Chapitre I

La polycourbe

Première Partie
Splinegone et polycourbe

I.1. Introduction

Jusqu'à il y a une dizaine d'années, presque tous les résultats de la géométrie algorithmique concernaient une classe relativement restreinte d'objets, que nous appellerons linéaires : des points, des droites et des segments de droite, des polygones, en deux dimensions, et encore des plans et des polyèdres en trois dimensions. Malheureusement, trop peu de cas du monde réel peuvent se réduire à de tels objets, constitués d'arêtes droites et de faces planes. Par conséquent, s'est fait sentir le besoin d'algorithmes et de techniques qui permettent de traiter des objets plus généraux que ceux mentionnés ci-dessus.

La première étape à franchir est, évidemment, de définir ces objets de façon rigoureuse. Un premier pas dans cette direction a été fait par l'introduction du *splinegone* [Sou86]. Des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique ont été étudiés pour les splinegones : l'intersection de deux splinegones convexes [Dob88] [Dob90], le diamètre d'un splinegone convexe [Dob90], la décomposition monotone [Dob88] et l'enveloppe convexe [Dob90] d'un splinegone, etc. Aussi, nous pouvons trouver dans la littérature d'autres travaux sur des objets qui, même s'ils ne sont pas explicitement définis comme splinegones, peuvent être structurés comme tels [Sch87], [Baj91].

Alors pourquoi ne pas travailler avec le splinegone et définir un nouvel objet ? La raison, présentée en détail dans la section trois de ce chapitre, consiste en quelques petites omissions que nous avons constatées dans le modèle du splinegone. Ainsi, nous introduirons la *polycourbe*. Les polycourbes forment une classe d'objets du plan plus restreinte que celle des splinegones (toute polycourbe fermée est un splinegone), mais néanmoins suffisamment générale pour que les résultats la concernant soient intéressants.

Nous commençons par une brève description du splinegone, suivie par la présentation de la polycourbe. La dernière section de cette partie est dédiée à l'étude des relations reliant la polycourbe au splinegone.

I.2. Concentré de chapitre (I, première partie)

Premier niveau. Vous n'avez pas vraiment besoin de lire cette partie du premier chapitre. Il n'y a que la section I.4 (La polycourbe) qui pourrait présenter un (très faible) intérêt pour vous.

Deuxième niveau. Vous devriez lire les sections I.3 et I.4 complètement. Dans la section I.5, vous pouvez vous dispenser de la lecture des preuves des théorèmes I.8 et I.10 - et bien sûr de celle de la démonstration de la proposition I.7, dans l'annexe.

I.3. Le splinegone

Pour commencer, nous ferons un court passage en revue de la définition et des propriétés du splinegone. La définition de cet objet, telle qu'elle peut être trouvée dans la bibliographie [Dob88], [Dob90], est la suivante :

Définition I.1. – *Un splinegone $\mathcal{S}$ peut être obtenu à partir d'un polygone $\mathcal{P}$ en remplaçant chaque arête $]s_i s_{i+1}[$ de $\mathcal{P}$ par une courbe $\mathbf{c}_i$ qui, elle aussi, part de s_i et arrive en s_{i+1} et est telle que la région $S - seg_i$ bornée par la courbe $\mathbf{c}_i$ et le segment $[s_i s_{i+1}]$ soit convexe. Le polygone $\mathcal{P}$ sera nommé le polygone porteur du splinegone $\mathcal{S}$.*

La formulation "peut être obtenu ... à partir de ..." est implicite, et cette définition ne peut pas être utilisée pour dire si une courbe fermée quelconque est un splinegone ou non. Ce problème est partiellement résolu par un théorème [Dob90] qui précise les propriétés qu'une courbe plane fermée doit avoir pour qu'elle puisse être organisée comme splinegone, nous présenterons plus tard ce théorème.

Regardons maintenant la figure I.1(a) : quelle est la région bornée par la courbe $\mathbf{c}_i$ et le segment $[s_i s_{i+1}]$?

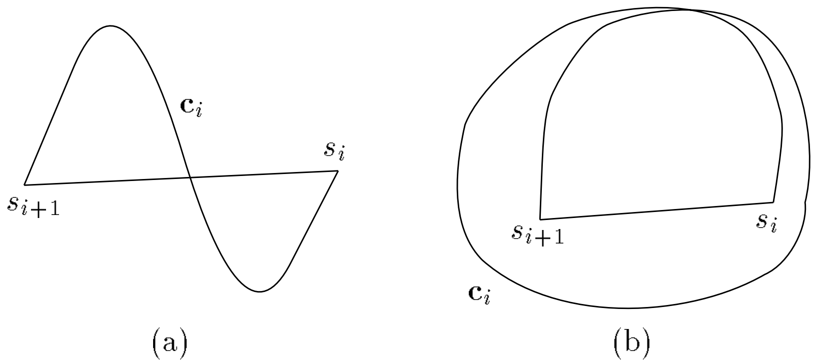

Figure I.1

Dans ce cas là, la notion de "région bornée par ... " est assez ambiguë, mais supposons que l'on comprend par là l'union de toutes les régions bornées dont la frontière est formée par des morceaux de $\mathbf{c}_i$ et du segment $[s_i s_{i+1}]$, et alors le cas de la figure I.1(a) ne présente pas un bon remplacement du segment $[s_i s_{i+1}]$ par une courbe, car $S - seg_i$ n'est pas convexe. Par contre, dans la figure I.1(b) $S - seg_i$, dans l'interprétation que nous venons de donner, est convexe, et donc $\mathbf{c}_i$ satisfait les conditions de la définition et peut constituer une arête de splinegone. Il est bien sûr clair qu'en fait tels régions $S - seg_i$ ne sont pas souhaitables et que la définition est incomplète ; il suffit d'imposer à la courbe plane fermée formée par l'union de $\mathbf{c}_i$ et $[s_i s_{i+1}]$ d'être simple pour que toutes ces confusions disparaissent.

Revenons maintenant au théorème mentionné ci-dessus. Son énoncé est le suivant :

Théorème I.2. – *Toute courbe plane fermée $\mathcal{S}$ peut être considérée comme un splinegone pourvu que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

– $\mathcal{S}$ a seulement un nombre fini de points d'inflexion ;

– toute droite coupe $\mathcal{S}$ en au plus un nombre fini de points ou segments de droite.

Si soit l'une, soit l'autre des deux conditions n'est pas vérifiée, alors $\mathcal{S}$ ne peut pas avoir *une structure de splinegone.*

La démonstration est constructive et pour les besoins de la discussion nous la résumons : pour déterminer un polygone porteur pour une courbe $\mathcal{S}$, les auteurs commencent par tracer la courbe dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en introduisant tous les points d'inflexion comme premiers sommets d'un polygone porteur $\mathcal{P}$. Ensuite, ils présentent deux méthodes pour introduire des sommets supplémentaires, qui seront des points des arcs $\mathbf{c}_i$, dans le but de rendre toutes les régions $S - seg_i$ convexes. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces méthodes, car elles ne nous intéressent pas par la suite.

La première remarque est que la notion de point d'inflexion pose quelques problèmes, car plusieurs définitions d'un point d'inflexion existent dans la littérature. Si par point d'inflexion on comprend un point régulier où la courbe traverse sa tangente (autrement dit, en supposant que la paramétrisation de la courbe a les propriétés de continuité et de dérivabilité requises, un point où la première dérivée est non-nulle et la deuxième est colinéaire avec elle), alors la courbe $\mathcal{S}$ de la figure I.2 n'aura aucun point d'inflexion et donc aucun polygone porteur ne pourra être construit par la méthode présentée dans la preuve du théorème, même s'il est évident que cette courbe peut être structurée comme splinegone. Si nous considérons, pour le point d'inflexion, une autre définition : un point où la première et la deuxième dérivée existent et sont colinéaires, alors le problème de la courbe de la figure I.2 est résolu si les points de discontinuité de la tangente sont des points où la première dérivée s'annule (ce qui n'est jamais vrai si $\mathcal{S}$ est paramétrisée par l'abscisse curviligne).

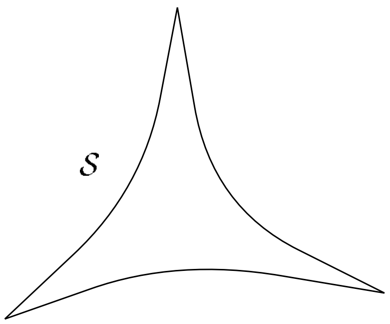

Figure I.2

Mais là encore toute une classe de courbes planes fermées est "perdue", par exemple toutes les ellipses, courbes qui satisfont les conditions de l'énoncé, mais pour lesquelles nous ne pouvons pas construire de polygone porteur par la méthode décrite dans la preuve, toujours parce qu'elles n'ont pas de point d'inflexion.

Une autre classe de courbes planes fermées est exclue par l'utilisation de cette seconde définition pour le point d'inflexion. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous considérons le point $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ défini par: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$ et pour $n \geq 2$

$$x_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n-2}}), \qquad y_n = \sin(\frac{\pi}{2^{n-2}}) \ ,$$

la courbe $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty}[\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}]$, représentée dans la figure I.3, ne répond pas aux deux conditions de l'énoncé du théorème et cependant peut être considérée un splinegone de polygone porteur, par exemple, le carré $P_0P_1P_2P_3$.

Il est vrai que le théorème I.2 n'est pas un théorème de caractérisation, il n'affirme pas qu'une courbe plane fermée peut être considérée un splinegone *si et seulement si* les deux conditions de l'énoncé sont satisfaites, donc le fait qu'il existe des courbes qui ne satisfont pas les conditions et qui peuvent néanmoins être considérées des splinegones n'est pas une erreur. Quand même, aussi bien la définition du splinegone que ce théorème sont des énoncés restant à un niveau très intuitif, et c'est pour cette raison que nous nous sommes posé le problème de l'introduction formelle d'un objet gardant les bonnes propriétés du splinegone sans ses ambiguïtés.

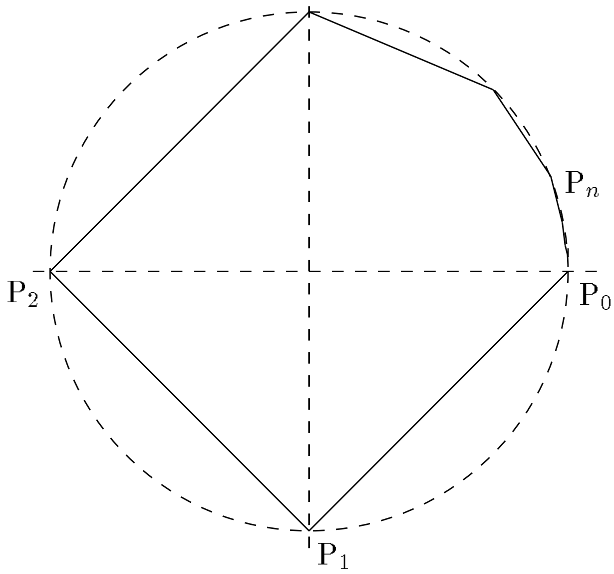

Figure I.3

I.4. La polycourbe

Du point de vue algorithmique, le principal avantage du splinegone est l'existence du polygone porteur, car ce polygone approche plus ou moins le splinegone tout en étant beaucoup plus facile à traiter par des algorithmes. Notre définition devra donc assurer des propriétés qui permettent cette existence du polygone porteur, que nous définirons bien sûr dans le nouveau contexte. En plus, nous considérons que nos courbes sont simples, d'une part parce que cela facilite tout le discours, mais aussi parce que généralement on n'a pas besoin de courbes non-simples pour modéliser des objets du monde réel. Il s'agira donc de courbes planes fermées simples qui doivent avoir seulement un nombre fini de points "mauvais" (c'est-à-dire des points de discontinuité de la tangente ou des points d'inflexion) et qui ne tournent pas sur elles-mêmes indéfiniment. Pour pouvoir introduire ce nouvel objet, nommé *polycourbe*, quelques considérations préliminaires sont nécessaires.

I.4.1. *Définitions préliminaires*

La première notion dont nous avons besoin est celle de point d'inflexion. Nous sommes intéressés par tous les points où le signe de la courbure d'une courbe de classe $\mathcal{C}^2$ change, donc où l'orientation du produit vectoriel des deux premières dérivées change. En plus, si ce produit vectoriel s'annule sur tout un intervalle, nous considérons que la courbure a sur cet intervalle un troisième signe.

Définition I.3. – *Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane de classe $\mathcal{C}^2$ et soit $\mathbf{c} : D \to I\!R$ une paramétrisation régulière de $\mathcal{C}$, où D est un intervalle réel d'intérieur non vide. Nous dirons que* $\mathrm{P} = \mathbf{c}(t_0) \in \mathcal{C}$*, où $t_0 \in Int(D)$, est un point critique de $\mathbf{c}$ (ou, si la paramétrisation est fixée et il n'y a pas de risque de confusion, nous dirons par extension que t_0 est un point critique de $\mathcal{C}$) ssi:*

(I.3.i) $\det\big(\mathbf{c}'(t_0), \mathbf{c}''(t_0)\big) = 0$ *;*

(I.3.ii) $\exists V \subset Int(D)$ *ensemble connexe,* $t_0 \in V$*, tel que* $\det\big(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)\big) \neq 0$ $\forall t \in V \setminus \{t_0\}$*, où* $V \setminus \{t_0\} \neq \emptyset$.

Cette définition est plus générale que celle couramment utilisée pour le point d'inflexion (point où la courbe traverse sa tangente), tous les points d'inflexion sont des points critiques, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, pour la courbe définie par

$$f = (x, y) : [-1, 1] \to I\!R^2$$

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= -t^4 \end{aligned} \qquad \text{pour } t \in [-1, 1]$$

le point $t = 0$ est un point critique sans être un point d'inflexion.

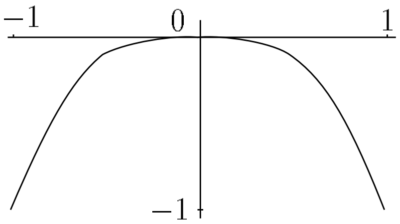

Figure I.4 *Le graphe de f*

Une autre remarque est que pour les courbes qui contiennent des segments de droite (raccordés au moins $\mathcal{C}^2$), il n'y a pas des points critiques à l'intérieur de ces segments, mais les deux extrémités de chaque segment sont de tels points, car nous aurons besoin, pour définir la polycourbe, de pouvoir délimiter les segments qui entrent dans sa composition.

L'autre condition que la polycourbe doit satisfaire pour que l'on puisse lui associer un polygone porteur est de ne pas contenir de spirales infinies, donc des parties qui tournent sur elles-mêmes indéfiniment. Pour assurer cette propriété, une condition sur la première dérivée sera nécessaire, et cette condition sera donnée en utilisant la notion de $k-$*injectivité*.

Définition I.4. – *Soit A et B deux ensembles quelconques et soit $f : A \to B$ une fonction. Pour k entier positif, nous dirons que f est $k-$injective ssi*

$$\mathrm{card}(\{x \in A \mid f(x) = y\}) \leq k, \ \forall y \in B.$$

En prenant $k = 1$ dans cette définition, nous retrouvons l'injectivité habituelle des fonctions.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la définition de l'objet qui sera traité tout au long de cette thèse.

I.4.2. *La définition de la polycourbe*

Définition I.5. – *Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane simple rectifiable d'extrémités* A *et* B *et soit*

$$\mathbf{c} : [0, \alpha] \to I\!R^2 \qquad \mathbf{c}(0) = \mathrm{A},\ \mathbf{c}(\alpha) = \mathrm{B}$$

sa paramétrisation par l'abscisse curviligne. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est une polycourbe si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(I.5.i) *il existe un nombre fini de points*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \alpha$$

tels que $\mathbf{c}\big|_{]t_i, t_{i+1}[}$ soit de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$;

(I.5.ii) *la courbe $\mathbf{c}(]t_i, t_{i+1}[)$ a un nombre fini m_i de points critiques,*

$$t_i < p_1^i < \ldots < p_{m_i}^i < t_{i+1},$$

pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$;

(I.5.iii) *en considérant la suite*

$$q_0 = t_0 < q_1 = p_1^0 < \ldots < q_{m_0} = p_{m_0}^0 < q_{m_0+1} = t_1 < \ldots < q_s = t_n\ ,$$

où $s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i + n$, alors soit $\mathbf{c}'\big|_{]q_j, q_{j+1}[}$ est constante, soit il existe $k \in I\!N^*$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_j, q_{j+1}[}$ soit $k-$injective, pour tout $j \in \{1, \ldots, s-1\}$.

Nous voilà ainsi en la possession d'une description mathématique rigoureuse d'une large classe d'objets non-linéaires du plan. Parmi les problèmes de la géométrie algorithmique, certains, par exemple le problème de l'enveloppe convexe, seront posés uniquement pour des polycourbes fermées, tandis que d'autres, par exemple les problèmes liés aux arrangements, concerneront les polycourbes quelconques.

La polycourbe est, pour l'instant, sous une forme rendant extrêmement épineux le problème du traitement algorithmique. Nous cherchons donc à l'amener à une expression plus abordable et nous commencerons par définir la notion qui équivaut à celle du polygone porteur pour les splinegones.

Définition I.6. – *Soit $\mathcal{C}$ une polycourbe et $\mathcal{P}$ une ligne polygonale. Alors $\mathcal{P}$ est une ligne polygonale porteuse, ou support, pour la polycourbe $\mathcal{C}$ ssi :*

(I.6.i) *tous les sommets de $\mathcal{P}$ appartiennent à la polycourbe;*

(I.6.ii) *pour toute arête $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ de $\mathcal{P}$, si $\mathbf{c}_i$ dénote la partie de $\mathcal{C}$ comprise entre P_i et P_{i+1}, alors soit $\mathbf{c}_i$ est un segment, soit la courbe fermée formée par l'union de $\mathbf{c}_i$ et de $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}$ est simple et $reg(\mathbf{c}_i, \mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1})$ est convexe.*

Évidemment, la notion de ligne polygonale porteuse d'une polycourbe fermée (qui sera une ligne polygonale fermée et donc un polygone) est équivalente à celle de polygone porteur d'un splinegone. Si nous prouvons que toute polycourbe fermée admet un polygone porteur, la conséquence est que tous les algorithmes existant dans la littérature ([Dob88], [Dob90], [Baj91], [Sch87]) qui sont conçus pour tourner sur des objets qui sont en fait des splinegones fonctionneront aussi sur les polycourbes fermées.

