Chapitre II

Enveloppe convexe d'une polycourbe : résultats théoriques

II.1. Introduction

L'enveloppe convexe est un sujet important de la géométrie algorithmique. Sans parler de son intérêt intrinsèque, il y a des nombreux problèmes qui peuvent être simplifiés en l'utilisant. Par exemple, la détection de l'intersection de deux objets est plus facile si les objets sont convexes, et ainsi tester si les enveloppes convexes de deux objets sont disjointes est un premier test efficace dans la détection de l'intersection de ces deux objets. L'enveloppe convexe trouve aussi des applications dans la robotique ou la vision.

Le problème de l'enveloppe convexe d'objets "linéaires" du plan (ensembles de points, segments, polygones) peut être considéré comme bien résolu. En particulier, les solutions apportées au problème de l'enveloppe convexe d'un polygone simple sont satisfaisantes aussi bien du point de vue théorique que du point de vue algorithmique. Par contre, le problème, bien plus complexe, du calcul de l'enveloppe convexe d'un objet plan dont la frontière est composée par des courbes a été nettement moins étudié. Dans tous les articles traitant de ce sujet que nous avons trouvés [Baj91], [Dob90], [Sch87], ce problème a été abordé plus ou moins de la même manière, en considérant que certaines opérations facilement réalisables pour des points et des segments le sont aussi pour des courbes. Parmi ces opérations nous pouvons citer le calcul des droites d'appui communes à deux courbes et le calcul des points d'intersection d'une courbe et d'une droite. Évidemment, en remplaçant dans la phrase précédente "courbe" par "segment" on obtient des problèmes de complexité O(1), dont la résolution est exacte. Dans ce cas, on sait également prendre en compte des problèmes arithmétiques "fins" induits par la manipulation des nombres réels en machine. Mais la résolution des problèmes identiques étendus à des courbes, polynômiales par exemple, implique la résolution d'équations algébriques de degré élevé. Même s'il existe des méthodes numériques performantes, l'inconvénient de cette approche est qu'elle ignore, dans les phases des calculs numériques, la géométrie et la topologie de l'objet considéré. Ceci peut conduire à des incohérences dans la topologie de l'enveloppe convexe obtenue.

Un autre point important à noter est que, dans le cas des objets "linéaires", calculer l'enveloppe convexe revient sans ambiguïté à trouver une liste ordonnée de points qui sont les sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe, en précisant si l'ordre considéré est trigonométrique ou inverse. Par contre, dans le cas des objets bornés par une union de courbes, la frontière de l'enveloppe convexe est un objet géométrique que l'on peut décrire de plusieurs façons différentes. En conséquence, la description attendue comme résultat doit être précisée. Dans les articles cités, la nature exacte du résultat cherché se définit le plus souvent de façon implicite et naturelle à partir de la méthode proposée.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux manières de décrire l'enveloppe convexe d'une polycourbe. La première consiste à fournir un objet qui approche, en termes de distance, l'enveloppe convexe de la polycourbe, cet objet pouvant être un polygone ou une polycourbe, mais ayant la propriété de pouvoir être calculé sans résolution d'équations de degré supérieur à 1. La deuxième manière, sur laquelle l'accent sera mis, consiste à donner une description exacte et complète de la topologie de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Ainsi, nous définirons de façon rigoureuse la notion de *structure topologique* de l'enveloppe convexe et nous verrons que si par son intermédiaire l'enveloppe convexe n'est pas exprimée explicitement, elle n'est pas moins correcte et complète.

La troisième section de ce chapitre est dédiée à l'enveloppe convexe approchée, étudiée d'abord dans le cadre général et ensuite pour les polycourbes de Bézier. La quatrième section est consacrée à l'étude des aspects topologiques du problème de l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier. Elle commence par la définition annoncée de la structure topologique de l'enveloppe convexe, et après nous montrons de quelle façon cette structure topologique peut être trouvée à partir du polygone de contrôle de la polycourbe de Bézier. À la fin de cette section nous établissons les équations permettant de décrire l'enveloppe convexe explicitement. Remarquons que tout au long de ce chapitre les polycourbes (de Bézier ou pas) seront implicitement considérées fermées.

II.2. Concentré de chapitre (II)

Ce chapitre formalise la notion de topologie de l'enveloppe convexe et établit, pour une polycourbe de Bézier donnée, l'existence d'un polygone de contrôle fournissant la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Voila pourquoi les deux premiers niveaux de lecture ne seront plus si différents qu'au premier chapitre - et plus très différents du troisième, d'ailleurs. Si vous avez du mal à comprendre ces histoires de polycourbe qui a tantôt n courbes de Bézier, tantôt n_0, ou le fait que je parle d'*un* polygone de contrôle et non pas *du* polygone de contrôle, relisez attentivement la remarque de la page 25.

Premier niveau. Dans la section II.3, les preuves (lemmes II.1 et II.3) peuvent être ignorées, elles sont d'ailleurs assez faciles. Dans la section II.4, la définition II.4 nous donne la notion de topologie de l'enveloppe convexe, tout en restant à un niveau intuitif, et c'est la définition II.6 qui formalise ce concept ; le lemme II.7 montre que les deux ont la même signification. Les paragraphes II.4.1 et II.4.3 devraient donc être lus en entier - bien sûr, la démonstration du lemme II.7 n'est pas nécessaire. Dans le paragraphe II.4.2, le lemme II.5 donne un résultat nécessaire quand le polygone de contrôle de la polycourbe n'est pas simple, mais seulement pseudo-simple ; sa preuve n'a pas à être lue. Dans le paragraphe II.4.4 nous établissons enfin l'existence du polygone de contrôle fournissant la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe, et dans le paragraphe II.4.5 sont données les équations permettant de calculer explicitement cette enveloppe convexe.

Quand même, tous ces résultats sont de nature purement théorique, il n'ont presqu'aucune "utilité algorithmique". Ainsi, si vous êtes intéressé uniquement par le "comment faire pour", lisez seulement les définitions II.4 et II.6 avec les commentaires qui les suivent et l'énoncé du lemme II.7, pour la topologie de l'enveloppe convexe, et la section II.3 (sans les preuves), pour l'approximation de l'enveloppe convexe, et passez au chapitre suivant.

Deuxième niveau. Comme pour le premier niveau une lecture quasi-intégrale du chapitre à été recommandée, je ne peux que remarquer que la preuve du théorème II.9 peut être lue assez facilement. La valeur ε_0 de l'énoncé de ce théorème est une mesure de la dégénérescence de la polycourbe. La dégénérescence est définie au chapitre suivant (définition III.7), car de point de vue théorique une polycourbe dégénérée n'a pas à être l'objet d'un traitement particulier, tandis que de point de vue algorithmique si.

II.3. Enveloppe convexe approchée

Conformément à l'idée exposée dans l'introduction de cette thèse, nous n'allons travailler directement sur une polycourbe donnée, mais sur des polygones approchant cet objet dans un sens qui sera précisé, en cherchant ainsi une approximation de l'enveloppe convexe de la polycourbe. La question qui se pose naturellement est : si un polygone $\mathcal{P}$ approche une polycourbe $\mathcal{C}$ avec une erreur ε (dans un sens précisé), quelle sera l'erreur ε' avec laquelle la solution $S(\mathcal{P})$ d'un certain problème pour le polygone approchera la solution $S(\mathcal{C})$ du même problème pour la polycourbe ? Dans notre cas, le problème posé est celui de l'enveloppe convexe et pour répondre à cette question nous préciserons le sens dans lequel le polygone approche la polycourbe et nous donnerons l'évaluation de ε' en fonction de ε.

II.3.1. *La polycourbe générale*

Rappelons que l'enveloppe convexe d'un objet donné est le plus petit convexe contenant l'objet ; elle peut s'écrire

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid n \in I\!N^*,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ a_i \in \mathcal{A}\ et\ \lambda_i \geq 0\ et\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\},$$

$\mathcal{A}$ étant un ensemble quelconque de points qui, dans notre cas, seront des points du plan.

Nous nous intéressons ici à l'enveloppe convexe approchée au sens de la distance de Hausdorff. Nous cherchons donc, pour une polycourbe donnée $\mathcal{C}$, un polygone $\mathcal{P}$ tel que la distance de Hausdorff entre l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ et celle de $\mathcal{C}$ soit inférieure à une tolérance donnée ε. Le résultat suivant nous indique quels polygones $\mathcal{P}$ vont satisfaire cette condition.

Lemme II.1. – *Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux polycourbes. Alors*

$$\delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{E}(\mathcal{C}_1), \mathcal{E}(\mathcal{C}_2)\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2).$$

Preuve – Soit $r_0 = \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. En utilisant (I.4), pour prouver l'inégalité de l'énoncé il faut et il suffit de prouver que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1)\ \exists \mathrm{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_2) \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$$

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_2)\ \exists \mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1) \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$$

Remarque Pour toute polycourbe $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \mathcal{E}\big(\overline{reg(\mathcal{C})}\big)$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}_1)$. Par conséquent, $\mathrm{A} \in \mathcal{E}\big(\overline{reg(\mathcal{C}_1)}\big)$ et alors il existe $n \in I\!N^*$, $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n \in \overline{reg(\mathcal{C}_1)}$ tels que $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$. Comme $\mathrm{A}_i \in \overline{reg(\mathcal{C}_1)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\mathrm{B}_i \in \overline{reg(\mathcal{C}_2)}$ tel que $\mathrm{d}(\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i) \leq r_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{B}_i$. Nous voulons prouver que $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leq r_0$, et nous allons montrer cette inégalité par récurrence. Pour $n = 2$, nous aurons la situation de la figure II.1, où le point M est considéré tel que $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{A}_1 + (1-\lambda)\mathrm{B}_2$ $(\mathrm{A} = \lambda \mathrm{A}_1 + (1-\lambda)\mathrm{A}_2,\ \mathrm{B} = \lambda \mathrm{B}_1 + (1-\lambda)\mathrm{B}_2)$. Alors nous avons $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{d}(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2)$ et $\mathrm{d}(\mathrm{B},\mathrm{M}) = (1-\lambda)\mathrm{d}(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1)$. Mais $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{M}) + \mathrm{d}(\mathrm{B},\mathrm{M})$, donc

$$\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leq \lambda \mathrm{d}(\mathrm{A}_2,\mathrm{B}_2) + (1-\lambda)\mathrm{d}(\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1) \leq \lambda r_0 + (1-\lambda) r_0 = r_0.$$

