de contrôle $\mathcal{P}$.

Le fait que l'ensemble $\cup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ est connexe résulte rapidement de la connexité de l'ensemble $\cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ et de (IV.11). En conclusion, la famille $\mathcal{P}$ satisfait toutes les conditions de la définition IV.22 et par conséquent $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ est un arrangement simple. L'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ étant lui aussi simple et comme $\mathrm{card}(\mathrm{I}) = n > 3$, l'hypothèse (h1) est vérifiée.

Pour vérifier l'hypothèse (h2), nous allons construire une fonction φ_0 faisant correspondre les sommets de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et ceux de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et nous prouverons qu'elle est bijective et satisfait (h2.1) et (h2.2).

Soit s un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Alors il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1,\ldots,n\}$ et $j_1 \in \{1,\ldots,n_{i_1}\}$, $j_2 \in \{1,\ldots,n_{i_2}\}$ tels que

$$s = \mathcal{B}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{B}_{i_2,j_2}$$

car $\mathcal{B}$ satisfait (IV.4). De la relation (IV.11) il résulte que $\mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}$ est un sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ et nous posons $\varphi_0(s) = \mathcal{P}_{i_1,j_1} \cap \mathcal{P}_{i_2,j_2}$, et ceci pour tous les sommets de l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Le fait que la fonction φ_0 ainsi définie est bijective vient immédiatement de la relation (IV.11), et le fait qu'elle satisfait (h2.1) aussi. Pour la condition (h2.2), il suffit de remarquer que l'ordre des courbes de Bézier $\mathcal{B}_{i,j}$, $j \in \{1,\ldots,n_i\}$, dans la polycourbe

$\mathcal{B}_i$ est le même que l'ordre des B-polygones $\mathcal{P}_{i,j}$, $j \in \{1, \ldots, n_i\}$, dans le polygone de contrôle $\mathcal{P}_i$. En utilisant toujours (IV.11), nous obtenons que φ_0 satisfait aussi (h2.2). En plus, la condition (IV.11) est invariante à la subdivision de de Casteljau, toute famille de polygones de contrôle obtenue en l'utilisant à partir de la famille courante $\mathcal{P}$ qui satisfait (IV.11) vérifiera aussi cette condition, donc les hypothèses (h1) et (h2).

Les propriétés des courbes de Bézier impliquent de manière triviale le fait que les arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ satisfont (IV.23.i), et ceci quel que soit le nombre de subdivisions appliquées aux polycourbes de $\mathcal{B}$.

La supposition sur les extrémités des polycourbes $\mathcal{B}_i$ faite dans l'hypothèse du théorème nous dit qu'il n'existe pas de sommet de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ qui soit une extrémité de polycourbe. D'un autre côté, la définition de ε_1, la valeur utilisée pour imposer $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1} \cap \widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2} \neq \emptyset$ (aussi bien dans le deuxième cas que dans le troisième cas du point de vue des positions relatives des courbes $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$), nous assure que dans l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ non plus il ne peut exister de sommet qui soit une extrémité d'un polygone de contrôle. En plus, il est évident que si $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_1,j_1}$ traverse $\widetilde{\mathcal{B}}_{i_2,j_2}$ de gauche à droite dans leur point d'intersection, alors $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_1,j_1}$ traverse $\widetilde{\mathcal{P}}_{i_2,j_2}$ de gauche à droite dans leur point d'intersection et réciproquement, pour tous $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1 \in \{1, \ldots, n_{i_1}\}$ et $j_2 \in \{1, \ldots, n_{i_2}\}$. Ces deux dernières propriétés sont aussi invariantes à la subdivision de de Casteljau, donc la condition (IV.23.ii) est satisfaite par l'arrangement $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ courant et par tous ceux obtenus à partir de lui par subdivision.

Nous pouvons ainsi conclure la preuve du théorème, car la proposition IV.23 peut être appliquée aux arrangements $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

$\square$