I.5. Relations entre splinegone et polycourbe

Dans cette section, nous montrons que toute polycourbe fermée est un splinegone, tout en remarquant que la réciproque n'est pas vraie. Ceci sera fait en prouvant l'existence d'une ligne polygonale porteuse pour toute polycourbe. En plus, comme les polygones non-simples n'offrent pas de bons résultats du point de vue algorithmique, nous prouverons que toute polycourbe fermée admet un polygone support simple.

I.5.1. *La ligne polygonale porteuse*

Pour prouver l'existence de la ligne polygonale porteuse d'une polycourbe nous utilisons le résultat suivant :

Proposition I.7. – *Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane simple rectifiable et soient* A *et* B *ses deux extrémités. Soit* $\mathbf{c} : [a,b] \to I\!R^2$ *la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'origine* A *de* $\mathcal{C}$, *donc* $\mathbf{c}(a) = \mathrm{A}$ *et* $\mathbf{c}(b) = \mathrm{B}$. *Supposons que* $\mathbf{c}$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *et que* $\mathcal{C}$ *n'a pas de point critique et n'est pas un segment de droite (autrement dit,* $\det\big(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)\big) \neq 0\ \forall t \in]a,b[$*). Alors* $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ *existe et est convexe si et seulement si :*

(I.7.i) $\mathbf{c}'/]a,b[$ *est injective ;*

(I.7.ii) *pour tout* $\mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \qquad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB},\mathrm{P})$.

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans l'annexe du chapitre I, et nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat d'existence de la ligne polygonale support.

Théorème I.8. – *Toute polycourbe $\mathcal{C}$ admet une ligne polygonale porteuse.*

Preuve – La preuve consistera à montrer comment on peut construire la ligne polygonale porteuse de la polycourbe $\mathcal{C}$. Avant de commencer, remarquons que, même si la démonstration est constructive, elle reste purement théorique, il ne sera pas possible d'écrire, suivant le fil de la preuve, un algorithme qui construit le polygone porteur de la polycourbe. Ceci parce qu'un tel algorithme devrait calculer, dans les notations de la définition I.5, les valeurs q_i, pour tout $i \in \{0, \ldots, s\}$. Même si ces valeurs sont considérées connues, l'algorithme devrait effectuer des intersections de droites et de courbes, ce qui contredit la philosophie elle-même de l'approche que nous voulons présenter dans cette thèse.

Nous présentons ici la preuve de l'existence d'un polygone porteur pour une polycourbe fermée. La construction d'une ligne polygonale porteuse pour une polycourbe qui n'est pas fermée se fait de manière identique. Nous supposons donc que $\mathcal{C}$ est fermée.

Soit, toujours dans les notations de la définition I.5, $\mathrm{P}_i = \mathbf{c}(q_i)$, pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$, et soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{s-1}$. Si $s < 3$, nous prenons arbitrairement $3 - s$ points sur $\mathcal{C}$, différents des points P_i définis, et nous introduisons les valeurs q leur correspondant par $\mathbf{c}^{-1}$ dans la liste des q_i donnée par la définition. Il nous reste donc à étudier les cas $s \geq 3$.

Si pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ satisfait les conditions (I.7.i) et (I.7.ii), alors, conformément à la proposition I.7, $\mathcal{P}$ est un polygone porteur pour $\mathcal{C}$. Si l'une des deux conditions n'est pas vérifiée, nous pouvons la faire respecter en ajoutant des sommets supplémentaires aux sommets du polygone $\mathcal{P}$, sommets qui seront toujours des points de la polycourbe $\mathcal{C}$.

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ ne soit ni injective, ni constante. D'après la définition de la polycourbe, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ soit $m-$injective. Évidemment, $m > 1$. Soit m_i le plus petit entier positif tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ soit m_i-injective, et soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_{m_i} \in]q_i, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}'(a_1) = \mathbf{c}'(a_2) = \ldots = \mathbf{c}'(a_{m_i})$. Nous voulons prouver que $\mathbf{c}'\big|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est injective pour tout $k \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$.

En effet, dans l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ n'existant ni de points critiques, ni de points de discontinuité de la tangente pour $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}'$ est continue et strictement monotone. Elle "balaie" le cercle unité, donc si nous supposons qu'il existe $x, y \in]a_k, a_{k+1}[$, $x < y$, tels que $\mathbf{c}'(x) = \mathbf{c}'(y)$, nous en déduisons que $\mathbf{c}'(t)$ fait, pour t allant de x à y, un tour complet du cercle unité. Mais $\mathbf{c}'$ est continue, donc il existe $a_0 \in [x, y[$ tel que $\mathbf{c}'(a_0) = \mathbf{c}'(a_k)$. Alors nous aurons $\mathbf{c}'(a_0) = \mathbf{c}'(a_1) = \mathbf{c}'(a_2) = \ldots = \mathbf{c}'(a_{m_i})$ et donc (au moins) $m_i + 1$ points dans l'intervalle $]q_i, q_{i+1}[$ où $\mathbf{c}'$ prend la même valeur, donc $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ n'est pas m_i-injective, d'où la contradiction.

Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[}$ est m_i-injective, $m_i \geq 2$, nous choisissons les points $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{m_i}^i \in]q_i, q_{i+1}[$ comme décrit ci-dessus et nous les incluons parmi les q_i dans le bon ordre. Nous prenons donc $s = s + \sum\limits_{i \in \mathrm{I}} m_i$, où

$$\mathrm{I} = \left\{ i \in \{0, \ldots, s-1\} \mid \mathbf{c}'\big|_{]q_i, q_{i+1}[} \text{ n'est pas injective, ni constante} \right\}.$$

Pour chaque arête du nouveau polygone $\mathcal{P} = \mathbf{c}(q_0) \ldots \mathbf{c}(q_{s-1})$ la condition (I.7.i) est satisfaite et nous passons à l'étude de la condition (I.7.ii).

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ ne satisfasse pas (I.7.ii). Alors nous aurons $\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1}) \cap \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[) \neq \emptyset$, mais $\operatorname{card}\big((\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1}) \cap \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)\big) = 1$. En effet, si nous supposons qu'il existe $t_1 < t_2 \in]q_i, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_2) \in \mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$, en notant

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})}}{\mathrm{d}(\mathbf{c}(q_i), \mathbf{c}(q_{i+1}))}$$

nous voyons facilement qu'il existe $a_0 \in]q_i, t_1[$, $a_1 \in]t_1, t_2[$ et $a_2 \in]t_2, q_{i+1}[$ tels que $\mathbf{c}'(a_j) = \pm\vec{u}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, et donc il existe $j \neq k \in \{0, 1, 2\}$ tels que $\mathbf{c}'(a_j) = \mathbf{c}'(a_k)$, contradiction.

Ainsi la droite $\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$ coupe la courbe $\mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ en un seul point. Soit $r_i \in]q_i, q_{i+1}[$ tel que $\mathbf{c}(r_i) \in \mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_{i+1})$. Les courbes $\mathbf{c}([q_i, r_i])$ et $\mathbf{c}([r_i, q_{i+1}])$ satisfont toutes les deux la condition (I.7.ii). Cependant, ce n'est pas le point $\mathbf{c}(r_i)$ que nous allons prendre comme nouveau sommet de $\mathcal{P}$, car parmi les segments $[\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)]$ et $[\mathbf{c}(r_i)\mathbf{c}(q_{i+1})]$ un est complètement inclus dans l'autre, comme nous pouvons le voir dans la figure I.5.

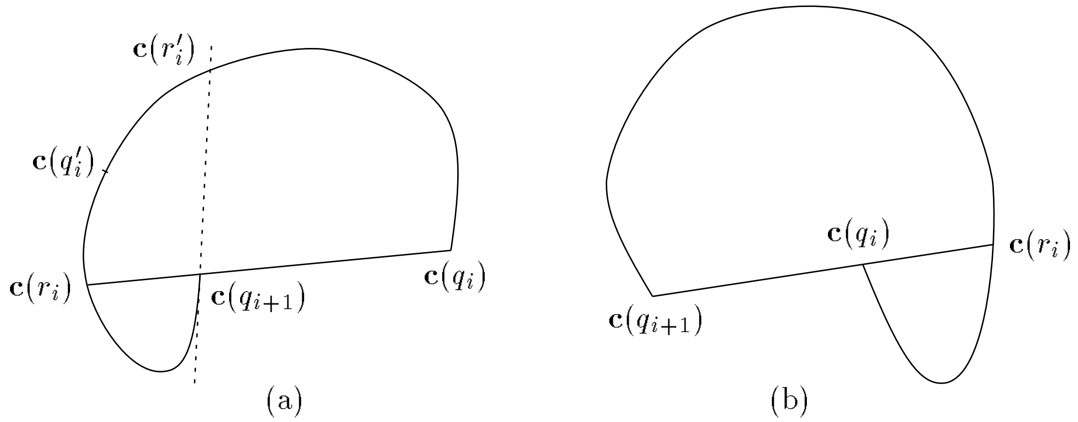

Figure I.5

Supposons que nous sommes dans le cas de la figure I.5(a), donc

$$[\mathbf{c}(r_i)\mathbf{c}(q_{i+1})] \subset [\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)].$$

Soit $r_i' \in]q_i, r_i[$ tel que $\mathbf{c}(r_i') = \Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathbf{c}(q_{i+1})) \cap \mathbf{c}(]q_i, r_i[)$. Le paramètre r_i' existe et est unique, car $reg(\mathbf{c}([q_i, r_i]),]\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)[)$ est convexe et $q_{i+1} \in]\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(r_i)[$. Alors nous choisissons

$$q_i' = \frac{r_i + r_i'}{2}$$

et les courbes $\mathbf{c}([q_i, q_i'])$ et $\mathbf{c}([q_i', q_{i+1}])$ vont toutes les deux avoir la propriété (I.7.ii) et en plus $[\mathbf{c}(q_i)\mathbf{c}(q_i')] \cap [\mathbf{c}(q_i')\mathbf{c}(q_{i+1})] = \mathbf{c}(q_i')$. Le cas de la figure I.5(b) se traite de la même façon.

Donc pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tel que $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ ne satisfait (I.7.ii) nous prenons le point q_i' comme décrit ci-dessus et nous l'incluons parmi les q_i. Nous aurons ainsi $s = s + \mathrm{card}(\mathrm{J})$, où

$$\mathrm{J} = \big\{i \in \{0, 1, \ldots, s-1\} \mid \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \text{ ne satisfait pas (I.7.ii)}\big\}.$$

Le polygone $\mathcal{P} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1)\ldots\mathbf{c}(q_{s-1})$ ainsi obtenu sera, conformément à la proposition I.7, un polygone porteur pour la polycourbe $\mathcal{C}$. □

Comme nous avons déjà dit, ce théorème a comme conséquence immédiate le résultat suivant:

Corollaire I.9. – *Toute polycourbe fermée est un splinegone.*

Par contre, la réciproque n'est pas vraie, un exemple évident de splinegone qui n'est pas une polycourbe étant la courbe définie dans la section I.3 et présentée dans la figure I.3. Ainsi, les polycourbes fermées forment une classe plus restreinte d'objets du plan que les splinegones, néanmoins cette classe reste suffisamment générale pour que des résultats la concernant soient d'un grand intérêt.

I.5.2. *Le polygone porteur simple*

Nous pouvons remarquer sans aucune difficulté qu'une polycourbe fermée, de par sa définition, n'est pas seulement un splinegone, mais est un splinegone *simple*. Comme approcher une courbe simple par une courbe (un polygone, en l'occurrence) non-simple n'est pas trop efficace du point de vue algorithmique, nous nous posons le problème de l'existence d'un polygone porteur simple pour une polycourbe fermée quelconque.

Théorème I.10. – *Toute polycourbe fermée $\mathcal{C}$ admet un polygone porteur simple.*

Preuve – Soit $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{s-1} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1)\ldots\mathbf{c}(q_{s-1})$ un polygone porteur de $\mathcal{C}$ et supposons-le non simple. Nous voulons prouver que

$$\Big(\bigcup_{i=0}^{s-1}]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\Big) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \tag{I.1}$$

Si $\mathcal{P}$ n'est pas simple, au moins une des deux conditions suivantes est satisfaite:
(I.10.i) il existe $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{card}(]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[) = 1$;
(I.10.ii) il existe $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{P}_i \in]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[$.
(il ne peut pas exister $i \neq j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ tels que $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}_j$, car $\mathcal{C}$ est une courbe simple).

Si (I.10.ii) est satisfaite, la relation (I.1) s'en déduit immédiatement, car $\mathrm{P}_i \in \mathcal{C}$. Si (I.10.i) est satisfaite, alors les courbes $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[$ et $\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\cup]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[$, qui sont deux courbes planes fermées, ont un point d'intersection dont nous savons qu'il est simple. Mais deux courbes planes fermées ont toujours un nombre pair de points d'intersection, donc

$$\big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cap \mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\cap]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big) \neq \emptyset.$$

D'un autre côté, $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) \cap \mathbf{c}([q_j, q_{j+1}]) = \emptyset$, car $\mathcal{C}$ est simple et nous ne pouvons pas avoir $i = j \pm 1$ à cause de la condition $\mathrm{card}(]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[) = 1$. Donc

$$\big(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\cap]\mathrm{P}_j\mathrm{P}_{j+1}[\big) \cup \big(\mathbf{c}([q_j, q_{j+1}])\cap]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big) \neq \emptyset$$

et par conséquent la condition (I.1) est satisfaite.

Compte tenu de la propriété que nous venons d'établir, si nous arrivons à prouver qu'un polygone porteur $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_{s-1} = \mathbf{c}(q_0)\mathbf{c}(q_1)\ldots\mathbf{c}(q_{s-1})$ vérifiant

$$\Big(\bigcup_{i=0}^{s-1}]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\Big) \cap \mathcal{C} = \emptyset$$

existe, il est sûr que $\mathcal{P}$ est un polygone simple. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de construire un tel polygone. Par exemple, dans le cas présenté dans la figure I.6, où la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ est une tangente intérieure à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ en P_{i+1}, nous ne pouvons pas construire une ligne polygonale porteuse pour $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ qui ne coupe pas $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+3}])$. Nous verrons plus tard comment résoudre le problème dans un tel cas.

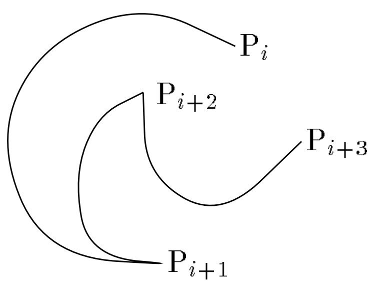

Figure I.6

Soit $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Nous notons

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cap \big(reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),\ ]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[)\cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big).$$

Si $\mathcal{A} = \emptyset$, alors nous gardons $[\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}]$ comme arête du polygone porteur. Sinon, nous discutons séparément les deux cas suivants:

(a) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ et $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}] \cap \mathcal{A} = \emptyset$;

(b) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ou $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}] \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Dans le cas (a), soit

$$d_i = \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A} \\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])}} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Alors nous aurons $d_i > 0$ et nous considérons le cercle de rayon d_i qui passe par P_i et qui a le centre $\mathcal{O}$ sur la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ et tel que la distance, mesurée sur la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, entre P_i et $\mathcal{O}$ soit minimale. Ce cercle existe, car sinon nous pouvons en déduire que

$$\mathrm{B}(\mathrm{P}_i, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]) = \emptyset$$

et donc $reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[) \subset \mathrm{B}(\mathrm{P}_i, d_i)$, d'où une contradiction avec la définition de d_i. Pour les mêmes raisons,

$$\mathrm{card}\big(\mathrm{B}(\mathcal{O}, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\big) \geq 2$$

et soit

$$\mathrm{Q}_1^i = \mathbf{c}(q_1^i) \in \big(\mathrm{B}(\mathcal{O}, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\big) \setminus \{\mathrm{P}_i\}$$

le point de $\big(\mathrm{B}(\mathcal{O}, d_i) \cap \mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])\big) \setminus \{\mathrm{P}_i\}$ le plus loin, sur $\mathbf{c}_i$, de P_i. Évidemment, $]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[\cap\mathcal{C} = \emptyset$, nous introduisons donc Q_1^i parmi les sommets de $\mathcal{P}$ et nous répétons le procédé en partant de Q_1^i. Nous insérons ainsi parmi les sommets de $\mathcal{P}$ les points Q_1^i,$\mathrm{Q}_2^i = \mathbf{c}(q_2^i)$,...,$\mathrm{Q}_{m_i}^i = \mathbf{c}(q_{m_i}^i)$, en nous arrêtant quand le cercle considéré comme décrit en partant de $\mathrm{Q}_{m_i}^i$ contient P_{i+1}. Alors nous aurons

$$\Big(\bigcup_{k=0}^{m} \big(reg(\mathbf{c}([q_j^i, q_{j+1}^i]),]\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i[)\cup]\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i[\big)\Big) \cap \mathcal{C} = \emptyset,$$

où nous avons noté $\mathrm{Q}_0^i := \mathrm{P}_i$, $\mathrm{Q}_{m+1}^i := \mathrm{P}_{i+1}$ et $q_0^i := q_i$, $q_{m+1}^i := q_{i+1}$, donc non seulement nous pouvons introduire chaque $[\mathrm{Q}_j^i\mathrm{Q}_{j+1}^i]$ comme arête du polygone porteur, mais en plus il ne sera jamais nécessaire de les remplacer, ce qui sera très important dans la discussion pour le cas (b).

Le cas (b) se divise à son tour en deux sous cas :

(b.1) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ et $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$;

(b.2) $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ est tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ ou $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ est tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$.

Dans le cas (b.1), supposons que $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$; si l'autre des conditions du cas (b) est satisfaite, la discussion est analogue. Nous aurons donc $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \cap reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[) \neq \emptyset$; les deux positions relatives possibles des courbes $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ et $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ sont présentées dans la figure I.7.