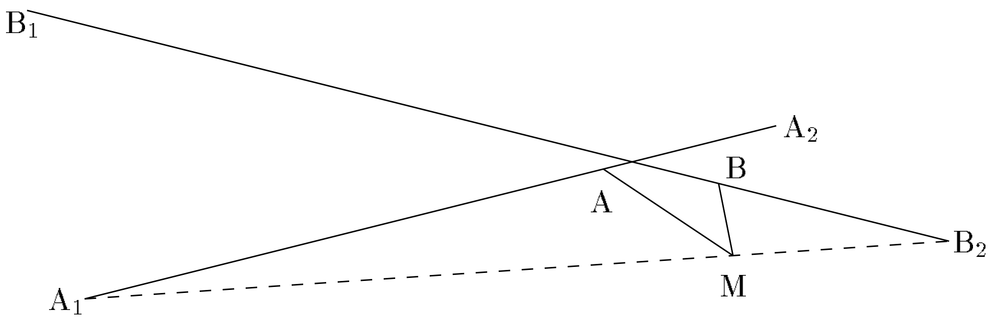

Figure II.1

Supposons maintenant que la relation est vérifiée pour $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ et $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{B}_i$ et nous voulons prouver qu'elle est vérifiée pour $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \mathrm{A}'_i$ et $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \mathrm{B}'_i$. Notons

$$\lambda_i = \gamma_i \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ et } \lambda_n = \gamma_n + \gamma_{n+1},$$

$$\mathrm{A}_i = \mathrm{A}'_i \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ et } \mathrm{A}_n = \frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n \mathrm{A}'_n + \gamma_{n+1}\mathrm{A}'_{n+1})$$

et

$$\mathrm{B}_i = \mathrm{B}'_i \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ et } \mathrm{B}_n = \frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n \mathrm{B}'_n + \gamma_{n+1}\mathrm{B}'_{n+1}).$$

Alors, comme $\mathrm{d}(\mathrm{A}'_n,\mathrm{B}'_n) \leq r_0$, $\mathrm{d}(\mathrm{A}'_{n+1},\mathrm{B}'_{n+1}) \leq r_0$ et $\frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n + \gamma_{n+1}) = 1$, il vient $\mathrm{d}(\mathrm{A}_n,\mathrm{B}_n) \leq r_0$. En plus,

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \mathrm{A}'_i = \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \mathrm{A}'_i + (\gamma_n + \gamma_{n+1})\frac{1}{\gamma_n + \gamma_{n+1}}(\gamma_n \mathrm{A}'_n + \gamma_{n+1}\mathrm{A}'_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathrm{A}_i + \lambda_n \mathrm{A}_n = \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

et de même $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{B}_i$. Par hypothèse, $\mathrm{d}(\mathrm{A}_i,\mathrm{B}_i) \leq r_0 \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ et nous avons aussi prouvé que $\mathrm{d}(\mathrm{A}_n,\mathrm{B}_n) \leq r_0$, donc nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence et on obtient $\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leq r_0$.

□

Ce lemme a comme conséquence immédiate le résultat suivant :

Corollaire II.2. – *Si $\mathcal{C}$ est une polycourbe et $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de polygones qui converge vers $\mathcal{C}$ au sens de la distance de Hausdorff, alors $\{\mathcal{E}(\mathcal{P}_n)\}_{n\geq 0}$ converge vers $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ au sens de la distance de Hausdorff.*

II.3.2. *La polycourbe de Bézier*

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que si une suite de polygones converge vers une polycourbe au sens de la distance de Hausdorff, alors la suite des enveloppes convexes des polygones converge vers l'enveloppe convexe de la polycourbe. Mais dans le cas général, construire une suite de polygones qui converge vers une polycourbe donnée est un problème délicat, raison pour laquelle nous avons recours aux polycourbes de Bézier.

La convergence au sens de la distance de Hausdorff du B-polygone d'une courbe de Bézier vers la courbe par la subdivision de de Casteljau est une propriété des courbes de Bézier. Mais il se pose la question de la convergence, par subdivision, du polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier vers la polycourbe, et ainsi nous sommes amenés à nous demander quelle est la relation liant la distance de Hausdorff entre une polycourbe de Bézier et son polygone de contrôle et les distances de Hausdorff entre les courbes de Bézier qui composent la polycourbe et leurs B-polygones respectifs. Le lemme suivant répond à cette question.

Lemme II.3. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier de polygone de contrôle $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i$. Alors*

$$\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B},\mathcal{P}) \leq \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)$$

Preuve – Soit $\delta = \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i,\mathcal{P}_i)$. Alors pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ nous aurons $\mathcal{P}_i \subset \mathbf{B}(\mathcal{B}_i,\delta)$ et $\mathcal{B}_i \subset \mathbf{B}(\mathcal{P}_i,\delta)$. Il en résulte $\mathcal{P} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathbf{B}(\mathcal{B}_i,\delta)$ et $\mathcal{B} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathbf{B}(\mathcal{P}_i,\delta)$. Mais

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{B}(\mathcal{B}_i,\delta) &= \bigcup_{i=1}^{n}\{\mathrm{P}\in I\!R^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathcal{B}_i) < \delta\}\\ &= \{\mathrm{P}\in I\!R^2 \mid \exists i\in\{1,2,\ldots,n\} \text{ tel que } \mathrm{d}(\mathrm{P},\mathcal{B}_i) < \delta\}\\ &= \{\mathrm{P}\in I\!R^2 \mid \mathrm{d}(\mathrm{P},\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i) < \delta\} = \mathbf{B}(\mathcal{B},\delta)\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{B}(\mathcal{P}_i,\delta) = \mathbf{B}(\mathcal{P},\delta)$$

Donc $\mathcal{P} \subset \mathbf{B}(\mathcal{B},\delta)$ et $\mathcal{B} \subset \mathbf{B}(\mathcal{P},\delta)$ et ainsi, conformément à la définition de la distance de Hausdorff, $\delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B},\mathcal{P}) \leq \delta$. □

La convergence du polygone de contrôle d'une polycourbe de Bézier vers la polycourbe par la subdivision de de Casteljau est une conséquence immédiate de ce lemme. En appliquant le résultat du cas général, nous pouvons ainsi déduire que l'enveloppe convexe de la suite de polygones de contrôle obtenus par subdivision de de Casteljau converge au sens de la distance de Hausdorff vers l'enveloppe convexe de la polycourbe.

II.4. Enveloppe convexe topologique

Même si les aspects topologiques du problème de l'enveloppe convexe peuvent être discutés dans le cas général, après la construction d'un cadre d'étude formel (à commencer par la définition de ces aspects topologiques), nous nous contenterons d'étudier la topologie de l'enveloppe convexe uniquement pour les polycourbes de Bézier, que nous appellerons dans ce qui suit des polycourbes, tout risque de confusion étant écarté.

Le résultat obtenu dans le paragraphe précédent n'est pas très satisfaisant si nous nous intéressons à la topologie de l'enveloppe convexe, car la convergence au sens de la distance de Hausdorff est assez faible topologiquement. En effet, il peut exister une suite d'objets $\{\mathcal{O}_i\}_{i\geq 1}$ convergeant vers un objet $\mathcal{O}$ tels que la topologie de $\mathcal{O}$ soit fondamentalement différente de la topologie des $\mathcal{O}_i$, par exemple tous les $\mathcal{O}_i$ peuvent être non-simples et pourtant $\mathcal{O}$ peut être simple.

Mais qu'est-ce que c'est que la topologie de l'enveloppe convexe d'une polycourbe ?

II.4.1. *Définition du problème*

Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe, où $\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\ ;\ [0,1])$ sont des courbes de Bézier complètement convexes pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition II.4. – *Nous dirons que l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ donne la (une des) structure(s) topologique(s) de l'enveloppe convexe de la polycourbe si la courbe frontière de cette enveloppe convexe $\mathcal{E}$ peut être écrite sous la forme*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{p} \left(\mathcal{B}_{i_k}\big|_{[\mathrm{R}_{i_k}\mathrm{R}'_{i_k}]} \cup [\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}] \right) , \qquad \text{(II.1)}$$

où $\mathrm{R}_{i_k}, \mathrm{R}'_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est la droite réalisant l'enveloppe convexe droite des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$.

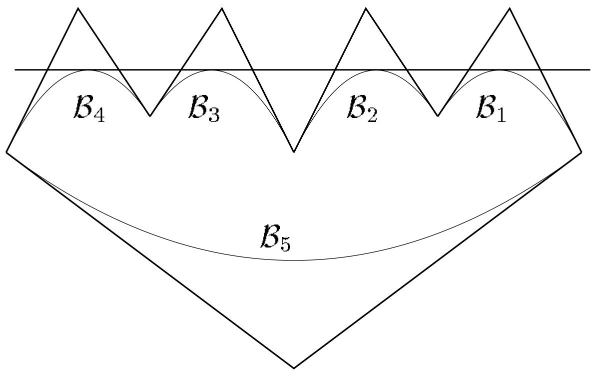

Figure II.2

Si l'ensemble $\mathcal{I}$ est tel que $i_1 = \min_{k=1}^{p} i_k$ (ce que nous allons toujours considérer, sauf mention contraire), alors il n'est pas difficile à voir que la simplicité de la polycourbe implique $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$. Il est aussi évident qu'un tel ensemble $\mathcal{I}$ existe pour toute polycourbe, mais il existe des polycourbes pour lesquelles il n'est pas unique, donc il y aura plusieurs structures topologiques de l'enveloppe convexe de la polycourbe. Une polycourbe se trouvant dans cette situation est présentée dans la figure II.2, et nous pouvons voir que les ensembles $\mathcal{I}_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{I}_2 = \{1,2,4,5\}$, $\mathcal{I}_3 = \{1,3,4,5\}$, $\mathcal{I}_4 = \{1,4,5\}$ donnent chacun une structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Pour une polycourbe donnée, la structure topologique de l'enveloppe convexe décrit celle-ci de manière implicite, mais complète et correcte. Une description explicite de la frontière de l'enveloppe convexe ne peut être obtenue, généralement, que par la résolution de systèmes d'équations qui peuvent être de degré assez élevé. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre nous établirons les systèmes d'équations permettant de calculer les coordonnées des points R_{i_k} et R'_{i_k} de la formule (II.1).

Ainsi, nous nous proposons de trouver, pour une polycourbe donnée $\mathcal{B}$, un ensemble $\mathcal{I}$ comme décrit dans la définition II.4, et ceci en travaillant uniquement avec le polygone de contrôle de la polycourbe. Plus exactement, nous cherchons un polygone de contrôle tel que la structure topologique de son enveloppe convexe soit la même que celle de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

II.4.2. *Résultat préliminaire*

Une première propriété concernant la topologie de l'enveloppe convexe a déjà été mentionnée, il s'agit du fait que l'ensemble $\mathcal{I}$ de la définition II.4 est ordonné pour toute polycourbe. Par conséquent, un polygone de contrôle dont l'enveloppe convexe a la même structure topologique que celle de la polycourbe doit satisfaire aussi cette propriété. Corroboré avec le fait que les B-polygones des courbes de Bézier composant la polycourbe sont simples et convexes, cela implique que les sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle doivent être ordonnés. Nous aurions tout de suite cette propriété si nous savions que le polygone de contrôle est simple, mais nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existe des polycourbes pour lesquelles il n'existe pas de polygone de contrôle simple. Mais nous pouvons prouver que la propriété ci-dessus est satisfaite aussi par les polygones pseudo-simples.