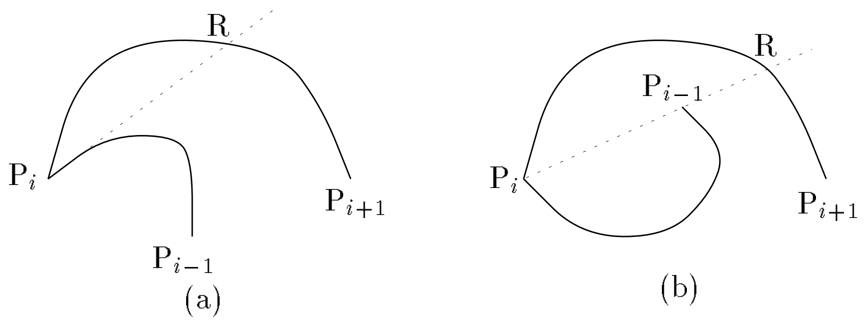

Figure I.7

Dans le cas de la figure I.7(a), la droite $\mathrm{P}_i\mathrm{R}$ est de vecteur directeur $\mathbf{c}'(q_i^-)$, donc est tangente à $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ en P_i. Il résulte que le segment $]\mathrm{P}_i\mathrm{R}]$ ne peut pas couper la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$, quels que soient les sommets de celle-ci. Soit

$$d_i = \min\left(\inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A} \\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])}} \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}),\ \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) \\ \mathrm{B}\in\mathcal{C}|_{[\mathrm{RP}_{i+1}]}}} \mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \right)$$

et appliquons le procédé décrit pour le cas (a). Si le premier point ainsi obtenu sur $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, Q_1^i, se situe plus près, sur la courbe, de P_i que R, il est facile à voir que la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ obtenue ne coupe pas $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ et par conséquent aucune ligne polygonale support que cette courbe pourrait avoir ; nous avons donc fini la discution pour ce cas. Si Q_1^i est plus loin de P_i que R, toujours en prenant les distances sur la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, il suffira d'ajouter le point R entre P_i et Q_1^i comme sommet de la ligne polygonale support de $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ pour qu'elle ait les propriétés données.

Si nous sommes dans le cas de la figure I.7(b), soit R′ le point partageant la courbe $\mathcal{C}|_{[\mathrm{P}_i\mathrm{R}]}$ en deux parties égales. Évidemment, $]\mathrm{P}_i\mathrm{R}'] \cap \mathbf{c}([q_{i-1}, q_i]) = \emptyset$, et par le raisonnement fait pour le cas de la figure I.7(a), mais en nous référant cette fois à R′ à la place de R, nous construisons la ligne polygonale porteuse de $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ satisfaisant les bonnes conditions.

Dans le cas (b.2), nous pouvons considérer qu'une seule des deux conditions est satisfaite, car si les deux le sont simultanément, alors nous introduisons parmi les sommets du polygone porteur le sommet $\mathrm{P}'_i = \mathbf{c}((q_i + q_{i+1})/2)$ et nous obtenons ainsi deux morceaux de courbe, $\mathbf{c}([q_i, (q_i + q_{i+1})/2])$ et $\mathbf{c}([(q_i + q_{i+1})/2, q_{i+1}])$, telles que pour chacune d'elles une seule des deux conditions du cas (b.2) soit satisfaite. Supposons donc que $\mathbf{c}([q_{i-1}, q_i])$ n'est pas tangente intérieure à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ et que $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$ l'est. Si nous considérons d_i comme définie auparavant, nous aurons $d_i = 0$, et par conséquent la méthode utilisée pour le cas (a) ne fonctionne plus. Nous remarquons aussi que nous ne pouvons pas choisir un point $\mathrm{Q}_1^i = \mathbf{c}(q_1^i) \in \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ tel que

$$\mathcal{C} \cap \left(reg(\mathbf{c}([q_i, q_1^i]),]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[) \cup]\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_1^i[\right) = \emptyset$$

et en conséquence le critère utilisé pour le cas (b.1) ne marche pas lui non plus. Nous allons résoudre cette situation en construisant d'abord la ligne polygonale correspondant à la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ et seulement après la ligne polygonale correspondant à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$. Avant de construire la ligne polygonale associée à la courbe $\mathbf{c}([q_{i+1},\ q_{i+2}])$, nous nous assurons de nous placer dans le cas (a), ce qui peut se faire très facilement en introduisant, si besoin, le point $\mathrm{P}'_{i+1} = \mathbf{c}((q_{i+1} + q_{i+2})/2)$ parmi les sommets de $\mathcal{P}$, comme déjà vu. Nous imposons cette condition pour éviter d'entrer dans un cycle infini en passant de la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ à la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$, de la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}]$ à la construction de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_{i+2}, q_{i+3}]$ et ainsi de suite, comme il aurait pu être le cas pour la polycourbe représentée figure I.8, où chaque courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ est tangente à celle qui la précède, et ceci de manière circulaire.

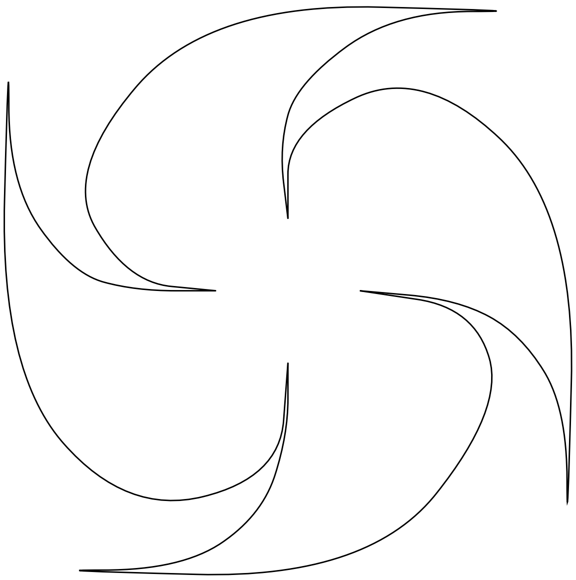

Figure I.8

Ainsi, nous savons que $\mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$ est dans le cas (a), nous construisons la ligne polygonale porteuse $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ comme décrit, et cette ligne polygonale ne sera plus modifiée par la suite. En revenant à la courbe $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$, soit

$$\mathcal{A}' = \big(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])\big) \cap \big(reg(\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}]),\ ]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[)\cup]\mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1}[\big)$$

et soit

$$d_i' = \inf_{\substack{\mathrm{A}\in\mathcal{A}' \\ \mathrm{B}\in\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])}} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

Considérons le point $\mathrm{P}_i' = \mathbf{c}(q_i')$, construit en partant de P_{i+1} en utilisant le même procédé que pour construire Q_1^i dans le cas (a). Si

$$\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i'\big)\Big) < \mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}),\ \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\big)\Big),$$

alors $[\mathrm{P}_i'\mathrm{P}_{i+1}]$ ne coupe pas la ligne polygonale $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ et comme par construction $]\mathrm{P}_i'\mathrm{P}_{i+1}[\cap\big(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])\big) = \emptyset$ il en résulte que cette arête peut être gardée comme arête du polygone porteur. Sinon, soit $\mathrm{P}_i'' = \mathbf{c}(q_i'') \in \mathbf{c}(]q_i, q_{i+1}[)$ tel que

$$\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i''\big)\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{m}\Big(\angle\big(\Delta(\mathbf{c}'(q_{i+1}^-), \mathrm{P}_{i+1}), \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\big)\Big).$$

Évidemment $\mathrm{P}_i'' \in \mathbf{c}(]q_i',\ q_{i+1}[)$ et donc $]\mathrm{P}_i''\mathrm{P}_{i+1}[$ ne coupe pas $\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([q_{i+1}, q_{i+2}])$; en plus, $]\mathrm{P}_i''\mathrm{P}_{i+1}[$ ne coupe pas la ligne polygonale $\mathrm{P}_{i+1}\mathrm{Q}_1^{i+1}\ldots\mathrm{Q}_{m_{i+1}}^{i+1}\mathrm{P}_{i+2}$ et nous gardons donc ce segment comme arête du polygone porteur. Dans les deux cas, nous construisons le restant de la ligne polygonale associée à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ en construisant la ligne polygonale correspondant à $\mathbf{c}([q_i, q_i'])$, respectivement $\mathbf{c}([q_i, q_i''])$, car ces deux courbes sont dans le cas (a).

Nous construisons ainsi les lignes polygonales associées à $\mathbf{c}([q_i, q_{i+1}])$ pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Vue la façon dont cette construction est faite, il est évident que

$$\mathcal{P} = \mathrm{P}_0 \mathrm{Q}_1^0 \ldots \mathrm{Q}_{m_0}^0 \mathrm{P}_1 \mathrm{Q}_1^1 \ldots \mathrm{Q}_{m_{s-2}}^{s-2} \mathrm{P}_{s-1} \mathrm{Q}_1^{s-1} \ldots \mathrm{Q}_{m_{s-1}}^{s-1}$$

est un polygone porteur de $\mathcal{C}$ et est aussi un polygone simple. $\square$

Deuxième Partie
Polycourbe de Bézier

I.6. Introduction

Dans la première partie de ce chapitre nous avons introduit de manière rigoureuse la famille de courbes planes, les polycourbes, qui fait l'objet d'étude de cette thèse, la reliant aux résultats similaires déjà parus dans la littérature. Mais, comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce rapport, l'approche que nous nous proposons de présenter est basée sur la construction d'une suite de polygones convergeant, dans un sens à préciser, vers la polycourbe donnée. La construction d'une telle suite de polygones n'étant pas faisable de manière explicite dans le cas des polycourbes générales, nous cherchons un cas particulier tel que, d'un côté, la suite voulue de polygones puisse être construite d'une façon facile à traduire par un algorithme, et de l'autre côté, la famille de courbes correspondant à ce particulier ne soit pas trop restreinte pour que les résultats obtenus pour ses membres soient intéressants.

Une solution facile à ce problème est donnée par les courbes paramétriques contrôlées par des ensembles de points satisfaisant certaines propriétés. Ainsi, si $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ sont les points de contrôle d'une telle courbe paramétrique, les propriétés mentionnées sont :

- les extrémités de la courbe sont les points P_0 et P_n ;
- la droite $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ est tangente à la courbe en P_0 et la droite $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ est tangente à la courbe en P_n ;
- la courbe est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle ;
- la courbe et la ligne polygonale $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_n$ vérifient la propriété de la diminution de la variation ([Hos93], [Far97] ; cette propriété sera aussi expliquée dans le paragraphe suivant) ;
- il existe un algorithme de subdivision par l'intermédiaire duquel nous pouvons construire, à partir du polygone $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_n$ et sans effectuer d'opérations directement sur la courbe, une suite de polygones convergeant vers la courbe.

Les plus utilisées des classes de courbes paramétriques qui satisfont ces cinq propriétés sont les courbes de Bézier polynômiales et rationnelles, les B-splines et les NURBS, sous certaines conditions. Parmi toutes ces classes, notre choix s'est arrêté sur les courbes de Bézier (polynômiales). Il a été motivé, premièrement, par l'importance du rôle joué par les courbes de Bézier dans la modélisation géométrique et le fait qu'elles sont largement répandues et étudiées, et deuxièmement par la facilité d'implémentation des algorithmes les concernant. Mais nous précisons encore une fois que toute courbe paramétrique ayant les cinq propriétés ci-dessus conviendrait, les preuves des résultats que nous établirons ne reposant pas sur des propriétés des courbes de Bézier autres que celles-ci.

Nous commençons par un bref rappel sur les courbes de Bézier. Ensuite, nous introduisons la polycourbe de Bézier, une polycourbe qui est courbe de Bézier par morceaux, et nous définissons son polygone de contrôle à partir des B-polygones des courbes de Bézier la constituant. Nous étudions aussi les propriétés des polycourbes de Bézier et surtout une propriété du polygone de contrôle qui sera très importante pour la discussion des chapitres suivants.

I.7. Concentré de chapitre (I, deuxième partie)

Quel que soit le niveau de lecture que vous utilisez, si vous n'êtes pas familiarisé avec les courbes de Bézier vous devez impérativement lire la section I.8. Même si vous l'êtes, la lecture de la définition I.11 vous montrera les notations que nous allons utiliser tout au long de la thèse. En plus, regardez la définition I.12, car la distance de Hausorff est beaucoup utilisée dans les chapitres suivants.
Premier niveau. Pour comprendre la discussion des chapitres suivants, vous devez lire les définitions I.13 et I.14 (qui sont équivalentes), I.15, la propriété I.16 et la définition I.17. Le petit texte se trouvant entre les définitions I.14 et I.15 explique pourquoi nous n'utilisons pas des courbes de Bézier quelconques dans la composition de la polycourbe de Bézier. Si vous n'avez pas lu la section I.4, le lemme I.18 ne vous dira rien. La section I.9 devrait être lue en entier, et j'attire particulièrement l'attention sur la remarque de la page 25, indispensable à la compréhension de la notion de polycourbe de Bézier à travers les traitements par subdivision de de Casteljau. Bien sûr, la lecture de la preuve du théorème I.24 est loin d'être nécessaire.
Deuxième niveau. La section I.8 doit être entièrement lue - sauf la preuve du lemme I.18, pour laquelle nous utilisons les propriétés des courbes de Bézier, le fait que toutes les courbes de Bézier de la composition d'une polycourbe de Bézier sont complètement convexes et la propriété I.19, énoncée et prouvée en plein milieu de la démonstration de I.18. La section I.9 doit aussi être toute lue et - au cas où vous lisiez uniquement les avis pour le niveau de lecture qui vous intéresse - j'attire encore l'attention sur la remarque de la page 25, absolument indispensable pour comprendre la notion de polycourbe de Bézier, compte tenu des subdivisions de de Casteljau que ses courbes de Bézier composantes subissent. Pour le théorème I.24, il suffit de mentionner que la valeur γ_0 dépend de la polycourbe (dans sa structure initiale) et plus précisément est une mesure de l' “étroitesse” de la polycourbe. Les deux premières pages de la démonstration (pages 34-36) peuvent être lues pour voir comment γ_0 est défini.

I.8. Rappels sur les courbes de Bézier

I.8.1. *Les polynômes de Bernstein*

Soit n un entier non-négatif. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ nous définissons le polynôme

$$\mathrm{B}_i^n : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R \qquad \mathrm{B}_i^n(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{(n-i)} \qquad \text{où } \mathrm{C}_n^i = n!/(i!(n-i)!)$$

La famille $\{\mathrm{B}_i^n\}_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ forme une base pour l'espace des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à n. Nous nous intéressons uniquement aux restrictions de ces polynômes à l'intervalle $[0,1]$ et voici quelques-unes de leur propriétés :

1. $0 \leq \mathrm{B}_i^n(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0,\ldots,n\}$;
2. $\sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}_i^n(t) = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$;
3. $\mathrm{B}_i^n(t) = \mathrm{B}_{n-i}^n(1-t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0,\ldots,n\}$;
4. $\mathrm{B}_i^n(t) = (1-t)\mathrm{B}_i^{n-1}(t) + t\mathrm{B}_{i-1}^{n-1}(t) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0,\ldots,n\}$, avec la convention $\mathrm{B}_i^n(t) = 0$ si $i < 0$ ou $i > n$;
5. $(\mathrm{B}_i^n)'(t) = n\big(\mathrm{B}_{i-1}^{n-1}(t) - \mathrm{B}_i^{n-1}(t)\big) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \{0,\ldots,n\}$.

Les preuves de ces propriétés ne sont pas difficiles à faire et peuvent être trouvées dans plusieurs titres de la bibliographie [Hos93], [Far97], [Fio87].

I.8.2. *Définition et propriétés des courbes de Bézier*

Nous sommes intéressés uniquement par les courbes de Bézier planes, même si ces courbes peuvent être définies dans un cadre beaucoup plus général.

Définition I.11. – *Soient* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ *des points du plan. La courbe de Bézier associée à cet ensemble de points est la courbe paramétrique polynômiale de degré* n *définie par*

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,\cdot\,) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,t) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{B}_i^n(t)\mathrm{P}_i$$

Les points $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ *s'appellent les points de contrôle de la courbe de Bézier et le polygone* $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_n$ *le polygone Bézier ou B-polygone.*

Remarque – Le B-polygone d'une courbe de Bézier sera considéré, sauf mention contraire, comme n'étant pas fermé, donc sans l'arête $]\mathrm{P}_m\mathrm{P}_0[$.

La figure I.9 présente des exemples de courbes de Bézier.

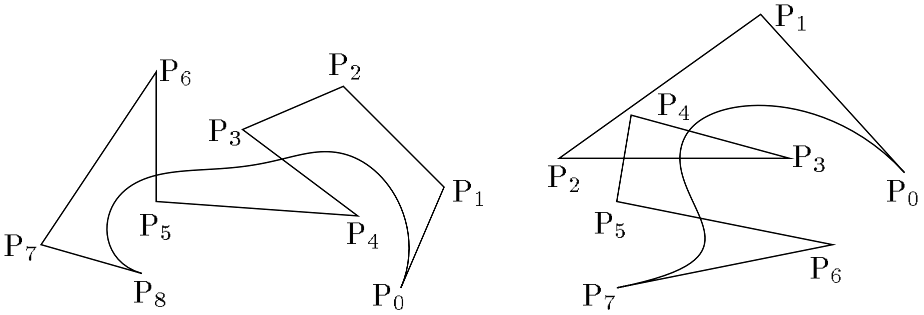

Figure I.9

Les courbes de Bézier ont des propriétés géométriques intéressantes :

(I.11.1) la courbe a les mêmes extrémités que son B-polygone ;

(I.11.2) la courbe est incluse dans l'enveloppe convexe de son B-polygone ;

(I.11.3) la courbe est symétrique en t :

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,1-t) = \mathrm{B}_n(\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{n-1}, \ldots, \mathrm{P}_0\,;\,t)$$

(I.11.4) la diminution de la variation : le cardinal de l'intersection d'une droite quelconque avec la courbe est inférieur ou égal au cardinal de l'intersection de la droite avec le B-polygone ;

(I.11.5) les droites P_0P_1 et $P_{n-1}P_n$ sont respectivement tangentes à la courbe en P_0 et P_n.

Ces propriétés découlent des propriétés des polynômes de Bernstein. Leur démonstrations peuvent être trouvées dans la bibliographie [Hos93], [Far97]. En plus, il existe des expressions pour toutes les dérivées de $B_n(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0\,;\,.)$, mais nous nous contentons de donner les formules de la première et de la deuxième dérivées, car elles nous seront nécessaires par la suite :

$$
\begin{aligned}
B_n'(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0\,;\, t) &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)(P_{i+1} - P_i) \\
B_n''(P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0\,;\, t) &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^{n-2}(t)(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i)
\end{aligned}
\tag{I.2}
$$

I.8.3. *La subdivision de de Casteljau*

L'algorithme de subdivision de de Casteljau est une méthode par laquelle nous pouvons construire, à partir des points de contrôle $P_0, P_1, \ldots, P_n$ d'une courbe de Bézier, une suite de polygones qui converge vers la courbe au sens de plusieurs distances, parmi lesquelles nous nous intéressons à la distance de Hausdorff.

Soit $t_0 \in]0,1[$. En utilisant la formule $P_i^j = (1-t_0)P_i^{j-1} + t_0 P_{i+1}^{j-1}$, nous construisons le tableau triangulaire suivant :

$$
\begin{array}{lllllll}
P_0^0 = P_0 & & & & & & \\
 & P_0^1 & & & & & \\
P_1^0 = P_1 & & P_0^2 & & & & \\
 & P_1^1 & & \cdot & & & \\
P_2^0 = P_2 & & & & \cdot & & \\
\quad\cdot & & & & & P_0^{n-1} & \\
\quad\cdot & & & & & & P_0^n \\
\quad\cdot & & & & & P_1^{n-1} & \\
P_{n-2}^0 = P_{n-2} & & & & \cdot & & \\
 & P_{n-2}^1 & & \cdot & & & \\
P_{n-1}^0 = P_{n-1} & & P_{n-2}^2 & & & & \\
 & P_{n-1}^1 & & & & & \\
P_n^0 = P_n & & & & & &
\end{array}
$$

Ce tableau peut être résumé par la formule

$$
P_i^j = \sum_{k=0}^{j} B_k^j(t_0) P_{i+k} \tag{I.3}
$$

Le point P_0^n est le point de la courbe correspondant au paramètre t_0 :

$$
P_0^n = B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\, t_0)
$$

Ainsi, la courbe de Bézier est partagée en deux morceaux, $B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,[0, t_0])$ et $B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,[t_0, 1])$, et chacune de ces deux parties peut être reparamétrisée comme courbe de Bézier. La courbe $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[0, t_0])$ sera la courbe associé au B-polygone $\mathrm{P}_0^0\mathrm{P}_0^1 \ldots \mathrm{P}_0^{n-1}\mathrm{P}_0^n$ et la courbe $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[t_0, 1])$ sera la courbe associée au B-polygone $\mathrm{P}_0^n\mathrm{P}_1^{n-1} \ldots \mathrm{P}_{n-1}^1\mathrm{P}_n^0$. Nous pouvons donc appliquer le même procédé à chacune des courbes $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[0, t_0])$ et $\mathrm{B}_n(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\,;\,[t_0, 1])$, en obtenant ainsi une division de la courbe initiale en quatre morceaux pouvant chacun être écrit sous la forme d'une courbe de Bézier, et ainsi de suite. Si à chaque étape nous considérons le polygone obtenu par l'union des tous les B-polygones des parties respectives de la courbe initiale, nous aurons une suite de polygones qui converge vers cette courbe [Hos93], [Far97], [Fio87] au sens de plusieurs distances, parmi lesquelles nous nous intéressons à la distance de Hausdorff (dont la définition est rappelée plus loin). La figure I.10 présente un exemple de courbe de Bézier subdivisée une fois pour un paramètre $t_o = 1/3$.

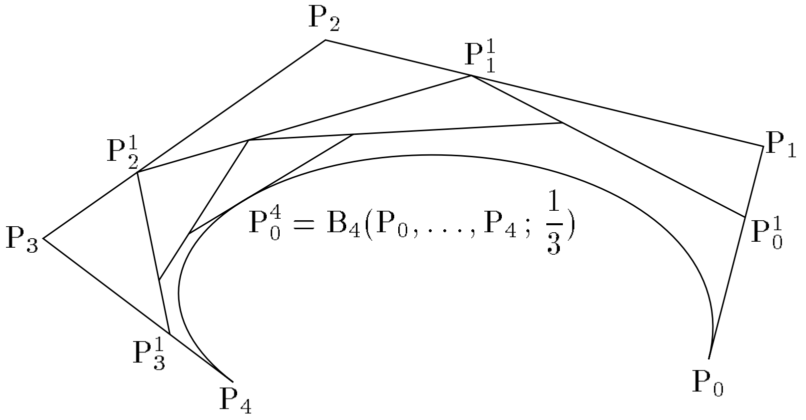

Figure I.10

Rappelons ici définition de la distance de Hausdorff, que nous allons beaucoup utiliser :

Définition I.12. – *Soit* E *un espace métrique et notons* $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *l'ensemble de tous les compacts de* E. *Alors pour* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *la distance de Hausdorff entre* K_1 *et* K_2 *sera définie par*

$$\delta^{\mathrm{H}}(K_1, K_2) = \inf\{r > 0 \big| K_1 \subset \mathrm{B}(K_2, r) \text{ et } K_2 \subset \mathrm{B}(K_1, r)\} \tag{I.4}$$

Une autre définition connue pour la distance de Hausdorff est

$$\delta^{\mathrm{H}}(K_1, K_2) = \max\{\sup_{\mathrm{A}\in K_1} \inf_{\mathrm{B}\in K_2} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \sup_{\mathrm{A}\in K_2} \inf_{\mathrm{B}\in K_1} \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})\} \tag{I.5}$$

Les deux définitions sont bien sûr équivalentes et δ^{H} a toutes les propriétés d'une distance sur $\mathcal{K}(\mathrm{E})$.

I.9. Définition et propriétés de la polycourbe de Bézier

Nous allons, dans ce qui suit, beaucoup utiliser la notion de *courbe convexe*, précisons donc ce que nous entendons exactement par là.

Définition I.13. – *Nous dirons qu'une courbe simple* $\mathcal{C}$ *d'extrémités* A *et* B *est convexe ssi reg*$(\mathcal{C}, [\mathrm{AB}])$ *est convexe.*

Les points A et B peuvent être confondus ou pas. Une autre définition est

Définition I.14. – *Une courbe simple est convexe ssi elle est incluse dans la frontière de son enveloppe convexe.*

L'équivalence de ces deux définitions est évidente, de par la définition de $reg(\mathcal{C}, \mathrm{AB})$, et nous utiliserons l'une ou l'autre en fonction des besoins de la discussion.

Comme mentionné dans l'introduction de cette partie, nous allons particulariser la notion de polycourbe, trop générale pour le traitement algorithmique, en utilisant des courbes de Bézier. Mais encore, les courbes de Bézier quelconques s'avèrent trop générales pour les algorithmes que nous allons présenter dans cette thèse. Ceci est dû au fait que nous aurons besoin pas seulement de courbes convexes par morceaux, ce que les courbes de Bézier sont de toute façon, mais aussi de pouvoir délimiter ces morceaux convexes, ce qui revient au problème du calcul des points d'inflexion d'une courbe de Bézier donnée, et par conséquent à la résolution d'équations polynômiales qui peuvent être de degré assez élevé. Même plus, si chaque courbe de Bézier a un B-polygone convexe, les coûts des algorithmes, mais surtout les preuves des résultats que nous présenterons se trouvent grandement allégés. Or, Calcoen [Cal96] a prouvé qu'il existe des courbes de Bézier qui sont convexes, dont le B-polygone n'est pas convexe et qui sont telles que nous obtiendrons toujours par subdivisions successives de de Casteljau une “sous-courbe” dont le B-polygone n'est pas convexe, pourvu que le paramètre utilisé pour ces subdivisions satisfasse certaines propriétés, en fonction de la courbe. Comme nous utiliserons toujours, pour la facilité des calculs, un paramètre de subdivision égal à 1/2, les courbes convexes à B-polygone non-convexe ne peuvent pas être acceptées.

Définition I.15. – *Nous dirons qu'une courbe de Bézier est complètement convexe si son B-polygone est simple et convexe.*

Remarque Bien sur, cette propriété doit être satisfaite par tout autre type de courbe paramétrique contrôlée par des points que nous voudrons utiliser à la place des courbes de Bézier.

Propriété I.16. – *Une courbe de Bézier complètement convexe est une courbe convexe*

Preuve – Soit $\mathcal{B} = \mathrm{B}_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m\,;\,[0,1])$ une courbe de Bézier complètement convexe et supposons qu'elle n'est pas une courbe convexe. La définition I.13 impliquera alors que $reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ n'est pas convexe. Il existe donc $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_3 \in reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ et $\mathrm{Q}_2 \notin reg(\mathcal{B}, [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m])$ tels que $\mathrm{Q}_2 \in]\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3[$. Mais $\mathcal{B} \cup [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ est une courbe fermée, par conséquent la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ coupera $\mathcal{B} \cup [\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m]$ au moins trois fois. Si un de ces trois points d'intersection appartient à $]\mathrm{P}_0\mathrm{P}_m[$, nous obtenons une contradiction en remarquant que, suite à la propriété de la diminution de la variation, le cardinal de l'intersection de la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ avec le B-polygone est au moins deux et alors le polygone (fermé) $\mathrm{P}_0 \ldots \mathrm{P}_m$ aura trois points d'intersection avec cette droite, ce qui contredit le fait que la courbe $\mathcal{B}$ est complètement convexe. Si la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_3$ coupe $\mathcal{B}$ trois fois, la contradiction est immédiate, toujours en utilisant la propriété de la diminution de la variation. La supposition faite est donc fausse et $\mathcal{B}$ est une courbe convexe. □

Nous pouvons maintenant introduire l'objet qui sera étudié dans toute la suite de cette thèse.

Définition I.17. – *Une polycourbe de Bézier est une courbe simple qui est union de courbes de Bézier complètement convexes.*

Nous avons appelé notre objet polycourbe de Bézier, mais, pour l'instant, rien ne justifie cette appellation. Nous donnons donc le résultat suivant :

Lemme I.18. – *Toute polycourbe de Bézier est une polycourbe.*

Preuve – Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier, où

$$\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, [0,1]) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

sont des courbes de Bézier complètement convexes, et soit $\mathbf{b} : [0, \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sa paramétrisation par l'abscisse curviligne. Soient $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \alpha$ tels que $\mathbf{b}([t_{i-1}, t_i]) = \mathcal{B}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Les paramètres $t_0, \ldots, t_n$ existent et sont uniques.

Les courbes de Bézier étant des courbes polynômiales, donc régulières, il est évident que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc $\mathbf{b}$ satisfait la condition (I.5.i). Il nous reste ainsi à prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$ satisfait les conditions (I.5.ii) et (I.5.iii) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$ satisfait la condition (I.5.ii) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ revient (grâce aux propriétés des courbes de Bézier, qui font que le paramétrage par l'abscisse curviligne et le paramétrage de Bézier sont équivalents pour chaque courbe de Bézier) à prouver que $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \,;\, \cdot)$ satisfait (I.5.ii) sur l'intervalle $]0, 1[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Propriété I.19. – *Si* $\mathcal{B} = \mathrm{B}_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, [0,1])$ *est une courbe de Bézier complètement convexe telle que les points* $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ *ne soient pas tous colinéaires, alors* $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t) \neq 0$ *pour tout* $t \in]0, 1[$.

Preuve – Cette preuve sera faite par l'absurde : supposons qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t_0) = 0$. Nous appliquons à la courbe $\mathcal{B}$ la subdivision de de Casteljau de rapport t_0, en obtenant ainsi les polygones $\mathcal{P}^j = \mathrm{P}_0^j \mathrm{P}_1^j \ldots \mathrm{P}_{m-j}^j$ décrits dans la sous-section I.6.3 pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$. Le B-polygone $\mathcal{P} = \mathrm{P}_0 \mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_m$ de la courbe de Bézier étant simple et convexe, et compte tenu de la formule (I.3), tous les polygones $\mathcal{P}^j$ seront eux aussi simples et convexes (chaque polygone $\mathcal{P}^{j+1}$ s'obtient en "coupant les coins" du polygone $\mathcal{P}^j$).

En utilisant la deuxième formule de (I.2), nous déduisons que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m \,;\, t_0)$ est proportionnel à $\mathrm{P}_0^{m-2} - 2\mathrm{P}_0^{m-1} + \mathrm{P}_0^m$. Par conséquent, pour que cette dérivée soit nulle nous devons avoir $\mathrm{P}_0^{m-1} = (\mathrm{P}_0^{m-2} + \mathrm{P}_0^m)/2$, ce qui implique la colinéarité des trois points. Comme $\mathrm{P}_0^{m-1} = (1 - t_0)\mathrm{P}_0^{m-2} + t_0 \mathrm{P}_1^{m-2}$, les points $\mathrm{P}_0^{m-2}, \mathrm{P}_1^{m-2}, \mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_0^m$ doivent tous être colinéaires. D'un autre côté, $\mathrm{P}_0^m = (1 - t_0)\mathrm{P}_0^{m-1} + t_0 \mathrm{P}_1^{m-1}$, et en conséquence $\mathrm{P}_0^m, \mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_1^{m-1}$ et P_0^{m-2} sont colinéaires, ce qui nous mènera facilement à la colinéarité de $\mathrm{P}_0^{m-1}, \mathrm{P}_1^{m-1}$ et P_2^{m-2}. En conclusion, nous obtiendrons la colinéarité des points $\mathrm{P}_0^{m-2}, \mathrm{P}_1^{m-2}$ et P_2^{m-2}. Soit Δ^{m-2} la droite engendrée par ces points.

Si nous supposons que les points $\mathrm{P}_i^{m-3}, i \in \{0, \ldots, 3\}$, n'appartiennent pas à Δ^{m-2}, nous obtiendrons tout de suite une contradiction. En effet, dans ce cas le polygone $\mathcal{P}^{m-3}$

aurait trois points d'intersection avec la droite Δ^{m-2}, tout en étant simple et convexe, ce qui est impossible. Par conséquent, les points $\mathrm{P}_i^{m-3}, i \in \{0, \ldots, 3\}$ doivent eux aussi être colinéaires.

En continuant ce raisonnement, nous finirons par obtenir la colinéarité des points $\mathrm{P}_i, i \in \{0, \ldots, m\}$, contradiction avec l'hypothèse faite sur la courbe de Bézier $\mathcal{B}$. Ainsi, la supposition de l'existence d'un paramètre t_0 tel que $\mathrm{B}''_m(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m\,;\, t_0) = 0$ nous a menés à une contradiction, donc elle est fausse et la preuve de la propriété est achevée.

$\square$

En revenant à la preuve du lemme, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si les points $\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ sont colinéaires, alors $\mathcal{B}_i$ est un segment et, de par leur définition, il n'y a pas de points critiques sur la courbe $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}\,;\,]0, 1[)$. Si $\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ ne sont pas colinéaires, alors $\mathrm{B}''_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}\,;\, t) \neq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$ et donc il n'existe pas de point critique sur la courbe $\mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_i m\,;\,]0, 1[)$. Ainsi, dans tous les cas la courbe $\mathcal{B}_i$ satisfait la condition (I.5.ii), et ceci quelque soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pour prouver que $\mathbf{b}$ satisfait la condition (I.5.iii) nous allons prouver que $\mathbf{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$ est injective pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $\mathbf{b}\big|_{[t_{i-1}, t_i]}$ est en fait la paramétrisation par l'abscisse courviligne de la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$. Mais, conformément à la propriété I.16, $reg(\mathcal{B}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])$ est convexe et par conséquent, en appliquant la proposition I.7, nous obtiendrons l'injectivité de $\mathrm{b}\big|_{]t_{i-1}, t_i[}$, ce qui conclut la preuve de ce lemme. $\square$

I.10. Polygone de contrôle

La polycourbe de Bézier étant une polycourbe, elle est aussi un splinegone. Un polygone porteur est naturellement défini par la succession des extrémités des courbes de Bézier qui composent la polycourbe, et un polygone porteur simple peut être construit par la technique décrite dans la sous-section I.5.2. Mais à une polycourbe de Bézier nous pouvons associer un polygone autre que le polygone porteur, obtenant ainsi des propriétés géométriques très intéressantes pour les problèmes que nous voulons traiter dans cette thèse.

I.10.1. *Définition et propriétés du polygone de contrôle*

Définition I.20. – *L'union des B-polygones des courbes de Bézier composant une polycourbe de Bézier sera appelée le polygone de contrôle de la polycourbe de Bézier.*

Deux premières propriétés de ce polygone découlent directement des propriétés des courbes de Bézier. Ainsi, la propriété de la diminution de la variation est valable pour une polycourbe de Bézier, toute droite coupera le polygone de contrôle au moins autant de fois qu'elle coupe la polycourbe. La preuve de cette propriété est immédiate. La deuxième des deux propriétés est l'inclusion de la polycourbe dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle, qui est aussi facile à prouver et qui est la pierre de faîte de l'étude faite dans les chapitres II et III.

Une autre propriété, qui jouera un rôle important dans le chapitre V, est "l'encadrement" que le polygone porteur et le polygone de contrôle font à la polycourbe. Nous voulons dire par là que, en prenant une polycourbe de Bézier $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$, où $\mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\,;\,[0,1])$ est une courbe de Bézier complètement convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et en notant $\mathcal{P}_i$ le B-polygone de la courbe de Bézier $\mathcal{B}_i$, nous aurons

$$\mathcal{B} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{reg(\mathcal{P}_i, [\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}])}$$

Cette propriété aussi est très facile à prouver.

REMARQUE La définition I.17 s'avérera, au fil de la discussion, un peu ambiguë. En effet, le traitement que nous appliquerons aux polycourbes de Bézier dans la résolution des problèmes que nous nous poserons consiste à subdiviser une partie ou toutes les courbes de Bézier composant la polycourbe jusqu'à l'obtention d'un polygone de contrôle pour cette polycourbe qui satisfait certaines propriétés, en fonction du problème. Soit la polycourbe

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \qquad \mathcal{B}_i = \mathrm{B}_{m_i}(\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}, \ldots \mathrm{P}_{m_i}^{(i)},\,;\,[0,1])\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Si nous subdivisons la courbe de Bézier $\mathcal{B}_{i_0}$, en obtenant les courbes $\mathcal{B}'_{i_0}$ et $\mathcal{B}''_{i_0}$, alors conformément à I.17 la courbe

$$\left(\bigcup_{i=1}^{i_0-1} \mathcal{B}_i\right) \cup \mathcal{B}'_{i_0} \cup \mathcal{B}''_{i_0} \cup \left(\bigcup_{i=i_0+1}^{n} \mathcal{B}_i\right)$$

est une polycourbe, mais elle n'est pas $\mathcal{B}$. Or, il est évident que nous ne voulons pas avoir une nouvelle polycourbe après chaque subdivision que nous appliquons.

Sur l'ensemble des polycourbes de Bézier (données par I.17), nous définissons la relation "obtenue par subdivision/fusion de de Casteljau". Il est très facile à voir que cette relation est une relation d'équivalence, et en redéfinissant la polycourbe de Bézier comme étant une classe d'équivalence de cette relation nous aurons une caractérisation formelle de la polycourbe. Cette nouvelle définition étant un peu lourde, nous la considérons implicite. Ainsi, nous aurons une distinction entre la polycourbe initiale (à laquelle aucune subdivision de de Casteljau n'a été appliquée) et la polycourbe courante à un certain moment de la discussion, qui est un membre de la classe d'équivalence de la polycourbe initiale, pouvant être la polycourbe initiale elle-même. Pour ne pas alourdir la présentation, une polycourbe $\mathcal{B}$ sera toujours écrite comme $\cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$, aussi bien dans sa forme initiale que dans toutes ses formes courantes, tout en gardant à l'esprit que n varie.