Lemme II.5. – *Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ un polygone pseudo-simple et soit $\mathcal{Q} = \mathrm{P}_{i_1}\ldots\mathrm{P}_{i_m}$ le polygone frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$, avec $m \leq n$. Alors, en considérant $i_1 = \min\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, nous aurons $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.*

Preuve – Si le polygone $\mathcal{P}$ est simple, la conclusion est évidemment vraie. Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas simple, mais, sans restriction de la généralité, admettons aussi que tous deux sommets successifs de $\mathcal{P}$ sont distincts. Alors il existe $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ avec $i < j+1$ tels que $[\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}] \cap [\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}] \neq \emptyset$. Mais $\mathcal{P}$ est pseudo-simple, donc les sommets $\mathrm{P}_{i+1}, \mathrm{P}_{i+2}, \ldots, \mathrm{P}_j$ sont colinéaires. Par conséquent, il existe $a < n$ et

$$k_1, \ldots, k_a, \ell_1, \ldots, \ell_a \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ avec } k_1 < \ell_1 \leq k_2 < \ldots < \ell_a$$

tels que (figure II.3)

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{P}_i \notin \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_{i+1} & \forall i \in \left\{\ell_j, \ell_j+1, \ldots, k_{j+1}\right\} \\ \mathrm{P}_i \in \mathrm{P}_{k_j}\mathrm{P}_{k_{j+1}} & \forall i \in \left\{k_j, k_j+1, \ldots, \ell_j\right\} \end{array}\right. \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, a\}$$

Considérons le polygone $\widetilde{\mathcal{P}}$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en éliminant tous les sommets P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $i \in \left\{k_j+1, \ldots, \ell_j-1\right\}$; si il existe $j \in \{1, \ldots, a\}$ tel que $\mathrm{P}_{k_j} = \mathrm{P}_{\ell_j}$, alors nous éliminons aussi le point P_{k_j}.

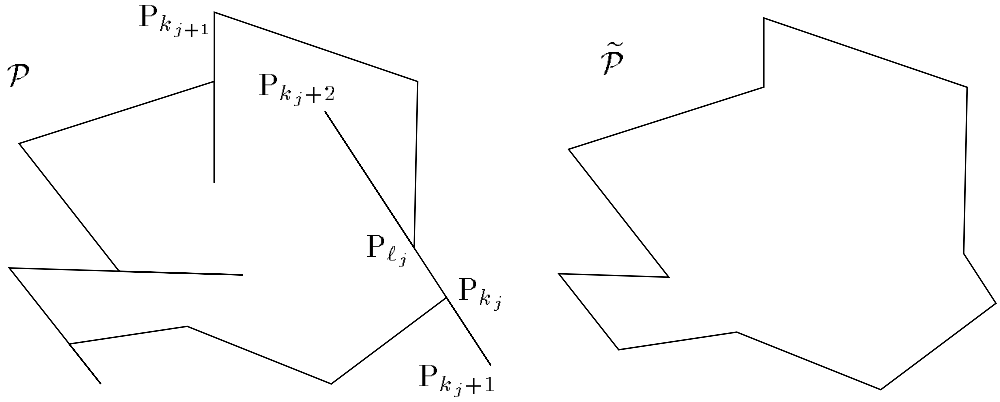

Figure II.3 *Un polygone pseudo-simple $\mathcal{P}$ et le polygone $\widetilde{\mathcal{P}}$ associé.*

Nous pouvons voir facilement que $\widetilde{\mathcal{P}}$ est un polygone simple et $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, a\}$, soit $r_j \leq s_j \in \left\{k_j, k_j+1, \ldots, \ell_j\right\}$ tels que $\mathrm{P}_i \in \left[\mathrm{P}_{r_j}\mathrm{P}_{s_j}\right]$ pour tout $i \in \left\{k_j, \ldots, \ell_j\right\}$. Nous introduisons les notations (figure II.4)

$$J_1 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \,\middle|\, \mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_2 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \,\middle|\, \mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_3 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \,\middle|\, \mathrm{P}_{r_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})}, \mathrm{P}_{s_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$
$$J_4 = \left\{ j \in \{1, \ldots, a\} \,\middle|\, \mathrm{P}_{r_j} \notin \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \right\}$$

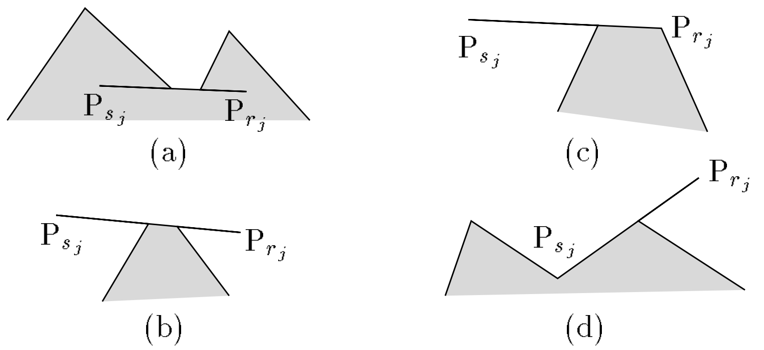

Figure II.4 (a) $j \in J_1$; (b) $j \in J_2$; (c) $j \in J_3$; (d) $j \in J_4$

Il est évident que $\displaystyle\bigcup_{\alpha=1}^{4} J_\alpha = \{1, \ldots, a\}$ et $J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset \ \forall \alpha \neq \beta \in \{1, \ldots, 4\}$.
Soit $\mathcal{R}$ le polygone dont les sommets sont :

- tous les P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \dots, a\}$ tel que $i \in \big\{\ell_j + 1, \dots, k_{j+1} - 1\big\}$;
- tous les P_{k_j} et P_{ℓ_j} avec $j \in J_1$;
- tous les P_{r_j} et P_{s_j} avec $j \in J_2$;
- tous les P_{s_j} avec $j \in J_3$;
- tous les P_{r_j} avec $j \in J_4$

considérés en ordre croissant des indices. La figure suivante reprend le polygone $\mathcal{P}$ de la figure II.3 et présente le polygone $\mathcal{R}$ qui lui est associé.

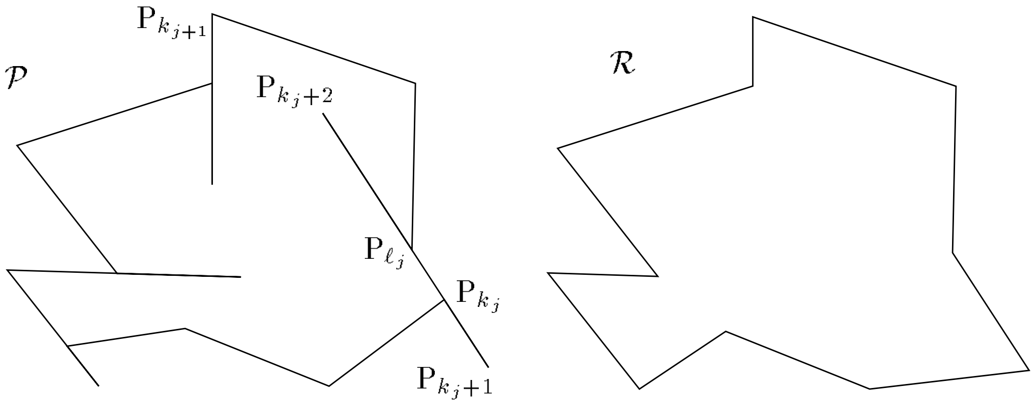

Figure II.5 *Dans ce cas, $\mathcal{R}$ est simple.*

Le polygone $\mathcal{R}$ peut ne pas être simple. Nous allons noter $r(\mathcal{R})$ l'union des toutes les parties bornées du plan ayant la frontière incluse dans $\mathcal{R}$. Évidemment $\overline{r(\mathcal{R})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et il est facile à remarquer que $\overline{r(\mathcal{R})} = \mathcal{A}$, où

$$\mathcal{A} = \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \cup \Bigg(\bigcup_{j \in J_2 \cup J_4} \overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_j - 1} \mathrm{P}_{k_j} \mathrm{P}_{r_j})} \Bigg) \cup \Bigg(\bigcup_{j \in J_2 \cup J_3} \overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{\ell_j + 1} \mathrm{P}_{\ell_j} \mathrm{P}_{s_j})} \Bigg)$$

Nous pouvons donc en déduire que $\overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Prouvons maintenant que $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{R})$. L'inclusion $\mathcal{E}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ est immédiate, car tous les sommets de $\mathcal{R}$ sont des sommets de $\mathcal{P}$. Pour démontrer l'inclusion inverse, nous montrons que $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Tous les sommets P_i pour lesquels il existe $j \in \{1, \dots, a\}$ tel que $i \in \big\{\ell_j + 1, \dots, k_{j+1} - 1\big\}$ appartiennent à $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ par définition. Nous avons aussi $\forall j \in \{1, \dots, a\}$ $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$:

- si $j \in J_1$, alors $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_2$, alors P_{r_j} et P_{s_j} sont par définition des sommets de $\mathcal{R}$ et donc P_{r_j} *et* P_{s_j} appartiennent à $\mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_3$, alors $\mathrm{P}_{r_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et pt_{s_j} est un sommet de $\mathcal{R}$ et donc $\mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$;
- si $j \in J_4$, alors P_{r_j} est un sommet de $\mathcal{R}$ et donc $\mathrm{P}_{r_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ et $\mathrm{P}_{s_j} \in \overline{reg(\widetilde{\mathcal{P}})} \subset \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Mais $\mathrm{P}_{r_j}, \mathrm{P}_{s_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ implique $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})\ \forall j \in \{1, \dots, a\}$. En conclusion, $\mathrm{P}_i \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et ainsi, en effet, $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{R})$.