I.10.2. *Polygone de contrôle pseudo-simple*

De même que pour le polygone porteur, nous nous intéressons à l'existence d'un polygone de contrôle simple, qui sera essentielle dans la discussion sur l'enveloppe convexe d'une polycourbe de Bézier fermée. En effet, nous pouvons voir dans la figure I.11 un exemple de polycourbe de Bézier fermée dont le polygone de contrôle n'est pas simple et il est facile de remarquer que l'enveloppe convexe de ce polygone de contrôle a une composition qui n'est pas très cohérente du point de vue de l'ordre des sommets du polygone de contrôle en tant que sommets du polygone frontière de l'enveloppe convexe (nous n'entrons pas dans les détails ici, tout sera pleinement expliqué dans le chapitre suivant).

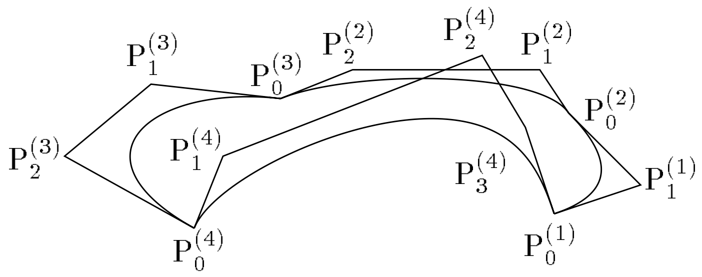

Figure I.11

En plus, nous voudrons pouvoir obtenir un polygone de contrôle simple pour une polycourbe de Bézier uniquement par l'intermédiaire des subdivisions de de Casteljau (de rapport 1/2, mais il sera toujours ainsi et nous ne le mentionnerons plus) successives, sans avoir à calculer des intersections de droites et de courbes de Bézier, car les subdivisons sont algorithmiquement calculables de manière exacte si (supposition naturelle) les points de contrôle des courbes de Bézier à subdiviser sont rationnels.

Malheureusement, à la différence du cas du polygone porteur, il existe des polycourbes pour lesquelles l'obtention d'un polygone de contrôle simple est impossible. Cette situation arrive toujours quand il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $P_1^{(i+1)} \in]P_{m_i}^{(i)} P_{m_i-1}^{(i)}$, car alors le cardinal de l'intersection de $[P_{m_i-1}^{(i)} P_{m_i}^{(i)}]$ et de $[P_0^{(i+1)} P_1^{(i+1)}]$ est infini et cette propriété reste indifféremment du nombre de subdivisions que nous appliquons à $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$. Dans la figure I.12 sont représentés les deux principaux cas possibles pour les positions relatives des courbes $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$ quand la propriété ci-dessus est satisfaite.

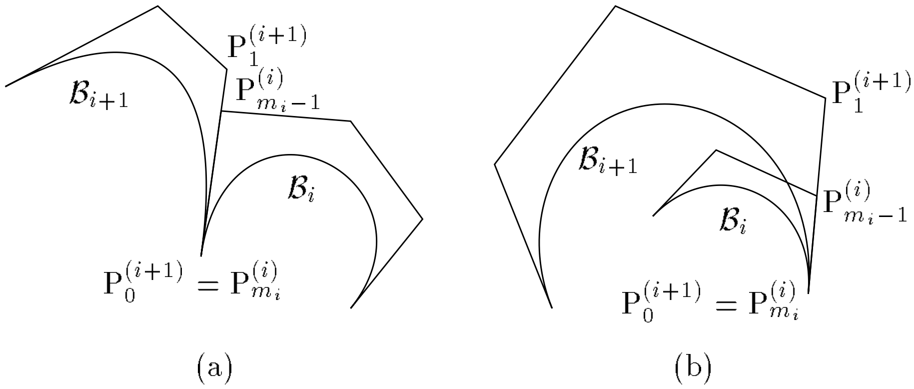

Figure I.12

Par conséquent, nous cherchons une propriété plus faible que la simplicité et telle que, d'un côté, nous puissions obtenir par subdivision de de Casteljau un polygone de contrôle la satisfaisant pour toute polycourbe, et de l'autre côté, un polygone de contrôle la satisfaisant garde les propriétés des polygones simples dont nous aurons besoin (dans le deuxième chapitre nous préciserons).

Définition I.21. – *Soit $\mathcal{R} = \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 \ldots \mathrm{R}_n$ un polygone. Nous dirons que $\mathcal{R}$ est pseudo-simple si et seulement si pour tous $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$[\mathrm{R}_i\mathrm{R}_{i+1}] \cap [\mathrm{R}_j\mathrm{R}_{j+1}] \neq \emptyset \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{les points } \mathrm{R}_{i+1}, \mathrm{R}_{i+2}, \ldots, \mathrm{R}_j \textit{ sont colinéaires} \\ \textit{ou} \\ \textit{les points } \mathrm{R}_{j+1}, \mathrm{R}_{j+2}, \ldots, \mathrm{R}_i \textit{ sont colinéaires} \end{array}$$

Bien sur, dans cette définition le polygone $\mathcal{R}$ est considéré fermé et les indices sont pris circulairement. Si le polygone n'est pas fermé, une seule des deux chaînes de points sera colinéaire, celle qui contient des indices croissants.

Comme nous avons déjà mentionné, certaines des courbes de Bézier constituant la polycourbe subiront des subdivisions. Par conséquent, nous nous voyons amenés à nous questionner sur l'invariance des propriétés du polygones de contrôle aux subdivisions de de Casteljau non-uniformes des courbes constituant la polycourbe. Plus précisément, l'interrogation est : si le polygone de contrôle de la polycourbe satisfait la condition **A** et si nous obtenons un nouveau polygone de contrôle en subdivisant certaines des, éventuellement toutes les, courbes qui composent la polycourbe, le nouveau polygone satisfait-il la condition **A** ?

La réponse, si la condition **A** est la pseudo-simplicité, est non. Si, dans l'exemple de la figure I.12(b), nous subdivisons la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$ une fois et après sa moitié de droite encore une fois, la ligne polygonale obtenue ne sera plus pseudo-simple (figure I.13), celle initiale l'étant.

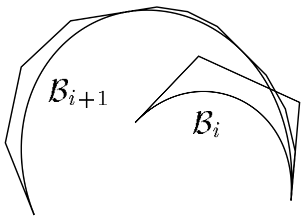

Figure I.13

Cette perte de pseudo-simplicité peut apparaître à chaque fois que la situation décrite par la définition suivante survient :

Définition I.22. – *Soit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n}\mathcal{B}_i$ une polycourbe de Bézier, où $\mathcal{B}_i$ sont des courbes de Bézier complètement convexes de B-polygone $\mathcal{P}_i = \mathrm{P}_0^{(i)} \ldots \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nous dirons que $\mathcal{B}$ a une tangence intérieure ssi il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que*

$$\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \in]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{B}_i \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_1^{(i+1)}, \mathcal{B}_{i+1}\big)$$

La figure I.12(b) présente un cas de tangence intérieure.

Définition I.23. – *Nous dirons qu'une polycourbe est sans tangence intérieure (sti) si elle n'a pas de tangence intérieure.*

Nous avons maintenant toutes les définition nécessaires pour donner le théorème d'existence du polygone de contrôle pseudo-simple.

Théorème I.24. – *Soit $\mathcal{B}$ une polycourbe de Bézier sans tangence intérieure et soit $\mathcal{P}$ son polygone de contrôle. Alors il existe $\gamma_0 > 0$ tel que si la polycourbe $\mathcal{B}$ s'écrit $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ avec $\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0$, alors le polygone de contrôle correspondant à cette écriture, $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i$, est pseudo-simple.*

La démonstration de ce théorème, très technique, peut être trouvée dans l'annexe du chapitre.

Annexe

Preuve de la proposition I.7 – Nous prouvons d'abord l'implication directe et ensuite la réciproque.

Pour prouver (I.7.ii), nous utilisons un lemme qui est valable dans un contexte beaucoup plus général :

Lemme I.25. – *Soit E un espace de Banach et soit $\mathcal{A} \subset E$ un convexe ouvert non-vide. Alors pour tout $\mathrm{P} \in \delta(\mathcal{A})$ il existe un hyperplan $H \subset E$ tel que $\mathrm{P} \in H$ et $\mathcal{A} \cap H = \emptyset$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate d'un théorème de Hahn-Banach :

Théorème I.26. – *Soit E un espace de Banach et soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset E$ deux convexes ouverts non-vides disjoints. Alors il existe $H \subset E$ un hyperplan qui sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement inclus dans des demi-espaces opposés par rapport à H).*

Nous appliquons le lemme I.25 pour $E = I\!R^2$, $\mathcal{A} = reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$, en choisissant $\mathrm{P} \in]\mathrm{AB}[$. Il existe donc une droite Δ telle que $\mathrm{P} \in \Delta$ et $\Delta \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$. Évidemment, Δ doit être égale à AB et nous aurons les implications

$$\begin{aligned}
&\forall \mathrm{Q} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \quad reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) \quad \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q})} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \setminus [\mathrm{AB}] \quad \mathcal{C} \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q})} \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \setminus [\mathrm{AB}] \quad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}) \Rightarrow \\
\Rightarrow &\forall \mathrm{Q} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \quad \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{Q}).
\end{aligned}$$

Pour prouver (I.7.i), remarquons d'abord que pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ la droite donnée par le lemme I.25 est unique et est la droite tangente à $\mathcal{C}$ en P. En effet, si nous supposons qu'il existe $\mathrm{P}_0 = \mathbf{c}(t_0) \in \mathcal{C}$, avec $t_0 \in]a, b[$, tel qu'il existe une droite $\Delta \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_0), \mathbf{c}(t_0))$ passant par P et telle que $\Delta \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$, alors le point t_0 sera un point de discontinuité pour $\mathbf{c}'$, d'où la contradiction.

Supposons maintenant qu'il existe $t_1 \neq t_2 \in]a, b[$ tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$. Alors nous aurons soit $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, soit $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$ et $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \| \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$. Si $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, alors, comme $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ est convexe et donc $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ est convexe et $\mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_2) \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$, nous obtenons $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$. Mais d'un côté

$$\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) = \mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2) \cap reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \emptyset$$

et donc $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \delta(reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[))$, et d'un autre côté $t_1, t_2 \notin \{a, b\}$, donc on ne peut pas avoir $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset]\mathrm{AB}[$. Ainsi, $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \mathcal{C}$, ce qui contredit une des conditions de l'hypothèse (la condition $\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t)) \neq 0 \ \forall t \in]a, b[$). Il reste donc à traiter le cas

$$\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \neq \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)) \quad \text{et} \quad \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)) \| \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$$

Soient

$$\mathcal{R}_1 = \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)),$$

$$\mathcal{R}_3 = \mathrm{DP}_{\mathrm{op}}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$$

et

$$\mathcal{R}_2 = \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)) \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)),$$

comme présenté dans la figure I.14.

Nous savons que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ est incluse dans un seul des deux demi-plans ouverts déterminés par $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$, donc $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ sera incluse dans un seul des deux demi-plans fermés déterminés par $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$. Comme $\mathbf{c}(t_2) \in \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ se trouve dans le demi-plan $\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))$, nous en déduisons que

$$\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2))}.$$

De même, nous aurons

$$\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_2), \mathbf{c}(t_2)), \Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))}$$

et il en résulte que $\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \subset \overline{\mathcal{R}}_2$ et donc que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{R}}_2$.

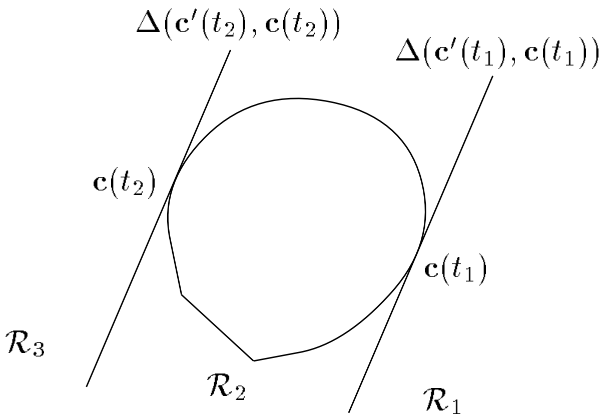

Figure I.14

Le segment $[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)]$ partage $\mathcal{R}_2$ en deux sous-régions. Soit $\mathcal{R}_2^+$ celle de ces deux sous-régions donnée par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_1)$ (ou de $\mathbf{c}'(t_2)$, car ils sont égaux) et $\mathcal{R}_2^-$ l'autre, toutes les deux considérées ouvertes. Dans un voisinage de $\mathbf{c}(t_1)$ nous aurons donc la situation présentée dans la figure I.15.

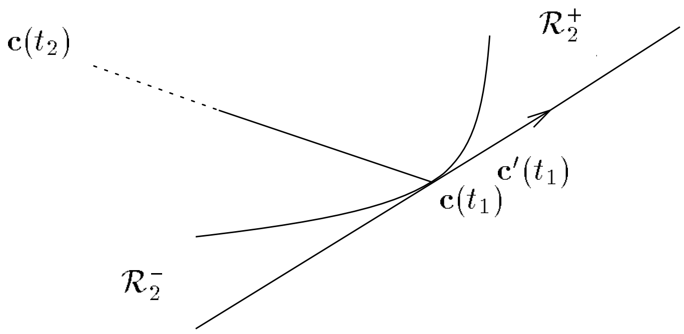

Figure I.15

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_1', t_1'' \in]a, b[$ tels que $t_1' < t_1 < t_1''$, $\mathbf{c}(t_1') \in \mathcal{R}_2^-$, $\mathbf{c}(t_1'') \in \mathcal{R}_2^+$ et $t_1'' - t_1' < \varepsilon$. De même, nous aurons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_2', t_2'' \in]a, b[$ tels que $t_2' < t_2 < t_2''$, $\mathbf{c}(t_2') \in \mathcal{R}_2^-$, $\mathbf{c}(t_2'') \in \mathcal{R}_2^+$ et $t_2'' - t_2' < \varepsilon$.

Nous pouvons choisir ε tel que $t_1'' < t_2'$, si $t_2 < t_1$, ou $t_2'' < t_1'$, si $t_1 < t_2$. Nous allons supposer $t_2 < t_1$. La courbe est continue, il résulte donc qu'il existe $t_3 \in]t_1'', t_2'[$ tel que $\mathbf{c}(t_3) \in]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[$. Pour obtenir une contradiction, nous utilisons le résultat suivant :

Lemme I.27. – *Soit $\mathcal{A}$ un convexe. Alors*

$$[\mathrm{PQ}] \subset \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow]\mathrm{PQ}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A}) \text{ ou }]\mathrm{PQ}[\subset \delta(\mathcal{A}).$$

La preuve de ce lemme se trouve à la fin de la preuve de la proposition I.7.

En utilisant le lemme, nous obtiendrons ainsi

$$[\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)] \subset \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{c}(t_3) \in]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[\\ \mathbf{c}(t_3) \in \mathcal{C} \subset \delta(\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}) \end{array}$$

donc $]\mathbf{c}(t_1)\mathbf{c}(t_2)[\subset \delta(\overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)})$, ce qui donne encore une fois une contradiction avec la condition $\mathbf{c}''(t) \neq 0 \ \forall t \in]a, b[$. Donc il ne peut pas exister deux points distincts sur la courbe ayant le même vecteur tangent, par conséquent $\mathbf{c}'\big|_{]a,b[}$ est injective et l'implication directe est ainsi démontrée.

Pour prouver la réciproque, nous devons d'abord démontrer que la région $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ existe. Pour ça, il faut et il suffit que la courbe fermée formée par l'union de $\mathcal{C}$ et de $[\mathrm{AB}]$ soit simple. Comme $\mathcal{C}$ est simple, il reste à prouver que $\mathcal{C} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$. Mais nous savons $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \subset \mathrm{DP}(\mathrm{AB}, \mathrm{P}), \forall \mathrm{P} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$, donc $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \cap \mathrm{AB} = \emptyset$, ce qui implique $\mathcal{C} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$ et en conclusion $\mathcal{C} \cap]\mathrm{AB}[= \emptyset$.

Supposons maintenant que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ n'est pas convexe. Alors il existe trois points $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P}$ tels que $\mathrm{M}, \mathrm{P} \in reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$, $\mathrm{N} \notin \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$ et $\mathrm{N} \in]\mathrm{MP}[$. De la continuité de la courbe fermée $\mathcal{C} \cup]\mathrm{AB}[$ il résulte que la droite MP coupe $\delta(reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[) = \mathcal{C} \cup]\mathrm{AB}[$ en au moins quatre points distincts. Or au plus un de ces points peut appartenir à $]\mathrm{AB}[$, donc la droite MP coupe la courbe $\mathcal{C}$ en au moins trois points distincts. Soient $\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T} \in \mathrm{MP}$ trois points successifs (sur la droite MP), intersections de $\mathcal{C}$ avec MP et supposons que $]\mathrm{RS}[\subset reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ et $]\mathrm{ST}[\subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)}$. Soient $t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T} \in]a, b[$ tels que $\mathbf{c}(t_\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ pour tout $\mathrm{X} \in \{\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}\}$. En plus, nous choisissons R, S et T tels que $t_\mathrm{R} < t_\mathrm{S} < t_\mathrm{T}$, donc tels qu'ils soient ordonnés aussi sur la courbe, et dans le même ordre. Nous prouverons qu'il existe $t_1 \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[$ et $t_2 \in]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T}[$ tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$.

Soit DP_1 le demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{R})$, qui est égal au demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{T})$, et DP_2 le demi-plan ouvert déterminé par RS et par l'orientation de $\mathbf{c}'(t_\mathrm{S})$, donc $\mathrm{DP}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathrm{DP}_1}$. Soit $t_1 \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[$ tel que $\mathbf{c}(t_1) \in \mathrm{DP}_1$ et

$$\mathrm{d}(\mathbf{c}(t_1), \mathrm{RS}) = \sup_{\substack{t \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[\\ \mathbf{c}(t) \in \mathrm{DP}_1}} \mathrm{d}(\mathbf{c}(t), \mathrm{RS}).$$

Évidemment, un tel t_1 existe et il peut être unique ou pas. Compte tenu de la façon dont nous l'avons choisi, $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$, la droite tangente à $\mathcal{C}$ en $\mathbf{c}(t_1)$, est parallèle à RS. Si nous posons

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{RS}}}{\mathrm{d}(\mathrm{R}, \mathrm{S})},$$

alors nous aurons $\mathbf{c}'(t_1) = \pm\vec{u}$. Nous voulons prouver que $\mathbf{c}'(t_1) = \vec{u}$.

Supposons que $\mathbf{c}'(t_1) = -\vec{u}$. Soit Δ_n la normale à RS passant par $\mathbf{c}(t_1)$ et soit DP_+ le demi-plan ouvert déterminé par Δ_n et l'orientation du vecteur $\vec{u}$ et DP_- le demi-plan ouvert déterminé par Δ_n et l'orientation du vecteur $-\vec{u}$. Nous introduisons les notations :

$$\mathcal{R}_+ = \mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R}) \cap \mathrm{DP}_+$$

$$\mathcal{R}_- = \mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R}) \cap \mathrm{DP}_-.$$

Il vient donc $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) \subset \overline{\mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R})}$ et aussi

$\forall \varepsilon > 0\ \exists t_1', t_1'' \in]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[$ tels que $t_1' < t_1 < t_1''$, $\mathbf{c}(t_1') \in \mathcal{R}_+$, $\mathbf{c}(t_1'') \in \mathcal{R}_-$ *et* $t_1'' - t_1' < \varepsilon$.

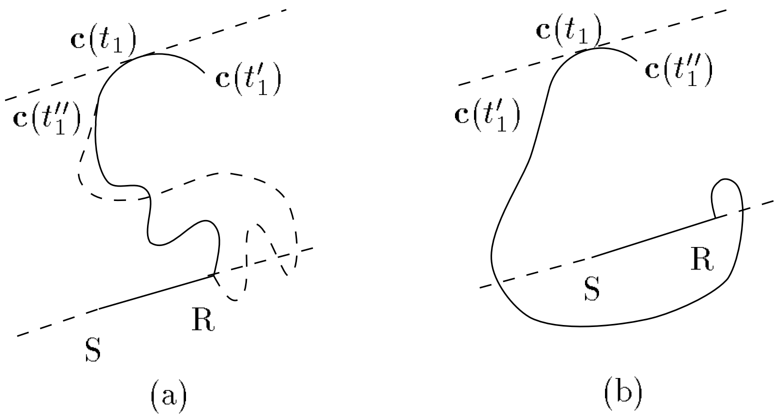

Figure I.16

Dans le cas présenté figure I.16(a), la courbe tracée en continu et celle tracée en pointillés sont homotopes par rapport aux conditions imposées à la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$, c'est-à-dire l'interdiction de couper le segment [RS] ou la droite $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$ et le respect des positions relatives des points $\mathbf{c}(t_1'), \mathbf{c}(t_1), \mathbf{c}(t_1'')$. Nous remarquons aussi que pour ces mêmes conditions les courbes de la figure I.16(a) ne sont pas homotopes avec la courbe de la figure I.16(b) et en plus toute courbe qui respecte les conditions énumérées ci-dessus est homotope soit avec les courbes de la figure I.16(a), soit avec la courbe de la figure I.16(b).

Étudions maintenant la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ dans les deux cas présentés pour $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$. Dans le cas (a), la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_1[)$ (ou un morceau de cette courbe) divise la région $\mathrm{DP}_1 \cap \mathrm{DP}(\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1)), \mathrm{R})$ en deux parties disjointes, séparant ainsi $\mathbf{c}(t_1'')$ et S. Comme $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ et $\Delta(\mathbf{c}'(t_1), \mathbf{c}(t_1))$ doivent être disjointes et la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[)$ doit être simple, la seule "trajectoire" que la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ peut emprunter est celle présentée dans la figure I.17 ou une qui lui est homotope tout en respectant, en plus des deux conditions déjà écrites ci-dessus, les conditions

– il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{c}(]t_\mathrm{S} - \varepsilon, t_\mathrm{S}[) \subset \mathrm{DP}_1$

– $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[) \cap [\mathrm{RS}] = \emptyset$.

Alors la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) \cup [\mathrm{RS}]$ sera une courbe simple fermée et il existera $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(\mathrm{S}, \delta) \cap \mathrm{DP}_2 \subset reg(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$. Mais il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbf{c}(]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{S} + \varepsilon[) \subset \mathrm{DP}_2$ et si nous choisissons $\gamma = \min(\varepsilon,\ \delta)$ nous aurons

$$\mathbf{c}(]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{S} + \gamma[) \subset reg(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}]).$$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ a des points à l'intérieur de $reg(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$, ainsi

$$\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}]) \subset reg(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}]),$$

car $\big(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}])\big) \cap \mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[) = \emptyset$ et $\big(\mathcal{C} \setminus \mathbf{c}([t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}])\big) \cap [\mathrm{RS}] = \emptyset$.

Nous avons ainsi obtenu une contradiction avec la condition (I.7.ii), car nous ne pourrons pas trouver deux points A et B appartenant à $reg(\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[), [\mathrm{RS}])$ tels que la courbe $\mathbf{c}(]t_\mathrm{R}, t_\mathrm{S}[)$ soit incluse dans un seul des deux demi-plans déterminés par la droite AB.

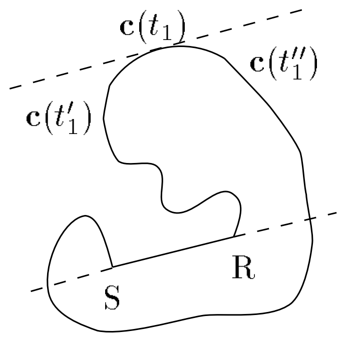

Figure I.17

Dans le cas I.16(b), la courbe $\mathbf{c}(]t_1, t_\mathrm{S}[)$ est celle présentée figure I.18, ou une qui lui est homotope modulo les conditions déjà vues. Nous arrivons ainsi à une situation similaire à celle du premier cas et nous obtenons donc la même contradiction.

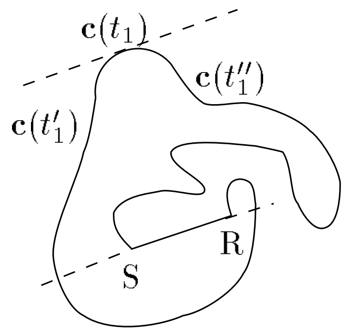

Figure I.18

Donc la supposition $\mathbf{c}'(t_1) = -\vec{u}$ aboutit dans tous les cas à une contradiction et par conséquent nous avons $\mathbf{c}'(t_1) = \vec{u}$. De la même façon nous prouvons qu'il existe $t_2 \in]t_\mathrm{S}, t_\mathrm{T}[$ tel que $\mathbf{c}'(t_2) = \vec{u}$. Nous avons ainsi trouvé $t_1, t_2 \in]a, b[$, $t_1 \neq t_2$, tels que $\mathbf{c}'(t_1) = \mathbf{c}'(t_2)$, d'où une contradiction avec la condition (I.7.i). Donc la supposition que $reg(\mathcal{C},]\mathrm{AB}[)$ n'est pas convexe est fausse et ainsi la démonstration de la proposition est achevée. $\square$

Preuve du lemme I.27 – Supposons que la conclusion est fausse, donc que $]\mathrm{PQ}[\not\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $]\mathrm{PQ}[\not\subset \delta(\mathcal{A})$. Mais $]\mathrm{PQ}[\subset \overline{\mathcal{A}}$, par conséquent tout point de $]\mathrm{PQ}[$ sera soit dans $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, soit dans $\delta(\mathcal{A})$. Il ne peut pas exister $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{O} \in]\mathrm{PQ}[$ tels que $\mathrm{M} \in]\mathrm{NO}[$ et $\mathrm{M} \in \delta(\mathcal{A})$, $\mathrm{N}, \mathrm{O} \in \mathrm{Int}(\mathcal{A})$, car $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ est aussi convexe. Il y aura donc deux points distincts $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in]\mathrm{PQ}[$ tels que $]\mathrm{PM}] \subset \delta(\mathcal{A})$, $]\mathrm{MN}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $[\mathrm{NQ}[\subset \delta(\mathcal{A})$, où nous pouvons avoir $\mathrm{M} = \mathrm{P}$ ou $\mathrm{N} = \mathrm{Q}$, mais pas les deux, car alors $]\mathrm{PQ}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$. Supposons que $\mathrm{M} \neq \mathrm{P}$ et soit $\mathrm{R} \in]\mathrm{PM}[$. $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$

étant convexe et R appartenant à $\delta(\mathcal{A})$, il résulte, conformément au lemme I.25, qu'il existe une droite Δ passant par R et telle que $\Delta \cap \mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \emptyset$. Il est évident que les droites Δ et PM doivent être confondues et nous obtenons ainsi une contradiction, car $]\mathrm{MN}[\subset \Delta$, $]\mathrm{MN}[\subset \mathrm{Int}(\mathcal{A})$ et $]\mathrm{MN}[\neq \emptyset$. □

Preuve du théorème I.24 – En utilisant les notations habituelles pour la polycourbe de Bézier, nous donnons d'abord la démonstration du théorème pour le cas où la polycourbe initiale est composée de $n_0 \geq 4$ courbes de Bézier et nous traiterons séparément les cas $n_0 = 2$, $n_0 = 3$.

Pour $i \in \{1, \ldots, n_0\}$, soit

$$\gamma_i' = \min_{j \in \{1, \ldots, i-2, i+2, \ldots, n_0\}} \mathrm{d}\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j\big)$$

et soit $\gamma_0' = \dfrac{1}{2} \min\limits_{i \in \{1, \ldots, n_0\}} \{\gamma_i'\}$. Évidemment, $\gamma_0' > 0$, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple.

Soit l'ensemble

$$\mathrm{I} = \Big\{ i \in \{1, \ldots, n_0\} \;\Big|\; reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_{i+1},]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}[\big) \neq \emptyset \Big\}$$

Si $\mathrm{I} \neq \emptyset$, on peut écrire $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$, où

$$\mathrm{I}_1 = \Big\{ i \in \mathrm{I} \;\Big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big) \neq \emptyset \Big\}$$
$$\mathrm{I}_2 = \Big\{ i \in \mathrm{I} \;\Big|\; \mathcal{B}_i \cap reg\big(\mathcal{B}_{i+1},]\mathrm{P}_0^{(i+1)}\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)}[\big) \neq \emptyset \Big\}$$

En plus, $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 = \emptyset$, car $reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n_0\}$ et $\mathcal{B}$ est simple.

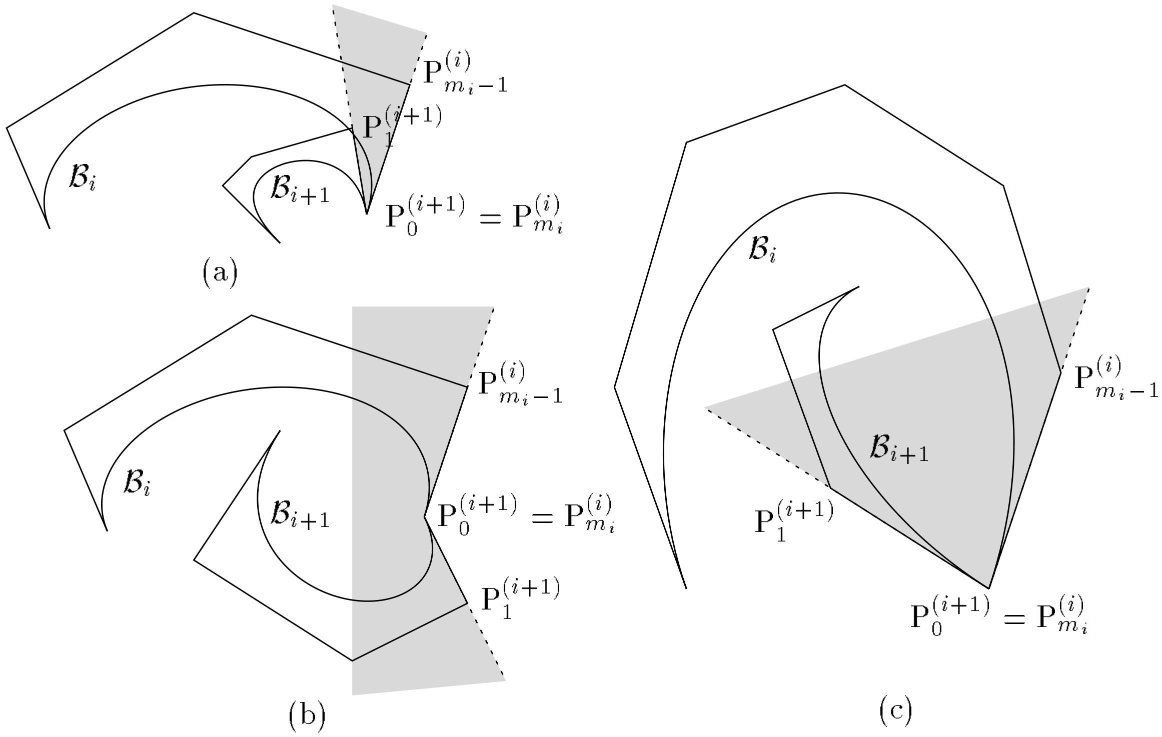

Figure I.19 (a) *i est dans* I_1' ; (b), (c) *i est dans* I_1''

Au moins un des ensembles I_1 et I_2 est non-vide. Si $\mathrm{I}_1 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_1$. Des deux angles $\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1$ on considère celui pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{B}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0, \varepsilon\big) \cap \Big\{\mathcal{B}_i \setminus \big\{\mathrm{P}^{(i+1)}_0\big\}\Big\} \subset \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1\big)$$

Nous définissons alors

$$\mathrm{I}'_1 = \big\{i \in \mathrm{I}_1 \;\big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 = \emptyset\big\}$$
$$\mathrm{I}''_1 = \mathrm{I}_1 \setminus \mathrm{I}'_1 = \big\{i \in \mathrm{I}_1 \;\big|\; \mathcal{B}_{i+1} \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \neq \emptyset\big\}$$

La figure I.19 présente des exemples pour les deux cas.
Si $\mathrm{I}'_1 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}'_1$. Nous ne pouvons pas avoir

$$reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\big[\big) \subset \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1\big)$$

car $i \in \mathrm{I}'_1 \subset \mathrm{I}_1$, donc la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$, qui par la définition de I'_1 est disjointe de l'intérieur de l'angle $\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1$, doit couper $reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\big[\big)$. Par conséquent,

$$\big]\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \cap reg\big(\mathcal{B}_i, \big]\mathrm{P}^{(i)}_0\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\big[\big) \neq \emptyset$$

et donc $\big]\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$. D'un autre côté, $\mathrm{card}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \cap \mathcal{B}_i\big) \leq 2$, car $\mathcal{B}_i$ est une courbe de Bézier convexe. En conclusion, $\mathrm{card}\big(\big]\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \cap \mathcal{B}_i\big) = 1$.

Soit $\{\mathrm{M}_i\} = \big]\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \cap \mathcal{B}_i$. Notons $\widetilde{\mathcal{B}_i}$ le morceau de $\mathcal{B}_i$ compris entre $\mathrm{P}^{(i)}_0$ et M_i et nous définissons

$$\gamma''_i = \frac{1}{2}\mathrm{d}\big(\widetilde{\mathcal{B}_i}, \mathcal{B}_{i+1}\big)$$

Posons $\gamma''_0 = \min\limits_{i \in \mathrm{I}'_1}\{\gamma''_i\}$.

De manière analogue nous définissons ci-dessous γ'''_0.

Si $\mathrm{I}_2 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_2$. Des deux angles $\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1$ nous considérons celui pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathrm{B}\big(\mathrm{P}^{(i+1)}_0, \varepsilon\big) \cap \Big(\mathcal{B}_{i+1} \setminus \big\{\mathrm{P}^{(i+1)}_0\big\}\Big) \subset \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1\big)$$

Nous définissons alors

$$\mathrm{I}'_2 = \big\{i \in \mathrm{I}_2 \;\big|\; \mathcal{B}_i \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 = \emptyset\big\}$$
$$\mathrm{I}''_2 = \mathrm{I}_2 \setminus \mathrm{I}'_2 = \big\{i \in \mathrm{I}_2 \;\big|\; \mathcal{B}_i \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1}\mathrm{P}^{(i+1)}_0\mathrm{P}^{(i+1)}_1 \neq \emptyset\big\}$$

Les exemples de la figure I.19 peuvent facilement devenir des exemples pour ces deux cas en changeant $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_{i+1}$ entre elles.

Si $\mathrm{I}'_2 \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}'_2$. Avec un raisonnement similaire au celui fait pour $i \in \mathrm{I}'_1$, nous aurons

$$\mathrm{card}\big(\big]\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1} \cap \mathcal{B}_i\big) = 1$$

et soit $\{\mathrm{N}_i\} = \big]\mathrm{P}^{(i)}_{m_i}\mathrm{P}^{(i)}_{m_i-1} \cap \mathcal{B}_{i+1}$. Notons $\overline{\mathcal{B}_{i+1}}$ le morceau de la courbe $\mathcal{B}_{i+1}$ compris entre N_i et $\mathrm{P}^{(i+1)}_{m_{i+1}}$ et soit

$$\gamma'''_i = \frac{1}{2}\mathrm{d}\big(\overline{\mathcal{B}_{i+1}}, \mathcal{B}_i\big)$$

Nous posons alors $\gamma'''_0 = \min\limits_{i \in \mathrm{I}'_2}\{\gamma'''_i\}$.

Nous pouvons maintenant définir γ_0 de l'énoncé du théorème :

$$\gamma_0 = \begin{cases} \gamma_0' & \text{si } \mathrm{I}_1' \cup \mathrm{I}_2' = \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2' = \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0'''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' = \emptyset, \mathrm{I}_2' \neq \emptyset \\ \min\{\gamma_0', \gamma_0'', \gamma_0'''\} & \text{si } \mathrm{I}_1' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2' \neq \emptyset \end{cases}$$

Nous voulons prouver que $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0$ entraîne que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Supposons que $\max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}, \mathcal{P}) < \gamma_0$ et que $\mathcal{P}$ n'est pas pseudo-simple. Alors il existe $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, et $k_i \in \{0, \ldots, m_i - 1\}$, $k_j \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$ tels que

$$\left[\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}\mathrm{P}^{(i)}_{k_i+1}\right] \cap \left[\mathrm{P}^{(j)}_{k_j}\mathrm{P}^{(j)}_{k_j+1}\right] \neq \emptyset$$

En plus, i, j, k_i et k_j doivent satisfaire certaines conditions, que nous verrons par la suite, sans lesquelles $\mathcal{P}$ serait pseudo-simple. Nous avons plusieurs cas.