Comme nous avons déjà remarqué, il est possible que le polygone $\mathcal{R}$ ne soit pas simple. Les lignes polygonales $\mathcal{P}_j = \mathrm{P}_{\ell_j+1} \mathrm{P}_{\ell_j+2} \dots \mathrm{P}_{k_{j+1}-1}$ sont simples pour tout $j \in \{1, \dots, a\}$ et toutes ces lignes polygonales et les segments $\big[\mathrm{P}_{r_j} \mathrm{P}_{s_j}\big]$, $j \in \{1, \dots, a\}$, sont respectivement disjoints. Donc si $\mathcal{R}$ n'est pas simple, alors il existe $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, a\}$ tels que

$$]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[\, \cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset \;\; ou \;\;]\mathrm{P}_{s_{j_1}}\mathrm{P}_{\ell_{j_1}+1}[\, \cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset$$

ou

$$]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[\, \cap \, [\mathrm{P}_{r_{j_2}}\mathrm{P}_{s_{j_2}}] \neq \emptyset \;\; ou \;\;]\mathrm{P}_{s_{j_1}}\mathrm{P}_{\ell_{j_1}+1}[\, \cap \, [\mathrm{P}_{r_{j_2}}\mathrm{P}_{s_{j_2}}] \neq \emptyset$$

Supposons qu'il existe $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, a\}$ tels que $]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[\, \cap \mathcal{P}_{j_2} \neq \emptyset$. Alors il y aura des sommets de la ligne polygonale $\mathcal{P}_{j_2}$ qui appartiennent à $\overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{k_{j_1}}\mathrm{P}_{r_{j_1}})}$, sommets qui peuvent être consécutifs ou non. Chacun de ces sommets peut être écrit comme une combinaison convexe des points $\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}$, $\mathrm{P}_{k_{j_1}}$ et $\mathrm{P}_{r_{j_1}}$, donc en aucun cas ils ne seront des sommets de $\mathcal{Q}$, le polygone frontière de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, donc de $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. Nous pouvons ainsi éliminer ces sommets du polygone $\mathcal{R}$ sans pour autant modifier $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. Le segment $]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[$ ne coupera plus la ligne polygonale $\mathcal{P}'_{j_2}$ restée après l'élimination des sommets appartenant à $\overline{reg(\Delta \mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{k_{j_1}}\mathrm{P}_{r_{j_1}})}$. Par contre, cette nouvelle ligne polygonale, $\mathcal{P}'_{j_2}$, peut couper d'autres "parties" de $\mathcal{R}$ et perpétuer donc sa non-simplicité. Mais nous pouvons appliquer à $\mathcal{P}'_{j_2}$ exactement le même raisonnement qu'au segment $]\mathrm{P}_{k_{j_1}-1}\mathrm{P}_{r_{j_1}}[$ et donc éliminer de nouveau certains sommets de $\mathcal{R}$ tels que la ligne polygonale $\mathcal{P}'_{j_2}$ ne coupe plus $\mathcal{R} \setminus \mathcal{P}'_{j_2}$. Nous ne pouvons pas cycler indéfiniment en appliquant cette méthode, car $\mathcal{R}$ a un nombre fini de sommets, nous obtenons donc en un nombre fini de pas, en utilisant exactement le même procédé pour les trois autres cas de non-simplicité de $\mathcal{R}$, un polygone $\widetilde{\mathcal{R}}$ qui est simple et qui, compte tenant de la façon d'éliminer des sommets de $\mathcal{R}$ employée, aura la même enveloppe convexe que $\mathcal{R}$.

Il existe donc un polygone simple $\widetilde{\mathcal{R}}$ dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$ et tel que $\mathcal{E}(\mathcal{P}) = \mathcal{E}(\widetilde{\mathcal{R}})$ et ainsi que les indices de ses sommets soient en ordre croissant, car $\mathcal{R}$ avait cette propriété et elle ne se perd évidemment pas dans le processus d'élimination de sommets de $\mathcal{R}$. Comme $\widetilde{\mathcal{R}}$ est simple, le polygone frontière de son enveloppe convexe, $\mathcal{Q}$, aura les indices des sommets en ordre croissant parmi ses sommets, ce qui conclut la démonstration du lemme. □

II.4.3. *Pertinence topologique : définition*

Dans ce paragraphe, nous allons formaliser la notion d'identité des structures topologiques des enveloppes convexes de la polycourbe et de son polygone de contrôle.

Définition II.6. – *En utilisant les notations habituelles, soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier de polygone de contrôle $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{Q}$ le polygone frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ la courbe frontière de l'enveloppe convexe de $\mathcal{B}$. Nous dirons que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle, $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, est topologiquement pertinente pour l'enveloppe convexe de la polycourbe de Bézier, $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(II.6.i) $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$

(II.6.ii) $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\Big(\bigcup_{j \neq i} \mathcal{P}_j\Big)\Big) \Longrightarrow \mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\Big(\bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_j\Big)$

pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Avant de prouver que la notion de pertinence topologique est vraiment une formalisation de la notion d'identité des structures topologiques, établissons une convention concernant le polygone $\mathcal{Q}$. Ce polygone est le polygone frontière de l'enveloppe convexe du polygone $\mathcal{P}$, par conséquent, si l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$, il existe $j_{i_k} \in \{0, \ldots, m_{i_k}\}$ et $\ell_{i_k} \in \{0, \ldots, m_{i_k} - j_{i_k} - 1\}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ tels que

$$\mathcal{Q} = \mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}} \mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+1} \ldots \mathrm{P}^{(i_1)}_{j_{i_1}+\ell_{i_1}} \mathrm{P}^{(i_2)}_{j_{i_2}} \ldots \mathrm{P}^{(i_p)}_{j_{i_p}+\ell_{i_p}} \tag{II.2}$$

Si une des extrémités des courbes de Bézier constituant la polycourbe, disons $\mathrm{P}^{(i)}_0 = \mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}}$, est un sommet de $\mathcal{Q}$, alors, dans la notation ci-dessus pour le polygone $\mathcal{Q}$, ce sommet sera toujours considéré un sommet de $\mathcal{P}_i$ et non pas un de $\mathcal{P}_{i-1}$, car pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ nous avons $j_{i_k} + \ell_{i_k} < m_{i_k}$.

La convention dont nous parlions consiste à prendre toujours le polygone $\mathcal{Q}$ maximal du point de vue du nombre de sommets, ce qui veut dire que si le sommet $\mathrm{P}^{(i)}_j$ du polygone de contrôle a la propriété $\mathrm{P}^{(i)}_j \in \delta(\mathcal{E}(\mathcal{P}))$, alors il est un sommet de $\mathcal{Q}$. Dans un cas comme celui de la figure II.6, où trois sommets de $\mathcal{P}$ sont alignés et la droite qu'ils engendrent est une droite d'appui du polygone, cette condition implique l'appartenance du sommet $\mathrm{P}^{(i)}_j$ à l'ensemble des sommets du polygone $\mathcal{Q}$.

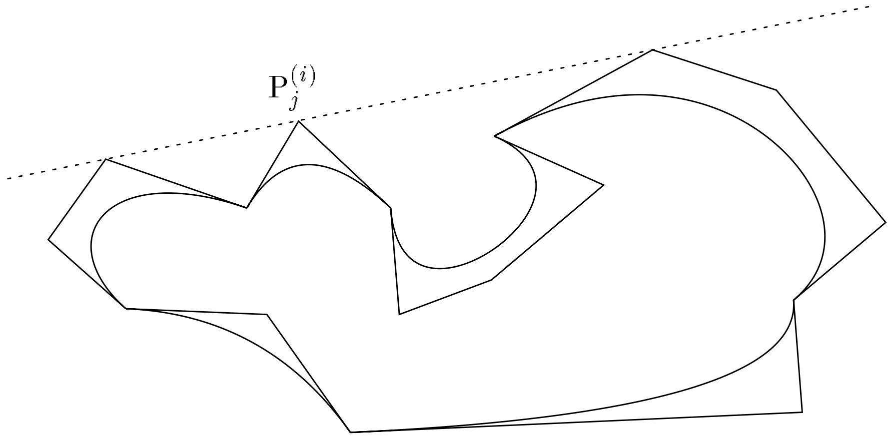

Figure II.6

La condition suivante est une conséquence immédiate de la convention que nous venons de faire :

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset \Longrightarrow i \in \{i_1, \ldots, i_p\} \tag{II.3}$$

Si $\mathcal{P}$ n'a pas de sommets alignés, la condition (II.3) est évidemment satisfaite même sans aucune convention sur le polygone $\mathcal{Q}$.

Énonçons et prouvons maintenant le résultat annoncé sur la notion de pertinence topologique.

Lemme II.7. – *En utilisant les mêmes notations que dans la définition* II.6 *et la formule* (II.2), *$\mathcal{E}(\mathcal{P})$ est topologiquement pertinente pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ ssi l'ensemble $\mathcal{I}$ donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$*

Preuve – Nous commençons la preuve par l'implication directe.

Nous notons $\mathrm{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $\mathrm{I}_1 = \{i \in \mathrm{I} \mid \mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset\}$ et $\mathrm{I}_2 = \{i \in \mathrm{I} \mid \mathcal{E} \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j)\}$. Il est facile à remarquer que $\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1$. En effet, si $i \notin \mathrm{I}_1$, alors $\mathcal{B}_i \subset reg(\mathcal{E})$, car $\mathcal{B}_i \subset \overline{reg(\mathcal{E})} = \mathcal{E}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = \emptyset$. Mais alors $\mathcal{E}(\cup j \neq i \mathcal{B}_j) = \mathcal{E}(\mathcal{B}) \supset \mathcal{E}$, donc $i \notin \mathrm{I}_2$. Donc $\mathrm{I} \setminus \mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I} \setminus \mathrm{I}_2$ et ainsi $\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1$. La remarque à faire est que si $\mathcal{B}$ est "en position générale", alors $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1$. Par contre, si un cas dégénéré apparaît (c'est-à-dire si plusieurs courbes de Bézier admettent une tangente commune qui est aussi une droite d'appui de la polycourbe, comme dans l'exemple de la figure II.7), alors $\mathrm{I}_1 \setminus \mathrm{I}_2 \neq \emptyset$.

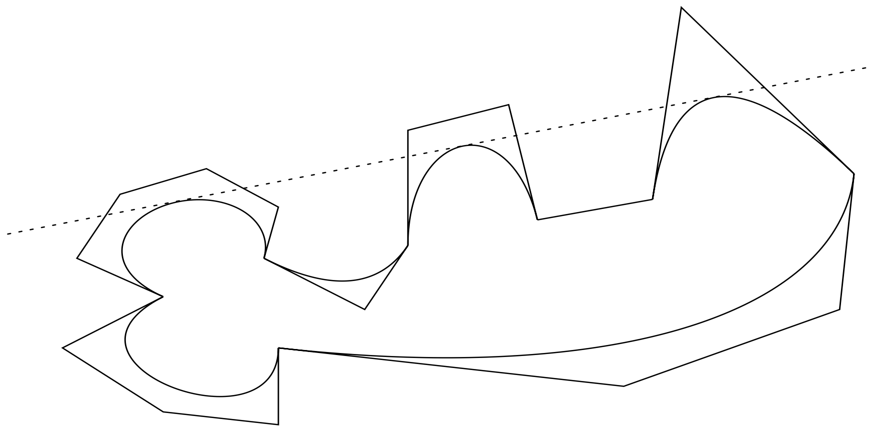

Figure II.7

Nous voulons maintenant prouver que $\mathrm{I}_2 \subset \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \mathrm{I}_1$.
Soit $i \in \mathrm{I}_2$. Alors $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j)$. Comme évidemment $\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j \subset \mathcal{E}(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j)$ et $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\mathcal{B}))$, nous obtenons $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j)$. Conformément à (II.6.ii), nous aurons alors $\mathcal{P}_i \not\subset \mathcal{E}(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j)$, ce qui nous donne tout de suite $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$.

Soit maintenant $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$. Alors $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ et conformément à (II.6.i) $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, donc $i \in \mathrm{I}_1$. Ainsi, les deux inclusions écrites ci-dessus sont prouvées.