Cas 1. $j \notin \{i-1, i+1\}$

Dans ce cas, $\left[\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}\mathrm{P}^{(i)}_{k_i+1}\right] \cap \left[\mathrm{P}^{(j)}_{k_j}\mathrm{P}^{(j)}_{k_j+1}\right] \neq \emptyset$ entraînera tout de suite la non-pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$, nous n'avons pas à imposer des conditions supplémentaires aux indices k_i et k_j.

Soit $\mathrm{M} \in \left[\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}\mathrm{P}^{(i)}_{k_i+1}\right] \cap \left[\mathrm{P}^{(j)}_{k_j}\mathrm{P}^{(j)}_{k_j+1}\right]$. Notons $pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}$ la projection de M sur la courbe $\mathcal{B}_i$ et $pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}$ la projection de M sur la courbe $\mathcal{B}_j$ (figure I.20). Nous aurons

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}) = \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) = \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_j)$$

.

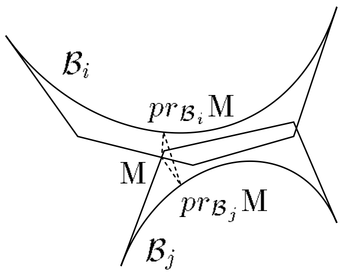

Figure I.20

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) &\leq \mathrm{d}(pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_i}\mathrm{M}) + \mathrm{d}(\mathrm{M}, pr_{\mathcal{B}_j}\mathrm{M}) \\ &\leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) + \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j) < 2\gamma_0 \leq 2\gamma_0' \end{aligned},$$

ce qui contredit la définition de γ_0'.

Cas 2. $j = i + 1$

Dans ce cas, nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour que

$$\left[\mathrm{P}^{(i)}_{k_i}\mathrm{P}^{(i)}_{k_i+1}\right] \cap \left[\mathrm{P}^{(j)}_{k_j}\mathrm{P}^{(j)}_{k_j+1}\right] \neq \emptyset$$

implique la non-simplicité du polygone $\mathcal{P}$, car si par exemple $k_i = m_i - 1$ et $k_j = 0$ alors le $\mathcal{P}$ peut être pseudo-simple et même simple même si le deux segments se coupent. Nous devons évidemment commencer par demander $(k_i, k_j) \neq (m_i - 1, 0)$, mais cela ne suffit pas, comme nous pouvons le voir pour le cas de la figure I.12(b), ou $k_i = m_i - 1$, $k_j = 1$ et la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)} \dots \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \mathrm{P}_0^{(j)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ est pseudo-simple, donc encore une condition est nécessaire. Cette condition sera

$$reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[) \neq \emptyset \tag{I.6}$$

et nous prouvons que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}$ soit non-pseudo-simple si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$.

En effet, si $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$ sont disjointes, alors il existe une droite Δ passant par $\mathrm{P}_0^{(j)}$ qui les sépare strictement, car les deux sont convexes. Si $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$ sont incluses dans des demi-plans ouverts opposés par rapport à Δ, alors évidemment $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}_j$ seront incluses dans des demi-plans fermés opposés par rapport à Δ et par suite des propriétés des courbes de Bézier il en sera de même pour leurs polygones de contrôle respectifs. Mais comme $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ sont simples et convexes, la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)} \dots \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)} \mathrm{P}_0^{(j)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ sera en tout cas pseudo-simple. La condition (I.6) est donc nécessaire.

Pour prouver la suffisance, nous commençons par remarquer que si (I.6) est satisfaite, alors $\mathrm{P}_1^{(j)} \notin]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$, car si c'était le cas alors $\mathcal{B}$ serait une polycourbe avec tangence intérieure. Mais alors, si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$, les sommets $\mathrm{P}_{k_i+1}(i), \dots, \mathrm{P}_0^{(j)}, \dots, \mathrm{P}_{k_j}^{(j)}$ ne peuvent pas être colinéaires. En effet, s'ils sont colinéaires, alors ils se trouvent sur la droite $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$. Les polygones de contrôle des courbes de Bézier composant la polycourbe étant simples, les sommets $\mathrm{P}_{k_i+1}(i), \dots, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ se trouveront sur la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ et les sommets $\mathrm{P}_1^{(j)}, \dots, \mathrm{P}_{k_j}^{(j)}$ se trouvent sur la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$. Conformément à la remarque faite ci-dessus, les deux demi-droites sont disjointes, d'où la contradiction. Donc ces sommets ne peuvent pas être colinéaires, et par conséquent le polygone de contrôle de la polycourbe ne sera pas pseudo-simple.

En conclusion, si $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}] \cap [\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \neq \emptyset$ et les arêtes $[\mathrm{P}_{k_i}^{(i)}\mathrm{P}_{k_i+1}^{(i)}]$ et $[\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}]$ ne sont pas des arêtes consécutives de $\mathcal{P}$ (condition équivalente, dans le cas présent, à $(k_i, k_j) \neq (m_i - 1, 0)$), alors la condition (I.6) est équivalente à la non-pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$.

Nous aurons donc $i \in \mathrm{I}$. Supposons d'abord que $i \in \mathrm{I}_1$. Il y a alors deux possibilités : $i \in \mathrm{I}_1'$ ou $i \in \mathrm{I}_1''$.

Cas 2.1. $i \in \mathrm{I}_1'$

Nous voulons obtenir une contradiction avec la définition de γ_0''. Pour ça, nous prouverons que si la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(j)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ coupe la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(i)}$ dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(j)} = \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$, alors elle coupe aussi la courbe $\mathcal{B}_i$ dans un point autre que $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$. Notons $]\mathcal{P}_j$ la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(j)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ sans le point $\mathrm{P}_0^{(j)}$ et $\mathcal{P}_i[$ la ligne polygonale $\mathrm{P}_0^{(i)} \dots \mathrm{P}_{m_j}^{(i)}$ sans le point $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$.

Supposons que $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$. Le point $\mathrm{P}_1^{(j)}$ doit alors appartenir à $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, car la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$ coupe $\mathcal{B}_i$ ($i \in \mathrm{I}_1'$) et si $\mathrm{P}_1^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, alors nous avons tout de suite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}] \cap \mathcal{B}_i \neq \emptyset$, d'où une contradiction. D'un autre côté, si pour tout $k \in \{1, \ldots, m_j\}$ $\mathrm{P}_k^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, alors évidemment $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_i[= \emptyset$, d'où une contradiction. Il existe donc (figure I.21) $\ell \in \{2, \ldots, m_j\}$ tel que

$$\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_{\ell}^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$$

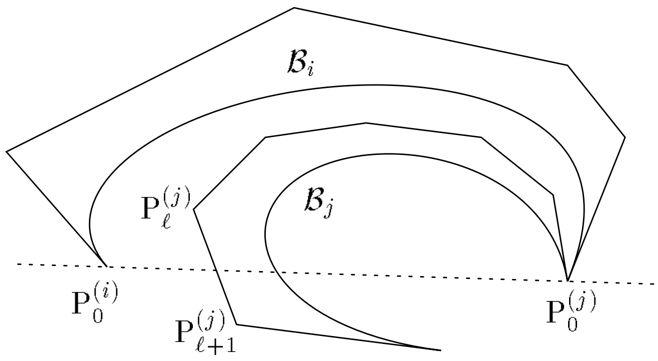

Figure I.21

Nous pouvons remarquer tout de suite que

$$[\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \cap (\mathcal{B}_i \cup]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) = [\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \cap \delta\Big(reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\Big) \neq \emptyset$$

Mais $[\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \subset]\mathcal{P}_j$, donc $[\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$. Ainsi, le segment $[\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}]$ va couper le segment $]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[$. Par conséquent, les points $\mathrm{P}_0^{(i)}$ et $\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ se trouveront dans des demi-plans ouverts opposés par rapport à la droite $\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}$. Cette droite est une droite support de l'une des arêtes de $\mathcal{P}_j$, polygone convexe, nous aurons donc $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}, \mathrm{P}_0^{(j)})}$ et nous pouvons en déduire que $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}, \mathrm{P}_0^{(i)})}$.

Soit $\{\mathrm{P}\} = [\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \cap]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[$ et nous notons

$$]\mathcal{P}'_j =]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\ell-2} [\mathrm{P}_k^{(j)}\mathrm{P}_{k+1}^{(j)}]\right) \cup [\mathrm{P}_{\ell-1}^{(j)}\mathrm{P}]$$

$$]\mathcal{P}''_j =]\mathrm{P}\mathrm{P}_{\ell}^{(j)}] \cup \left(\bigcup_{k=\ell}^{m_j-1} [\mathrm{P}_k^{(j)}\mathrm{P}_{k+1}^{(j)}]\right)$$

Mais $\mathrm{P} \notin \mathcal{B}_i$ et ainsi $]\mathcal{P}'_j$ ne peut pas couper $\mathcal{P}_i[$, tous ses sommets, à part P, étant dans $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et P appartenant au segment $]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[$. Voyons donc dans quelles conditions $]\mathcal{P}''_j$ peut couper $\mathcal{P}_i[$. Nous savons que $\mathrm{P}_{\ell}^{(j)} \in \overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\})}$. Le polygone $\mathcal{P}_j$ est simple et convexe et nous avons $\mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \supset \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}\}$, nous pouvons donc écrire que $\mathcal{P}_j \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} = \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}\}$. En conclusion, nous aurons

$$\mathrm{P}_{\ell+1}^{(j)}, \ldots, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \overline{\mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\})}$$

Alors $]\mathcal{P}''_j \cap \mathcal{P}_i[\subset \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}$ et comme aucun de ces deux points n'est un point de $]\mathcal{P}''_j$, il vient $]\mathcal{P}''_j \cap \mathcal{P}_i[= \emptyset$. Nous pouvons donc conclure que $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{P}_i[= \emptyset$, d'où une contradiction.

Ainsi, l'hypothèse $]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$ nous a menés dans tous les cas à une contradiction, donc elle est fausse.

Soit $\mathrm{M} \in \,]\mathcal{P}_j \cap \mathcal{B}_i$. Nous savons que

$$]\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big)}$$

donc

$$\mathrm{M} \in \mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big)}$$

Conformément aux notations faites au début de la démonstration,

$$\mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big)} = \widetilde{\mathcal{B}}_i$$

Alors

$$\mathrm{d}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_i, \mathcal{B}_{i+1}\big) = \mathrm{d}\big(\widetilde{\mathcal{B}}_i, \mathcal{B}_j\big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{M}, \mathcal{B}_i\big) \leq \delta\big(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i\big) \leq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0 \leq \gamma_0''$$

cette relation contredisant la définition de γ_0''.

Cas 2.2. $i \in \mathrm{I}_1''$

Soit $\widetilde{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{k \neq i,j} \mathcal{P}_k$. Nous voulons prouver que si $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}_j$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(j)} = \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$, alors soit $\mathcal{P}_i$ et $\widetilde{\mathcal{P}}$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_0^{(i)}$, soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P}_j$ se coupent dans un point autre que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$, c'est-à-dire nous voulons prouver que

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(j)}\big\} \neq \emptyset \Longrightarrow \Big(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \big\{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big\}\Big) \cup \Big(\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(i)}\big\}\Big) \neq \emptyset$$

Supposons que $\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \big\{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\big\} = \emptyset$ et $\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \big\{\mathrm{P}_0^{(i)}\big\} = \emptyset$.

Des deux angles $\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$, considérons celui pour lequel

$$\mathcal{B}_j \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \neq \emptyset$$

Nous aurons alors $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$, car évidemment $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$. Alors $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$, car sinon

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) = \emptyset$$

et donc $\mathcal{B}_j$ et $\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)$ sont disjoints, d'où la contradiction.

Par conséquent, $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big)}$.

D'un autre côté, nous devons avoir $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$

En effet, si

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)} \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

alors

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

et donc la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}$ est elle aussi contenue dans ce demi-plan. Si, au contraire,

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

alors en supposant

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \not\subset \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big)$$

nous obtenons

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)}\big) = \emptyset$$

et comme $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)})$ et $\mathcal{B}_j \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_1^{(j)})}$, il en résulte que $\mathcal{B}_j \cap reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) = \emptyset$, d'où une contradiction.

Ainsi, $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)})$ et nous voulons prouver que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$.

Supposons que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$. Nous savons que $\mathcal{B}_j \cap reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \neq \emptyset$; soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_j \cap reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$. Notons $\mathcal{A}$ le morceau de la courbe $\mathcal{B}_j$ compris entre A et $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$. Comme $\mathrm{A} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ et $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \notin reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$, nous aurons

$$\mathcal{A} \cap \delta\Big(reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)\Big) = \mathcal{A} \cap \Big(\mathcal{B}_i \cup]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\Big) \neq \emptyset$$

Il est évident que $\mathrm{P}_0^{(j)} \notin \mathcal{A}$, donc forcément $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_i = \emptyset$, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple. Par conséquent, $\mathcal{A} \cap]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\neq \emptyset$. Mais alors il existe $\mathrm{A}' \in \mathcal{A} \cap \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)})$ et soit $\mathcal{A}'$ le morceau de $\mathcal{A}$ compris entre A' et $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$. Nous avons vu que $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_1^{(i)})$, donc A' et $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ se trouvent dans des demi-plans opposés par rapport à la droite $\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ et il résulte $\mathcal{A}' \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \neq \emptyset$.

En conclusion, il existe un point appartenant à $\mathcal{A}' \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ et un point appartenant à $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}') \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$. Comme $\mathrm{P}_0^{(j)} \in \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$ et $\mathrm{P}_0^{(j)} \notin \mathcal{A}$, nous obtenons

$$\mathrm{card}(\mathcal{B}_j \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}) \geq 3$$

ce qui donne une contradiction avec la convexité de $reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$. Donc en effet $\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$. Nous voulons maintenant prouver qu'il existe une ligne polygonale non-bornée $\mathcal{LP}$ qui sépare le plan en deux régions ouvertes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ telles que

$$\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\} \subset \mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\} \subset \mathcal{R}_2$$

Nous commençons par prouver que

$$\mathcal{P}_j \cap \Big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \setminus]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]\Big) = \emptyset$$

Soient les demi-droites d' et d'' telles que $d' \cup d'' = \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \setminus]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}]$: d' est la demi-droite ouverte opposée à $[\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i)}$ et d'' est la demi-droite fermée opposée à $]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}$.

Nous avons déjà vu que

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_1^{(j)})$$

donc la droite $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ sépare les points $\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}$ et $\mathrm{P}_1^{(j)}$. D'un autre côté,

$$\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}),$$

donc

$$\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \in \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathrm{P}_0^{(i)})$$

Ainsi, en choisissant des deux angles $\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i)}$ celui pour lequel

$$\mathcal{B}_i \cap \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i)})} \neq \emptyset$$

(par conséquent, $\mathcal{B}_i \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_0^{(i)})}$, comme déjà vu) nous obtenons

$$]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)} \subset \mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\mathrm{P}_1^{(j)})$$

Donc la droite $P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}$ sépare aussi les points $P_{m_i-1}^{(i)}$ et $P_0^{(i)}$ et nous en déduisons que

$$P_0^{(i)} \in \mathrm{DP}\big(P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}, P_1^{(j)}\big)$$

et par conséquent

$$d' \cap \mathrm{DP}\big(P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}, P_1^{(j)}\big) = \emptyset$$

Comme $\mathcal{P}_j \subset \overline{\mathrm{DP}\big(P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}, P_1^{(j)}\big)}$ et d' est ouverte, nous pouvons conclure que $\mathcal{P}_j \cap d' = \emptyset$.

Démontrons maintenant que $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$. Nous allons faire une preuve par l'absurde. Supposons que $\mathcal{P}_j \cap d'' \neq \emptyset$. Comme le polygone $\overline{\mathcal{P}_j}$ (défini comme l'union de la ligne polygonale $\mathcal{P}_j$ et du segment $]P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}[$) est convexe, nous aurons soit $P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)} = P_0^{(j)}P_1^{(j)}$ et $P_1^{(j)} \in d''$, soit $\mathrm{card}(\mathcal{P}_j \cap d'') = 1$. Dans les deux cas, soit $N \in P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)}$ tel que

$$\mathcal{P}_j \cap P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)} \subset \big[NP_{m_i}^{(i)} \text{ et } d\big(N, P_{m_i}^{(i)}\big) = \min_{\substack{P \in P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)} \\ \mathcal{P}_j \cap P_0^{(i)}P_{m_i}^{(i)} \subset [PP_{m_i}^{(i)}}} d\big(P, P_{m_i}^{(i)}\big)$$

Évidemment, $N \in d''$. Si $N = P_0^{(i)}$, alors

$$\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \big\{P_{m_j}^{(j)}\big\} \supset \big\{P_0^{(i)}\big\} \neq \emptyset,$$

contradiction.

Donc $N \in d'' \setminus \big\{P_0^{(i)}\big\}$. Alors, toujours pour des raison de convexité du polygone $\overline{\mathcal{P}_j}$,

$$]NP_0^{(j)}[\subset reg\big(\overline{\mathcal{P}_j}\big)$$

et donc $P_0^{(i)} \in reg\big(\overline{\mathcal{P}_j}\big)$. Plus, les ensembles I_1 et I_2 sont disjoints, donc

$$P_0^{(i)} \notin reg\big(\mathcal{B}_j,]P_0^{(j)}P_{m_j}^{(j)}[\big)$$

et évidemment $P_0^{(i)} \notin \mathcal{B}_j$, alors nous aurons $P_0^{(i)} \in reg\big(\mathcal{P}_j, \mathcal{B}_j\big)$. La figure I.22 présente cette situation.

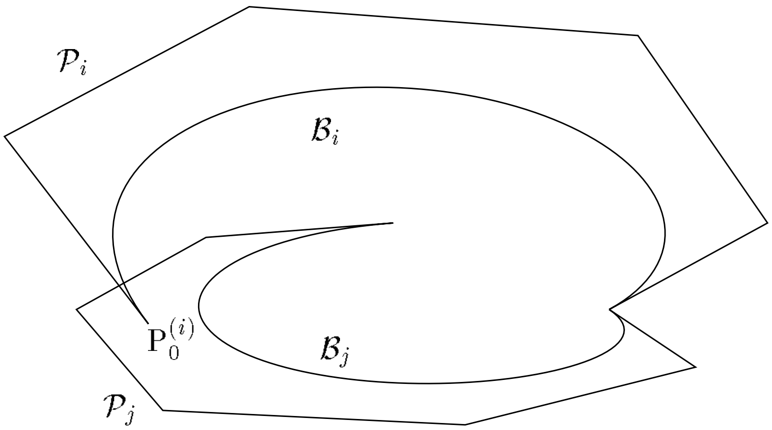

Figure I.22

Comme $n \geq 4$, $i-1 \neq j+1$. Mais

$$P_0^{(i)} \in reg\big(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j\big) \Longrightarrow d\big(P_0^{(i)}, \mathcal{B}_j\big) \leq \delta\big(\mathcal{B}_j, \mathcal{P}_j\big) < \gamma_0 \leq \gamma_0'$$

D'un autre côté, nous avons $d\big(\mathcal{B}_{i-1}, \mathcal{B}_j\big) \leq d\big(P_0^{(i)}, \mathcal{B}_j\big)$ et nous obtenons ainsi une contradiction avec la définition de γ_0'. Donc $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$.