Nous pouvons voir tout de suite que $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E}(\cup_{i \in \mathrm{I}_2} \mathcal{B}_i))$. Nous écrivons

$$\mathrm{I}_2 = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_r\} \ ,$$

où $r = \mathrm{card}(\mathrm{I}_2) \leq p$, et alors pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$ il existe $t_0^{(j_k)} \leq t_1^{(j_k)} \in [0, 1]$ tels que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{r} \left(\mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} \,;\, [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}]) \cup [\mathrm{R}'_{j_k} \mathrm{R}_{j_{k+1}}] \right) \ ,$$

où $\mathrm{R}_{j_k} = \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} \,;\, t_0^{(j_k)})$, $\mathrm{R}'_{j_k} = \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} \,;\, t_1^{(j_k)})$ et $j_0 = j_r$.
Si $\mathrm{I}_2 = \{i_1, \ldots, i_p\}$, nous aurons $r = p$ et $i_k = j_k$ $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$ et la preuve de l'implication directe est finie, car il est évident que

$$\mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} \,;\, [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}]) = \mathcal{B}_{j_k}\big|_{[\mathrm{R}_{j_k} \mathrm{R}'_{j_k}]}$$

Si $\mathrm{I}_2 \neq \{i_1, \ldots, i_p\}$, soit $i \in \{i_1, \ldots, i_p\} \setminus \mathrm{I}_2$. Comme $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \mathrm{I}_1$, il vient $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$. Évidemment,

$$\mathcal{B}_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^{r} \mathrm{B}_{m_{j_k}}(\mathrm{P}_0^{(j_k)}, \mathrm{P}_1^{(j_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{j_k}}^{(j_k)} \,;\, [t_0^{(j_k)}, t_1^{(j_k)}]) \right) = \emptyset,$$

car $\mathcal{B}$ est une courbe simple et $i \notin \mathrm{I}_2$. Il reste donc

$$\mathcal{B}_i \cap \left(\bigcup_{k=1}^{r} [\mathrm{R}'_{j_k} \mathrm{R}_{j_{k+1}}] \right) \neq \emptyset$$

L'intersection de $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{E}$ ne peut ainsi être qu'un point ou, dans certaines conditions, un segment. Dans les deux cas, il existe $t_0^{(i)} \leq t_1^{(i)} \in [0,1]$ tels que

$$\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = \mathrm{B}_i(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}])$$

Si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}$ est un point, alors $t_0^{(i)} = t_1^{(i)}$, et si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}$ est un segment, ce segment est forcément $\mathcal{B}_i$ et alors $t_0^{(i)} = 0$ et $t_1^{(i)} = 1$. De toute façon, si nous considérons $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $j_k < i < j_{k+1}$ (un tel k existe et est unique), alors évidemment

$$[\mathrm{R}'_{j_k} \mathrm{R}_{j_{k+1}}] = [\mathrm{R}'_{j_k} \mathrm{R}_i] \cup \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}]) \cup [\mathrm{R}'_i \mathrm{R}_{j_{k+1}}]$$

et par conséquent nous pouvons "insérer" l'indice i parmi les j_k dans l'expression de $\mathcal{E}$. Comme ce raisonnement est valable pour tout élément i de l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ qui n'est pas dans I_2, nous finissons par obtenir pour $\mathcal{E}$ l'expression de la définition II.4 avec l'ensemble $\mathcal{I}$ identifié par l'expression de $\mathcal{Q}$. L'implication directe est ainsi vraie dans tous les cas.

La preuve de l'implication inverse est immédiate. Supposons que $\mathcal{E}$ a la forme donnée dans l'énoncé. Soit $i \in \mathrm{I}$ tel que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Conformément à la condition (II.3), nous aurons alors $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$ et donc

$$\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, [t_0^{(i)}, t_1^{(i)}]) \neq \emptyset$$

Si $i \in \mathrm{I}$ est tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\Big(\mathcal{E}\big(\cup_{j \neq i} \mathcal{B}_j\big)\Big)$, alors $i \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$. Dans ce cas, nous aurons

$$\overline{reg(\mathcal{E})} = \mathcal{E}\left(\bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_{i_k} \right) \subset \mathcal{E}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i)$$

et par conséquent $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\big(\cup_{j \neq i} \mathcal{P}_j\big)$.

$\square$

II.4.4. *Pertinence topologique : existence du "bon" polygone de contrôle*

La conséquence immédiate du résultat précédent est que nous pourrons déterminer la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe en travaillant uniquement sur son polygone de contrôle si et seulement si nous pouvons trouver par subdivisions de de Casteljau successives un polygone de contrôle dont l'enveloppe convexe soit topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe. Avant de donner le théorème montrant que ceci est possible, énonçons un lemme qui nous sera nécessaire.

Lemme II.8. – *En utilisant les notations habituelles, soit $\mathcal{B}$ une polycourbe convexe. Alors son polygone de contrôle $\mathcal{P}$ est simple et convexe.*

La preuve formelle de ce résultat très intuitif se trouve dans l'annexe de ce chapitre.

Théorème II.9. – *Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure et soit $\mathcal{P}$ son polygone de contrôle. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ soit topologiquement pertinente* *pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ pour toute écriture de $\mathcal{B}$ comme $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ satisfaisant*

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_i, \mathcal{B}_i) < \varepsilon_0$$

Preuve – Soit $\mathcal{E} = \delta\big(\mathcal{E}(\mathcal{B})\big)$ la courbe frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe $\mathcal{B}$ et de même soit $\mathcal{Q} = \delta\big(\mathcal{E}(\mathcal{P})\big)$. Si la polycourbe est convexe, alors nous aurons $\mathcal{E} = \mathcal{B}$. Le lemme précédent nous dit que dans ce cas le polygone de contrôle $\mathcal{P}$ est lui aussi convexe et par conséquent $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$. Il est alors très facile à voir que les conditions (II.6.i) et (II.6.ii) sont vérifiées et la conclusion du théorème est vraie pour tout $\varepsilon_0 > 0$.

Supposons que $\mathcal{B}$ n'est pas convexe et soit n_0 le nombre de courbes de Bézier de sa composition initiale.

Soit $\mathcal{J} = \{j_1 < \ldots < j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\}$ un ensemble donnant la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$, où la polycourbe est dans son écriture initiale, donc composée de n_0 courbes de Bézier. Nous pouvons donc écrire, comme dans la définition II.4

$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=1}^{r} \Big(\mathcal{B}_{j_k}\big|_{[\mathrm{R}_{j_k}\mathrm{R}'_{j_k}]} \cup [\mathrm{R}'_{j_k}\mathrm{R}_{j_{k+1}}] \Big)$$

Définissons alors

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \min_{\kappa \in \{1,\dots,r\}} \left\{ \min_{i \in \{1,\dots,n_0\} \setminus \{j_{k-1}, j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big) \right\}$$

Il y a plusieurs possibilités pour $\widetilde{\varepsilon}_0$.

Cas 1. $\widetilde{\varepsilon}_0 = +\infty$

Ce cas apparaît si $n_0 = 2$, donc si le minimum ci-dessus est indexé avec $i \in \emptyset$. Nous avons deux sous-cas.

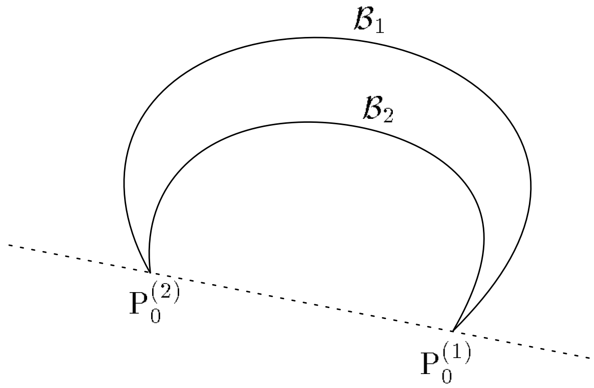

Figure II.8

1.a $\mathcal{B}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathcal{B}_1\big)}$ (figure II.8).

Prenons $\varepsilon_0 = \gamma_0$, la constante donnée par le théorème I.24. Alors $\delta_{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) < \varepsilon_0$ impliquera $\mathcal{P}$ pseudo-simple et nous aurons $\mathcal{Q} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}\ldots\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}$, en supposant que $\mathcal{B}_2 \subset \overline{reg\big(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[}\big)$. D'un autre côté, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 \cup \big[\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}\big]$, par conséquent

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset \quad \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_i \neq \emptyset \quad i = 1, 2$$

et conformément à la définition $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ est topologiquement pertinente pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$.

1.b $\mathcal{B}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}_{op}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathcal{B}_1\big)}$.

Dans ce cas, comme nous avons vu dans la preuve du théorème I.24, le polygone $\mathcal{P}$ est toujours pseudo-simple et il est facile à voir que la pertinence topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ pour $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ est aussi toujours vérifiée. En effet, il est évident que nous ne pouvons en aucun cas avoir $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ ou $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, car les deux courbes se trouvent dans des demi-plans opposés par rapport à la droite $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}$ et leur B-polygones aussi. De la même façon, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ et ainsi les conditions de la définition de la pertinence topologique sont satisfaites. Comme pour le cas d'une polycourbe convexe, la valeur de la distance de Hausdorff entre la polycourbe et son polygone de contrôle ne joue aucun rôle.

Cas 2 $\widetilde{\varepsilon}_0 = 0$

C'est un cas dégénéré, le cas des tangentes multiples (figure II.6).

Remarque. Un cas de tangentes multiples ne pourra pas, généralement, être décelé à l'aide des polygones de contrôle. Mais si nous pouvons nous assurer de la pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe, le lemme II.7 nous dit que même dans un tel cas nous pouvons trouver la structure topologique de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Dans ce cas, soit

$$K = \big\{k \in \{1, \ldots, r\} \mid \min_{i \in \{1,\ldots,n_0\} \setminus \{j_{k-1}, j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big) = 0\big\}$$

Évidemment, $k \neq \emptyset$. Pour tout $k \in K$ nous prenons

$$\mathrm{I}_k = \big\{i \in \{1, \ldots, n_0\} \mid \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big) = 0\big\}$$

Nous aurons, bien sûr, $i_{k-1}, i_k \in \mathrm{I}_k$ et soit

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \min_{i \in \{1,\ldots,n_0\} \setminus \mathrm{I}_k} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big)$$

Nous redéfinissons alors $\widetilde{\varepsilon}_0$:

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \min\left\{\min_{j \in \{1,\ldots,r\} \setminus K}\left\{\min_{i \in \{1,\ldots,n_0\} \setminus \{j_{k-1}, j_k\}} \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{j_{k-1}}\mathrm{R}_{j_k}, \mathcal{B}_i\big)\right\}, \min_{k \in K} \widetilde{\varepsilon}_k\right\}$$

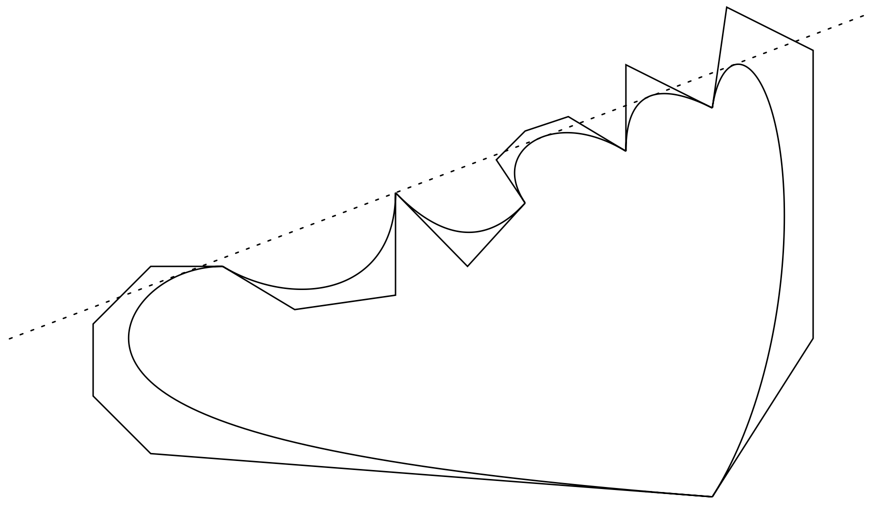

Figure II.9

Le nouveau $\widetilde{\varepsilon}_0$ sera non-nul, mais il peut être $+\infty$. Ce cas est présenté dans la figure II.9 et il n'est pas difficile à voir que d'un côté $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n_0\}$ et de l'autre côté il y a exactement deux courbes $\mathcal{B}_{j_1}$ et $\mathcal{B}_{j_2}$ telles que $\mathcal{B}_{j_k} \not\subset \mathcal{E}\big(\cup_{i \neq j_k} \mathcal{B}_i\big)$ pour $k = 1, 2$ et pour ces deux courbe nous aurons $\mathcal{P}_{j_k} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, $k = 1, 2$.

Cas 3 $\widetilde{\varepsilon}_0 \in]0, +\infty[$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ nous considérons

$$\overline{\varepsilon}_i = \sup_{\mathrm{P} \in \mathcal{B}_i} \mathrm{d}\big(\mathrm{P}, \mathcal{E}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i)\big)$$

et nous prenons

$$\overline{\varepsilon}_0 = \min_{\substack{i \in \{1, \ldots, n_0\} \\ \overline{\varepsilon}_i \neq 0}} \overline{\varepsilon}_i$$

Posons alors

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\gamma_0, \frac{\widetilde{\varepsilon}_0}{2}, \frac{\overline{\varepsilon}_0}{2}\right\},$$

ou γ_0 est la constante donnée par le théorème de pseudo-simplicité du polygone de contrôle. Nous remarquons que $\overline{\varepsilon}_0$ ne peut pas être nul. Par contre, il peut être $+\infty$, mais ça ne pose aucun problème pour la définition de ε_0.

Nous supposons avoir maintenant une écriture de la polycourbe $\mathcal{B}$ comme union de n courbes de Bézier satisfaisant $\max_{1 \leq i \leq n} \mathrm{d}\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i\big) < \varepsilon_0$ et nous prouverons que (II.6.i) et (II.6.ii) sont satisfaites.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. Nous voulons prouver que $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$. La preuve sera faite par l'absurde, en supposant que $\mathcal{B}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\mathcal{B})\big)$. Comme $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, il existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $i = i_k$. Nous aurons alors la situation de la figure II.10.

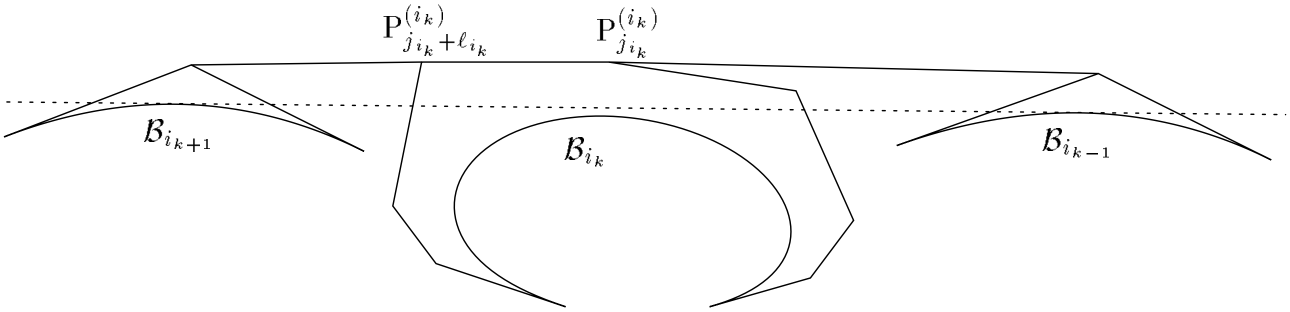

Figure II.10

Mais dans ce cas nous pouvons écrire

$$\widetilde{\varepsilon}_0 \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{R}'_{i_{k-1}}\mathrm{R}_{i_{k+1}}, \mathcal{B}_{i_k}\big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}}, \mathcal{B}_{i_k}\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{P}_{i_k}, \mathcal{B}_{i_k}\big) < \varepsilon_0,$$

ce qui contredit la définition de ε_0.

Soit maintenant $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\mathcal{P}_i \subset \mathrm{Int}\big(\mathcal{E}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_i)\big)$ et nous voulons prouver que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{E}\big(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i\big)$. Nous allons faire de nouveau une preuve par l'absurde, en supposant que $\mathcal{B}_i \not\subset \mathcal{E}\big(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i\big)$. Alors il existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que cette situation soit celle présentée figure II.11.

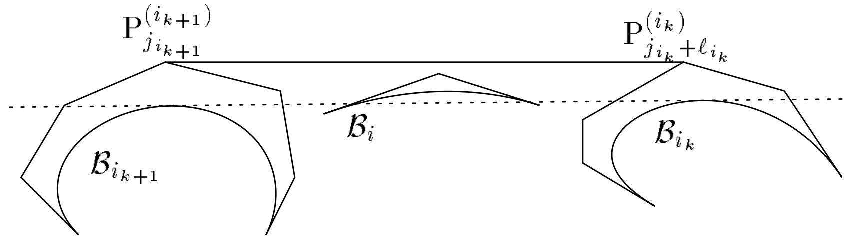

Figure II.11

Dans ce cas, notons $\widetilde{\mathcal{B}}_i = \mathcal{B}_i \setminus \Big(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{E}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_i)\Big)$ et nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_0 \le \sup_{\mathrm{P}\in\widetilde{\mathcal{B}}_i} \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{R}'\mathrm{R}'') &< \max\big\{\mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_k)}_{j_{i_k}+\ell_{i_k}}, \mathrm{R}'\mathrm{R}''\big), \mathrm{d}\big(\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{j_{i_{k+1}}}, \mathrm{R}'\mathrm{R}''\big)\big\} \\ &\le \max\big\{\delta^{\mathrm{H}}\big(pg_{i_k}, pb_{i_k}\big), \delta^{\mathrm{H}}\big(pg_{i_{k+1}}, \mathcal{B}_{i_{k+1}}\big)\big\} < \varepsilon_0,\end{aligned}$$

encore une fois un résultat qui contredit la définition de ε_0.

Ainsi, la pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour l'enveloppe convexe de la polycourbe est prouvée si la distance de Hausdorff entre chaque courbe de Bézier composant la polycourbe et son polygone de contrôle est inférieure à ε_0, et avec cette preuve la démonstration du théorème est elle aussi finie.

□

II.4.5. *Les points* R_{i_k} *et* R'_{i_k}

Supposons que l'enveloppe convexe du polygone de contrôle $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i$ est topologiquement pertinente pour celle de la polycourbe $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{I} = \{i_1 < \ldots < i_p\}$ pour lequel le polygone $\mathcal{Q}$ a l'expression de la formule (II.2) donne la structure topologique de $\mathcal{E}(\mathcal{B})$. Comme annoncé dans le paragraphe II.4.1, nous présentons ici les systèmes d'équations dont la résolution fournit explicitement les coordonnées des points R_{i_k} et R'_{i_k} définis par la formule (II.1). Si les solutions exactes de ces systèmes peuvent être obtenues, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors cette formule donne de manière explicite et exacte la frontière de l'enveloppe convexe de la polycourbe.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$ nous donnons le système d'équations Σ_{i_k} qui a comme solution la paire de paramètres $(t'_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ telle que

$$\mathrm{R}'_{i_k} = \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}^{(i_k)}_0, \ldots, \mathrm{P}^{(i_k)}_{m_{i_k}}\,;\, t'_{i_k}) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_{i_{k+1}} = \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}^{(i_{k+1})}_0, \ldots, \mathrm{P}^{(i_{k+1})}_{m_{i_{k+1}}}\,;\, t'_{i_{k+1}})$$

En fonction des indices $j_{i_k} + \ell_{i_k}$ et $j_{i_{k+1}}$, nous avons plusieurs cas pour le système Σ_{i_k}.

Cas 1. $j_{i_k} + \ell_{i_k} = 0$, $j_{i_{k+1}} = 0$

Dans ce cas, il n'y a pas d'équation à résoudre, il est très facile à voir que les paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$ sont connus de façon exacte et ils sont tous les deux égaux à 0 : $t'_{i_k} = t_{i_{k+1}} = 0$.

Cas 2. $j_{i_k} + \ell_{i_k} \neq 0$, $j_{i_{k+1}} \neq 0$

Soient les matrices A'_{i_k} et $A_{i_{k+1}}$ des matrices carrées avec deux lignes et deux colonnes définies par $A'_{i_k} = (v_{i_k,i_{k+1}}, v'_{i_k})$ et $A_{i_{k+1}} = (v_{i_k,i_{k+1}}, v_{i_{k+1}})$, où les vecteurs $v_{i_k,i_{k+1}}$, v'_{i_k} et

$v_{i_{k+1}}$ sont donnés par les formules

$$v_{i_k,i_{k+1}} = \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t'_{i_{k+1}}) - \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k})$$

$$v'_{i_k} = \mathrm{B}'_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k})$$

$$v_{i_{k+1}} = \mathrm{B}'_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, t_{i_{k+1}})$$

Pour que la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ soit une tangente commune des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$, les déterminants de ces deux matrices doivent s'annuler pour des valeurs des paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$ comprises entre 0 et 1. Le système d'équations Σ'_{i_k} donnant les tangentes communes des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ sera donc

$$(\Sigma'_{i_k}) \begin{cases} t'_{i_k}, t_{i_{k+1}} \in [0,1] \\ \det(A'_{i_k}) = 0 \\ \det(A_{i_{k+1}}) = 0 \end{cases}$$

La pertinence topologique de l'enveloppe convexe du polygone de contrôle pour celle de la polycourbe et le cas dans lequel nous nous situons pour les indices $j_{i_k} + \ell_{i_k}$ et $j_{i_{k+1}}$ nous disent que ce système a une solution. Mais il peut avoir plusieurs, car deux courbes peuvent admettre jusqu'à quatre tangentes communes. Nous devons donc imposer des conditions supplémentaires pour nous assurer que la solution obtenue sera celle souhaitée.

Soient $\tau'_{i_k} \in [0,1] \setminus \{t'_{i_k}\}$ et $\tau_{i_{k+1}} \in [0,1] \setminus \{t_{i_{k+1}}\}$. Nous définissons les vecteurs

$$u'_{i_k} = \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, \tau'_{i_k}) - \mathrm{B}_{m_{i_k}}(\mathrm{P}_0^{(i_k)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_k}}^{(i_k)} \,;\, t'_{i_k})$$

$$u_{i_{k+1}} = \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, \tau_{i_{k+1}}) - \mathrm{B}_{m_{i_{k+1}}}(\mathrm{P}_0^{(i_{k+1})}, \ldots, \mathrm{P}_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} \,;\, \tau_{i_{k+1}})$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ soit incluse dans le demi-plan fermé gauche déterminé par la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est $\det(v_{i_k,i_{k+1}}, u'_{i_k}) > 0$. De même, une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ soit incluse dans le demi-plan fermé gauche déterminé par la droite $\mathrm{R}'_{i_k}\mathrm{R}_{i_{k+1}}$ est $\det(v_{i_k,i_{k+1}}, u_{i_{k+1}}) > 0$.

Ainsi, le système d'équations Σ_{i_k} sera

$$(\Sigma_{i_k}) \begin{cases} t'_{i_k}, t_{i_{k+1}} \in [0,1] \\ \det(A'_{i_k}) = 0 \\ \det(A_{i_{k+1}}) = 0 \\ \det(v_{i_k,i_{k+1}}, u'_{i_k}) > 0 \\ \det(v_{i_k,i_{k+1}}, u_{i_{k+1}}) > 0 \end{cases}$$

Évidemment, ce système peut être développé, en remplaçant les vecteurs v_α et u_β avec leurs expressions respectives, et en écrivant aussi B_{i_k}, B'_{i_k}, $\mathrm{B}_{i_{k+1}}$ et $\mathrm{B}'_{i_{k+1}}$ en fonction des points de contrôle des courbes $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ et des paramètres t'_{i_k} et $t_{i_{k+1}}$. Comme nous ne nous proposons pas de discuter la résolution de ce système, nous ne donnons pas sa forme finale. Nous pouvons quand même remarquer que le degré maximal des équations le composant est $\max\{m_{i_k}(m_{i_{k+1}} - 1), (m_{i_k} - 1)m_{i_{k+1}}, m_{i_k}^2, m_{i_{k+1}}^2\}$.

Cas 3. $j_{i_k} + \ell_{i_k} = 0$, $j_{i_{k+1}} \neq 0$

Dans cette situation, nous pouvons distinguer deux sous-cas, comme présenté dans la figure II.12.

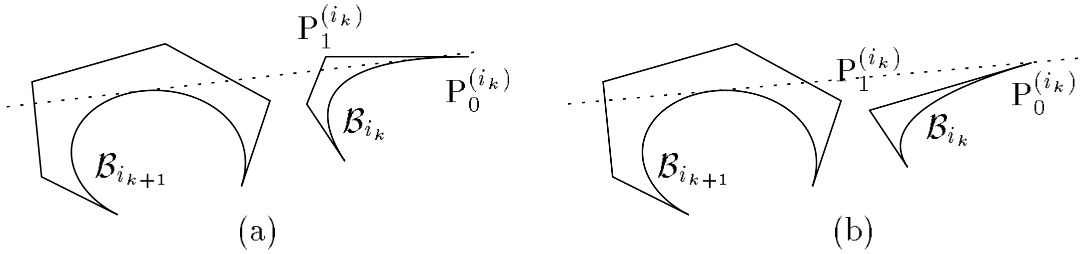

Figure II.12

Il est facile à voir que le deux cas sont différenciés par la position de la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ par rapport à la droite $P_0^{(i_k)}P_1^{(i_k)}$: si $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ est contenue dans le demi-plan gauche ouvert délimité par $P_0^{(i_k)}P_1^{(i_k)}$, alors la droite d'appui commune de $\mathcal{B}_{i_k}$ et $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ "touchera" $\mathcal{B}_{i_k}$ dans un point qui n'est pas $P_0^{(i_k)}$, et sinon cette droite d'appui commune passera par $P_0^{(i_k)}$. La question à poser pour départager les deux cas est donc : la courbe $\mathcal{B}_{i_{k+1}}$ a-t-elle des points sur ou à droite de $P_0^{(i_k)}P_1^{(i_k)}$? Répondre à cette question revient à décider si l'inéquation

$$\det\big(P_1^{(i_k)} - P_0^{(i_k)}, B_{i_{k+1}}(P_0^{(i_{k+1})}, \dots, P_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} ; t) - P_0^{(i_k)}\big) \le 0$$

a au moins une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

Si la réponse à cette question est non, nous serons dans le cas de la figure II.12(a) et le système Σ_{i_k} sera celui présenté pour le cas 2.

Si la réponse est oui, nous sommes dans le cas de la figure II.12(b) et le paramètre t'_{i_k} sera connu et égal à 0. Le système Σ_{i_k} aura alors une seule inconnue et il sera

$$(\Sigma_{i_k}) \begin{cases} t_{i_{k+1}} \in [0,1] \\ \det\big(R_{i_{k+1}} - P_0^{(i_k)}, B'_{i_{k+1}}(P_0^{(i_{k+1})}, \dots, P_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} ; t_{i_{k+1}})\big) = 0 \\ \det\big(R_{i_{k+1}} - P_0^{(i_k)}, R - P_0^{(i_k)}\big) > 0 \end{cases},$$

où $R_{i_{k+1}} = B_{i_{k+1}}(P_0^{(i_{k+1})}, \dots, P_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} ; t_{i_{k+1}})$, $R = B_{i_{k+1}}(P_0^{(i_{k+1})}, \dots, P_{m_{i_{k+1}}}^{(i_{k+1})} ; \tau_{i_{k+1}})$, $\tau_{i_{k+1}}$ étant un paramètre compris entre 0 et 1 et différent de $t_{i_{k+1}}$.

Cas 4. $j_{i_k} + \ell_{i_k} \neq 0$, $j_{i_{k+1}} = 0$

Ce cas est symétrique avec le cas 3, cette fois nous devons nous poser le problème de la position de la courbe $\mathcal{B}_{i_k}$ par rapport à la droite $P_{m_{i_{k+1}-1}-1}^{(i_{k+1}-1)}P_{m_{i_{k+1}-1}}^{(i_{k+1}-1)}$ et la discussion à faire est tout à fait similaire à la précédente.

Annexe

Définition II.10. – *Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ un polygone simple. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ nous définissons $\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$ comme étant celui des deux demi-plans ouverts déterminés par $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ qui satisfait*

$$\forall \mathrm{P} \in \left]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}\right[\ \exists \varepsilon_\mathrm{P} > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon \leq \varepsilon_\mathrm{P} \ \ \mathrm{B}(\mathrm{P},\varepsilon) \cap \mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}) \subset reg(\mathcal{P}) \tag{II.4}$$

et

$$\mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}) = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})}$$

Définition II.11. – *Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_n$ un polygone simple. Alors*

(II.11.i) P_i *est un sommet concave si et seulement si* $\mathrm{P}_{i+1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)$

(II.11.ii) P_i *est un sommet convexe si et seulement si* $\mathrm{P}_{i+1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)}$

Remarques

1. $\mathrm{P}_{i+1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i) \iff \mathrm{P}_{i-1} \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$
2. $\mathrm{P}_{i+1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i)} \iff \mathrm{P}_{i-1} \in \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})}$

En utilisant ces définitions, nous démontrons le lemme II.8.

Preuve du lemme II.8 – Nous commençons cette démonstration par montrer que $\mathcal{P}$ est simple, car pour la preuve de la convexité nous utiliserons la notion de sommet concave, qui n'a pas de sens si $\mathcal{P}$ n'est pas simple.

Considérons le polygone $\mathcal{P}' = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}\ldots\mathrm{P}_0^{(n)}$ (figure II.13). Évidemment, $\mathcal{P}'$ est un polygone simple et convexe. En plus, pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ nous avons

$$\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, \mathcal{B}_i) = \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{P}'))$$

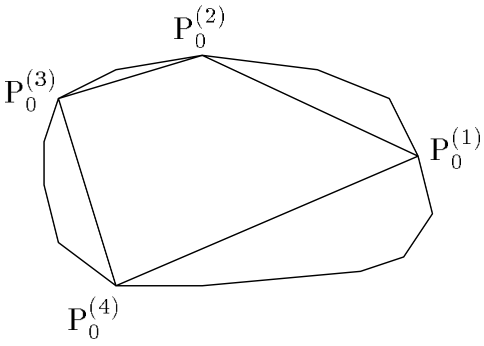

Figure II.13

Supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas simple. Alors il existe $1 \leq i < j \leq n$ et $k_i \in \{0,1,\ldots,m_i-1\}$, $k_j \in \{0,1,\ldots,m_j-1\}$ tels que $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$ et, en plus, si $j = i+1$ alors si $k_i = m_i - 1$ et $k_j = 0$ nous devons avoir $\mathrm{card}([\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}]) = +\infty$. $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ étant des polygones convexes, il résulte

$$\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}, \mathcal{B}_j)}$$

Alors

$$[\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}\mathrm{P}^{(i)}_{k_i+1}] \cap [\mathrm{P}^{(j)}_{k_j}\mathrm{P}^{(j)}_{k_j+1}] \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i},\mathcal{B}_i)} \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_{m_j},\mathcal{B}_j)}$$

Nous pouvons supposer, sans réduire la généralité, que $\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j+1)}_0 \cap \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0 \subset [\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0$. Nous savons que $\mathcal{P}'$ est convexe et alors nous aurons les points suivants ordonnés dans cet ordre sur la droite $\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0$ (figure II.14) :
$\mathrm{P}^{(i)}_0, \mathrm{P}^{(i+1)}_0, \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0 \cap \mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+2)}_0, \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0 \cap \mathrm{P}^{(i+2)}_0\mathrm{P}^{(i+3)}_0, \ldots, \mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0 \cap \mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j+1)}_0$

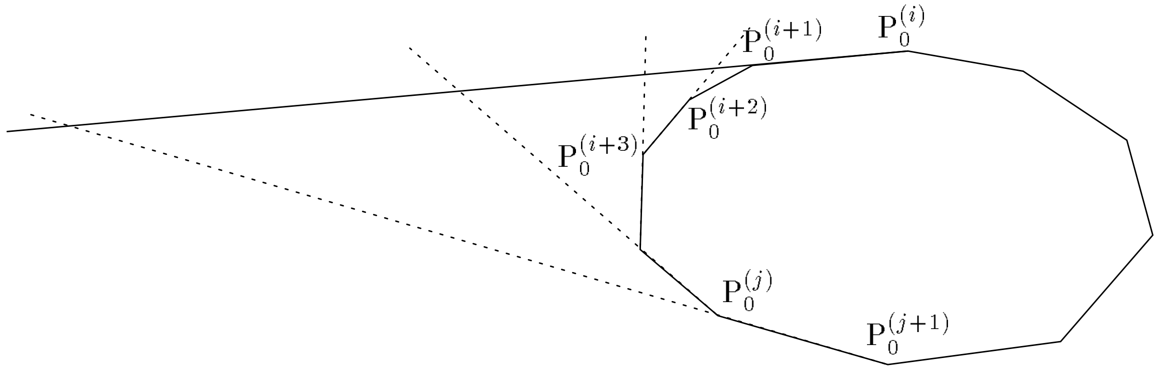

Figure II.14

Par conséquent,

$$\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}, reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_{m_j}, reg(\mathcal{B}_j,]\,\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_{m_j}\,[)\big)}$$
$$\subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}, reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_{i+1}}, reg(\mathcal{B}_{i+1},]\,\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_{i+1}}\,[)\big)}$$

Nous traitons séparément les deux cas suivants :

Cas 1. $j = i+1$

Les points $\mathrm{P}^{(i+1)}_0$, $\mathrm{P}^{(i+1)}_1$ et $\mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}$ sont alors colinéaires et $\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \in \,]\,\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}$. Mais $\mathcal{B}$ est convexe, nous aurons donc

$$\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0, reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[)\big) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\,\mathrm{P}^{(j)}_0\mathrm{P}^{(j)}_{m_j}\,[) = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir $\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \in \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0, reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[)\big)$, car, conformément aux propriétés des courbes de Bézier, cela impliquerait

$$\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_0, reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[)\big) \cap reg(\mathcal{B}_i + 1,]\,\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_i+1}\,[) \neq \emptyset$$

(figure II.15(a)), d'où la contradiction.

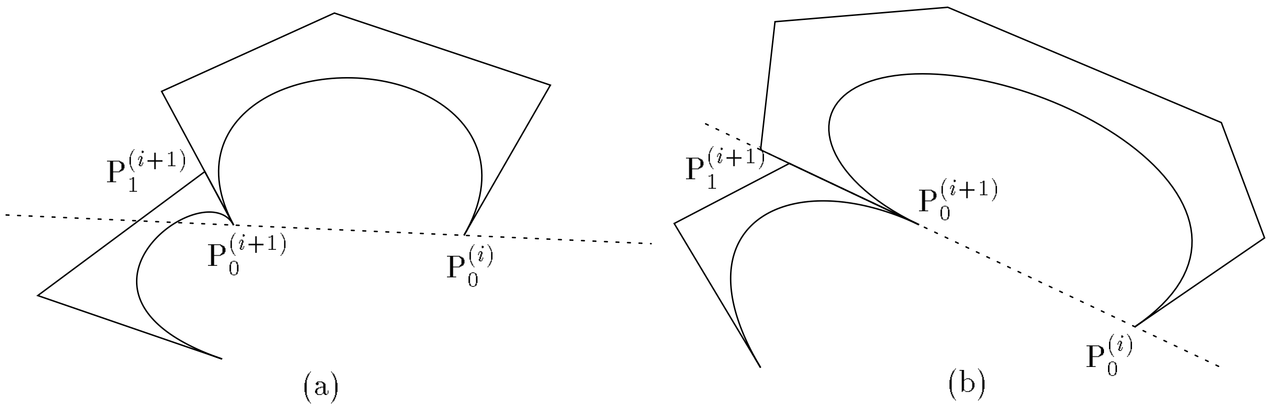

Figure II.15

D'un autre côté,

$$]P_0^{(i+1)}P_{m_i-1}^{(i)} \subset \overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big)}$$

et ainsi nous pouvons déduire que $P_1^{(i+1)}, P_{m_i-1}^{(i)} \in P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}$ (figure II.15(b)). Dans ce cas, aucune droite passant par $P_0^{(i+1)}$ ne peut séparer les régions $reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_{i+1},]P_0^{(i+1)}P_{m_{i+1}}^{(i+1)}[)$, à part $P_0^{(i+1)}P_1^{(i+1)}$. Nous en déduisons que tous les sommets de $\mathcal{P}_{i+1}$ sont colinéaires et donc que $\mathcal{B}_{i+1}$ est un segment. $\mathcal{B}$ étant convexe, la droite $P_0^{(i+1)}P_1^{(i+1)}$, qui est la droite support de $\mathcal{B}_{i+1}$, doit laisser la polycourbe dans un seul des deux demi-plans qu'elle détermine. Nous aurons ainsi

$$\mathcal{B} \subset \mathrm{DP}\big(P_0^{(i+1)}P_1^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big) = \mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big),$$

relation qui donne évidemment une contradiction avec la convexité de $\mathcal{B}$. Il en résulte que l'hypothèse $P_1^{(i+1)} \in]P_0^{(i+1)}P_{m_i-1}^{(i)}$ est fausse. Le raisonnement fait est valable seulement si la courbe $\mathcal{B}_i$ n'est pas un segment, mais si ses points de contrôle sont colinéaires alors un raisonnement similaire nous mène toujours à une contradiction.

Cas 2 $j > i+1$

Nous pouvons distinguer deux sous-cas :

2.a $P_0^{(j)}P_0^{(j+1)} \cap P_0^{(i)}P_0^{(i+1)} = \{P_0^{(i+1)}\}$

Comme $\mathcal{B} \setminus \{\mathcal{B}_j\}$ doit être incluse dans un des deux demi-plans fermés déterminés par $P_0^{(j)}P_0^{(j+1)}$, nous pouvons voir tout de suite que les courbes $\mathcal{B}_{i+1}$, $\mathcal{B}_{i+2}$, …, $\mathcal{B}_{j-1}$ sont des segments colinéaires. En appliquant le même raisonnement à $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{i+1}$, nous obtenons que la courbe $\mathcal{B}_j$ doit elle aussi être un segment, inclus lui aussi dans la droite support des tous les autres, $P_0^{(i+1)}P_0^{(j+1)}$. Les points $P_0^{(i+1)}$, $P_0^{(i+2)}$, …, $P_0^{(j)}$ étant tous distincts, nous aurons

$$\mathcal{P}_j \subset [P_0^{(j)}P_0^{(j+1)}] \subset \mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, P_0^{(i+2)}\big) = \mathrm{DP}_{op}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big)$$

Mais le polygone $\mathcal{P}_i$ est inclus dans $\overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big)}$, en raison de sa convexité, donc $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$, d'où la contradiction.

2.b $P_0^{(j)}P_0^{(j+1)} \cap P_0^{(i)}P_0^{(i+1)} \subset P_0^{(i)}P_0^{(i+1)} \setminus [P_0^{(i+1)}P_0^{(i)}$

Dans ce cas, nous avons la relation

$$\overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(j)}P_0^{(j+1)}, reg(\mathcal{B}_j,]P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}[)\big)}$$
$$\subset \overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_0^{(i+1)}, reg(\mathcal{B}_i,]P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}[)\big)} \cap \mathrm{DP}\big(P_0^{(i+1)}P_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]P_0^{(i+1)}P_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big)$$

Nous déduisons donc

$$\mathcal{P}_i \cap \mathrm{DP}\big(P_0^{(i+1)}P_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]P_0^{(i+1)}P_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big) \neq \emptyset$$

D'un autre côté, $\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathrm{DP}\big(P_{m_i-1}^{(i)}P_{m_i}^{(i)}, P_0^{(i)}\big)} \cap \overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}, P_{m_i-1}^{(i)}\big)}$ et nous avons aussi $P_0^{(i)} \in \mathrm{DP}_{op}\big(P_0^{(i+1)}P_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]P_0^{(i+1)}P_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big)$. Pour que

$$\mathcal{P}_i \cap \mathrm{DP}\big(P_0^{(i+1)}P_0^{(i+2)}, reg(\mathcal{B}_i+1,]P_0^{(i+1)}P_{m_i+1}^{(i+1)}[)\big) \neq \emptyset,$$

la demi-droite $]P_0^{(i1)}P_{m_i-1}^{(i)}$ doit être incluse dans ce demi-plan (figure II.16).

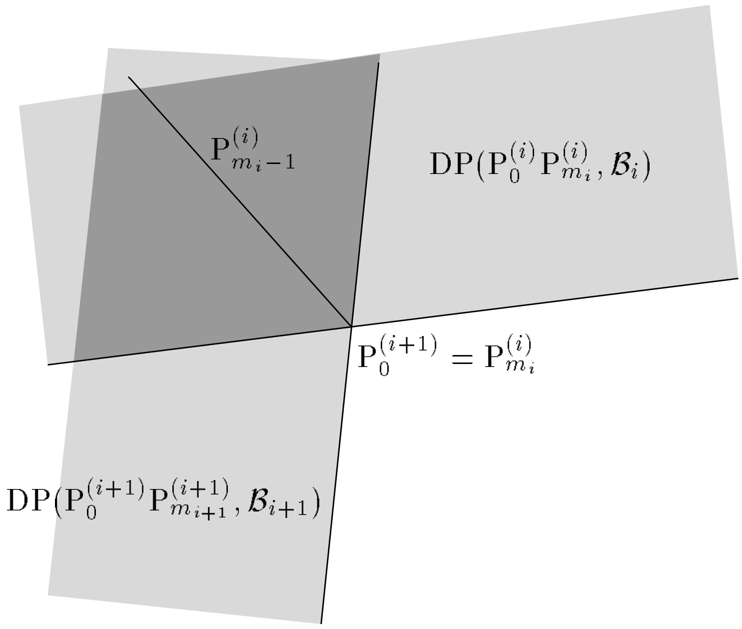

Figure II.16

Suite aux propriétés des courbes de Bézier, nous aurons alors

$$\mathcal{B}_i \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+2)}_0, reg\big(\mathcal{B}_i + 1,]\,\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_i+1}\,[\big)\big) \neq \emptyset,$$

d'où la contradiction avec la convexité de la polycourbe $\mathcal{B}$.

Ainsi, l'hypothèse $\mathcal{P}$ non-simple nous a menés, dans tous les cas, à une contradiction, elle est donc fausse. Prouvons maintenant que $\mathcal{P}$ est aussi un polygone convexe.

Si nous supposons que $\mathcal{P}$ n'est pas convexe, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $k_i \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$ tels que $\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}$ soit un sommet concave de $\mathcal{P}$. Si $\kappa_i \neq 0$, alors tous les sommets $\mathrm{P}^{(i)}_k$, $k \in \{1, \ldots, m_i - 1\}$, doivent être des sommets concaves de $\mathcal{P}$, car le polygone $\overline{\mathcal{P}_i}$ est convexe. Nous obtenons alors une contradiction avec la convexité de $\mathcal{B}$, car nous aurons

$$reg(\mathcal{B}_i,]\,\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\,[) \subset reg(\overline{\mathcal{P}_i}) \subset reg(\mathcal{P}')$$

Donc forcément $k_i = 0$. Conformément à la définition, $\mathrm{P}^{(i)}_1 \in \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0)$. Nous aurons alors

$$\mathcal{B}_i \cap \mathrm{DP}_{ext}(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0) \neq \emptyset$$

Mais $\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0$ est tangente à $\mathcal{B}_{i-1}$ en $\mathrm{P}^{(i)}_0$ et donc, $\mathcal{B}$ étant convexe, est une droite d'appui de $\mathcal{B}$, d'où la contradiction avec la relation écrite ci-dessus, car évidemment

$$\mathcal{B}_{i-1} \subset \overline{reg(\mathcal{P}_{i-1})} \subset \overline{\mathrm{DP}_{int}(\mathrm{P}^{(i-1)}_{m_{i-1}-1}\mathrm{P}^{(i)}_0)}.$$

Le polygone $\mathcal{P}$ est ainsi simple et convexe et la preuve du lemme est achevée. □