Nous savons aussi que

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right\}\right) \cap \left[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] = \emptyset$$

et que

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right\}\right) \cap \widetilde{\mathcal{P}} = \emptyset$$

Définissons alors

$$\mathcal{LP} = d' \cup d'' \cup \left[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] \cup \widetilde{\mathcal{P}}$$

$\mathcal{LP}$ partage le plan en au moins deux régions ouvertes disjointes (si elle n'est pas simple, alors il y a plus de deux régions). Comme

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right\}\right) \cap \mathcal{LP} = \emptyset,$$

nous déduisons que $\mathcal{P}_j \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right\}$ est complètement incluse dans une de ces régions, que nous appellerons $\mathcal{R}_1$.

Soit $\mathcal{R}_2$ une autre de ces régions telle que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$$

Nous savons

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \widetilde{\mathcal{P}} = \emptyset$$

et nous pouvons voir tout de suite que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \left[\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] = \emptyset,$$

car $\left]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right] \subset reg\left(\mathcal{B}_i, \left]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right[\right)$. Si

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} = \emptyset,$$

il résulte que

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \mathcal{LP} = \emptyset$$

et par conséquent $\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}$ sera complètement inclus dans $\mathcal{R}_2$. Mais, sans contredire la simplicité ou la convexité de $\mathcal{P}_i$, nous pouvons avoir

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \cap \mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \neq \emptyset,$$

comme présenté dans la figure I.23. Dans ce cas, on peut vérifier assez aisément que

$$\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\} \subset \overline{\mathcal{R}_2}$$

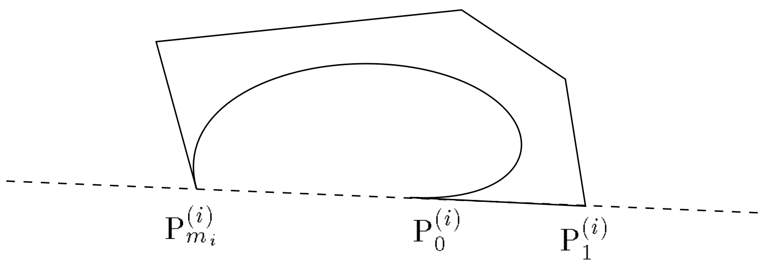

Figure I.23

Comme $\mathcal{R}_1$ est un ensemble ouvert, pour prouver que

$$\left(\mathcal{P}_j \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\right\}\right) \cap \left(\mathcal{P}_i \setminus \left\{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\right\}\right) \neq \emptyset$$

il suffit de démontrer que $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$. Mais nous savons que les points $\mathrm{P}_1^{(i)}$ et $\mathrm{P}_1^{(j)}$ sont séparés par la droite $\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}$ et il résulte que pour avoir $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ la ligne polygonale $\widetilde{\mathcal{P}}$ doit passer par $\mathrm{P}_0^{(j)}$, ce qui nous ramène tout de suite au cas 1, qui a son tour nous avait menés a une contradiction.

Par conséquent,

$$\left(\mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}, \mathrm{P}_{m_i}^{(i)}\}\right) \cap \left(\mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\right) = \emptyset$$

et donc $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}\} = \emptyset$, car évidemment $\mathrm{P}_0^{(i)} \notin \{\mathrm{P}_0^{(j)}, \mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}$.

Ainsi, en supposant

$$\left(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\right) \cup \left(\mathcal{P}_i \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}\}\right) = \emptyset,$$

nous avons obtenu une contradiction avec l'hypothèse $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}\} \neq \emptyset$. Donc vraiment

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j \setminus \{\mathrm{P}_0^{(j)}\} \neq \emptyset \Longrightarrow \Big(\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\}\Big) \cup \Big(\widetilde{\mathcal{P}} \cap \mathcal{P}_i \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}\}\Big) \neq \emptyset$$

Mais $\mathcal{P}_j \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}\} \neq \emptyset$ signifie qu'il existe

$$\ell \in \{1, \ldots, i-1, j+1, \ldots, n\} \text{ et } k_j \in \{0, \ldots, m_j - 1\},\ k_\ell \in \{0, \ldots, m_\ell - 1\}$$

tels que

$$[\mathrm{P}_{k_j}^{(j)}\mathrm{P}_{k_j+1}^{(j)}] \cap [\mathrm{P}_{k_\ell}^{(\ell)}\mathrm{P}_{k_\ell+1}^{(\ell)}] \neq \emptyset,$$

avec les éventuelles conditions supplémentaires déjà mentionnées au cours de la démonstration. Cette situation nous ramène dans un des cas 1, 2 ou 3, ce qui finira par donner une contradiction, car nous pouvons voir que nous ne cyclerons pas indéfiniment : si $\ell = j+1$ et $j \in \mathrm{I}_1''$, alors nous avons $\mathrm{P}_{m_\ell}^{(\ell)} \in reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[)$ et la relation

$$\mathrm{P}_{m_i}^{(i)} \in reg(\mathcal{B}_{i-1},]\mathrm{P}_0^{(i-1)}\mathrm{P}_{m_{i-1}}^{(i-1)}[) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

est impossible, car $\mathcal{B}$ est une courbe simple et $reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

De même, en considérant $\mathcal{P}_i \cap \widetilde{\mathcal{P}} \setminus \{\mathrm{P}_0^{(i)}\} \neq \emptyset$, nous ne pourrons pas osciller indéfiniment entre les cas 2.2 et 2.4 pour des raisons de convexité des polygones $\overline{\mathcal{P}_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ainsi, nous finirons dans le cas 2.2 aussi par obtenir une contradiction avec l'hypothèse

$$\max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{B}_i, \mathcal{P}_i) < \gamma_0 \text{ et } \mathcal{P} \text{ non-pseudo-simple}$$

Pour les cas 2.3 : $i \in \mathrm{I}_2'$ et 2.4 : $i \in \mathrm{I}_2''$, la preuve est en tout point semblable à celle faite pour les cas 2.1 et 2.2, raison pour laquelle nous ne la donnons plus ici.

Cas 3. $j = i - 1$

Évidemment, ce cas n'apporte aucun élément nouveau par rapport au cas 2, une simple substitution faite entre i et j permettant de le réduire à celui-ci.

Ainsi, la preuve pour le cas $n_0 \geq 4$ est finie et pour terminer la démonstration du théorème nous devons maintenant étudier les cas $n_0 = 2$ et $n_0 = 3$, car évidemment $n_0 \geq 1$.

Pour $n_0 = 2$, nous pouvons avoir deux situations (figure I.24) : soit

$$reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)),$$

soit

$$reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}_{op}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)).$$

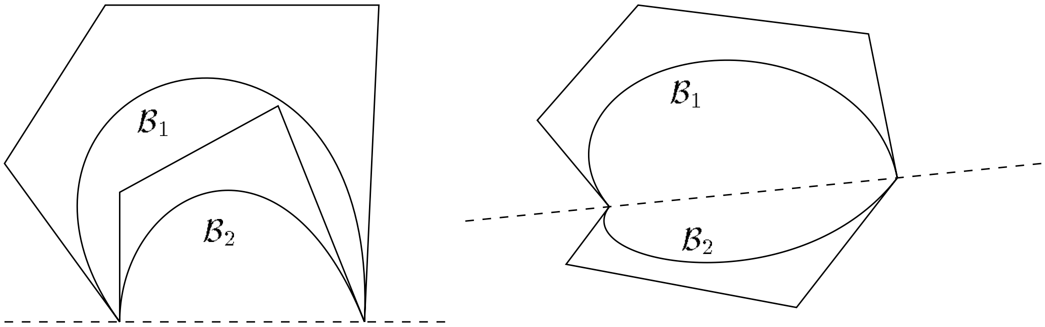

Figure I.24

Dans le deuxième cas, suite aux propriétés des courbes de Bézier et à la convexité des polygones $\overline{\mathcal{P}_1}$ et $\overline{\mathcal{P}_2}$, le polygone $\mathcal{P}$ sera toujours pseudo-simple. Étudions donc le cas $reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[))$.

Comme $\mathcal{B}$ est simple, nous aurons soit $reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$, soit l'inverse, cas qui est le même modulo un changement de notation. Ainsi, supposons que

$$reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[) \subset reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$$

Si $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ ne sont pas parallèles, soit $\{\mathrm{P}\} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)} \cap \mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$. Si $\mathrm{P} \in reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$, alors $\mathcal{P}_1 \subset \overline{reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)}$, car cette ligne polygonale est incluse dans le triangle $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}$. Si $\mathrm{P} \notin reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$ ou $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ sont parallèles, soient $\{\mathrm{P}_1\} = \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)} \cap \mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}\}$ et $\{\mathrm{P}_2\} = \mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \cap \mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}$. Ces deux points existent, car $\mathcal{B}$ est sans tangence intérieure, et sont uniques, car $reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$ est convexe. Notons $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ le morceau de $\mathcal{B}_2$ compris entre P_1 et P_2 et posons

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathcal{B}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_2)$$

Prouvons que γ_0 ainsi défini satisfait la condition de l'énoncé du théorème. Supposons donc que

$$\max\{\delta(\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1), \delta(\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2)\} < \gamma_0$$

et nous voulons prouver que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Remarquons que, dans ce cas, $\mathcal{P}$ ne peut pas être pseudo-simple sans être simple, et prouvons qu'il est simple par l'absurde. Nous supposons ainsi que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(2)}\} \neq \emptyset$ et soit $\mathrm{M}_1 \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(2)}\}$. Comme

$$\mathcal{P}_1 \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)})},$$

le point M_1 doit évidemment se trouver lui aussi dans l'intersection des deux demi-plans fermés. D'un autre côté,

$$\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[))} \setminus reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[),$$

donc M_1 est lui aussi un élément de cet ensemble. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1 \in & \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)}\big)} \\ & \cap \Big(\overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_0^{(2)}, reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)\big)} \setminus reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)\Big)\end{aligned}$$

Mais cette région du plan et la région

$$reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[) \cap \overline{\mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_1^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(1)}\big)}$$

sont séparées par $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ et en conséquence $\mathcal{P}_1$, qui a des points dans les deux régions ci-dessus, doit couper $\widetilde{\mathcal{B}}_2$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{P}_1 \cap \widetilde{\mathcal{B}}_2$. Alors nous aurons

$$\mathrm{d}(\widetilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{B}_1) \leq \mathrm{d}(\mathrm{M}, \mathcal{B}_1) \leq \delta^{\mathrm{H}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1) < \gamma_0,$$

d'où une contradiction avec la définition de γ_0. L'hypothèse $\mathcal{P}$ non-simple est donc fausse et ainsi la preuve pour le cas $n_0 = 2$ est achevée.

Étudions maintenant le cas $n_0 = 3$. Nous allons faire cette preuve en discutant les différences existant entre les cas $n_0 \geq 4$ et $n_0 = 3$.

Si $n_0 = 3$, dans les définitions données pour le cas général nous aurons $\gamma_0' = +\infty$. Si $\mathrm{I}_1' \cup \mathrm{I}_2' = \emptyset$, alors $\gamma_0 = +\infty$. Prouvons que dans ce cas $\mathcal{P}$ est pseudo-simple. Il y a plusieurs possibilités :

(i) $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_2 = \emptyset$;
(ii) $\mathrm{I}_1 = \emptyset, \mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$;
(iii) $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2 = \emptyset$;
(iv) $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset, \mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$.

(i) $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2 = \emptyset$ (figure I.25)

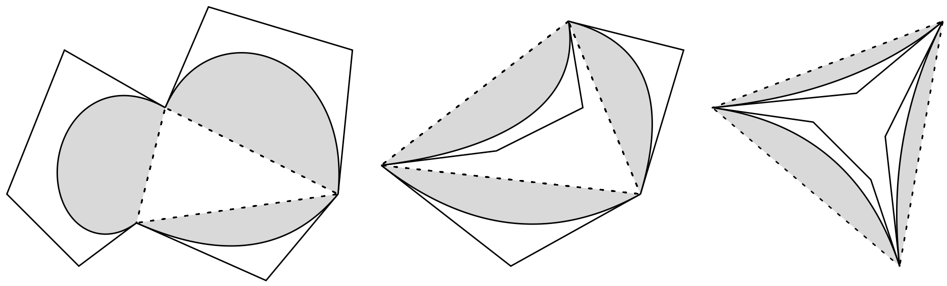

Figure I.25

Soit, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{R}_i = \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_1^{(i)}, \mathcal{B}_i\big) \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}_{m_i-1}^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}, \mathcal{B}_i\big)$$

Prouvons que

$$reg(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[) \cap reg(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[) = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset$$

n_0 étant égal à trois, toutes deux courbes de Bézier de la composition de la polycourbe sont consécutives et par conséquent il suffit de prouver cette implication pour $i = 1$, $j = 2$.

Des deux angles $\angle\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}$ prenons celui dont l'intérieur contient $\mathcal{B}_1 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\}$ et des deux angles $\angle\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}$ celui dont l'intérieur contient $\mathcal{B}_2 \setminus \{\mathrm{P}_0^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\}$. Suite aux propriétés des courbes de Bézier,

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{Int}(\angle\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}) \exists \mathrm{P}_1 \in]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P} \text{ tel que }]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_1[\subset reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[)$$

De même,

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_1^{(2)}\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\big)\exists \mathrm{P}_2 \in \,]\mathrm{P}_{m_2}^{(1)}\mathrm{P} \text{ tel que }]\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_2[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big)$$

Nous pouvons donc prouver que

$$\mathrm{P}_1^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \notin \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\big)$$

En effet, si $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \in \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\big)$, alors

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_1^{(2)}\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\big) \neq \emptyset$$

Soit P un point de l'intersection des deux ensembles. Il existe $\mathrm{P}_1 \in \,]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}$ tel que

$$]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_1[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[\big)$$

et il existe $\mathrm{P}_2 \in \,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}$ tel que

$$]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_2[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big)$$

Mais $\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} = \mathrm{P}_0^{(2)}$ et en prenant P_0 tel que $]\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_1[\, \cap \,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_2[\, = \,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_0[$, il vient

$$]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_0[\, \subset reg\big(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big)$$

et donc les deux ensembles ne sont pas disjoints, ce qui contredit l'hypothèse $\mathrm{I} = \emptyset$. De la même façon, $\mathrm{P}_1^{(2)} \in \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\big)$ donnera aussi une contradiction. Nous obtenons ainsi

$$\mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}\big) \cap \mathrm{Int}\big(\angle \mathrm{P}_1^{(2)}\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\big) = \emptyset$$

et par conséquent $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$.

Donc si $reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big)$ et $reg\big(\mathcal{B}_j,]\mathrm{P}_0^{(j)}\mathrm{P}_{m_j}^{(j)}[\big)$ sont disjointes, alors $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j$ sont disjoints pour tout $i \neq j \in \{1,2,3\}$. Mais nous savons que $\mathrm{I} = \emptyset$, donc toutes deux régions déterminées par les courbes de Bézier composant la polycourbe sont disjointes. Nous pouvons en déduire que $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = \emptyset \ \forall i \neq j \in \{1,2,3\}$. D'un autre côté, $\mathcal{P}_i \subset \overline{\mathcal{R}_i} \ \forall i \in \{1,2,3\}$, et, comme $\overline{\mathcal{P}_i}$ sont des polygones convexes pour tout $i \in \{1,2,3\}$, nous pouvons conclure, avec un raisonnement déjà fait au cours de la démonstration pour le cas général, que $\mathcal{P}$ est pseudo-simple.

(ii) Ce cas, tout comme le cas (iii), ne peut pas exister. Si nous supposons que $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset$, soit $i \in \mathrm{I}_1''$. Nous avons prouvé que dans cette situation $\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)} \in reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big)$. Mais $\mathrm{P}_{m_{i+1}}^{(i+1)} = \mathrm{P}_0^{(i+2)}$ et $i+2 = i-1$, car $n = 3$, donc $\mathcal{B}_{i-1} \cap reg\big(\mathcal{B}_i,]\mathrm{P}_0^{(i)}\mathrm{P}_{m_i}^{(i)}[\big) \neq \emptyset$ et alors $i-1 \in \mathrm{I}_2$. Comme $\mathrm{I}_2' = \emptyset$, il reste $i-1 \in \mathrm{I}_2''$ et donc $\mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$. De la même façon, en supposant $\mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$ nous obtenons $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset$.

(iv) $\mathrm{I}_1'' \neq \emptyset$ et $\mathrm{I}_2'' \neq \emptyset$ (figure I.26).
Si $i \in \mathrm{I}_1''$, nous avons vu que $i-1 \in \mathrm{I}_2''$. Sans réduire la généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$. Nous voulons prouver que $\mathrm{I}_1'' = \{1\}$ et $\mathrm{I}_2'' = \{3\}$. Pour cela, il suffit de prouver $reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}[\big) = \emptyset$, car nous savons que I_1 et I_2 sont disjoints, $1 \in \mathrm{I}_1''$, $3 \in \mathrm{I}_2''$ et il reste à prouver que $2 \notin \mathrm{I}$. Si nous supposons

$$reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big) \cap reg\big(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}[\big) \neq \emptyset\ ,$$

nous pouvons avoir soit $2 \in \mathrm{I}_1$, soit $2 \in \mathrm{I}_2$. Si $2 \in \mathrm{I}_1$, alors $2 \in \mathrm{I}_1''$ et il résulte $\mathrm{P}_{m_3}^{(3)} \in reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big)$. Mais $\mathrm{P}_{m_3}^{(3)} = \mathrm{P}_0^{(1)}$, donc $\mathcal{B}_1 \cap reg\big(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[\big) \neq \emptyset$, contradiction. Une contradiction similaire est obtenue si $2 \in \mathrm{I}_2''$. Donc en effet $\mathrm{I}_1'' = \{1\}$ et $\mathrm{I}_2'' = \{3\}$.

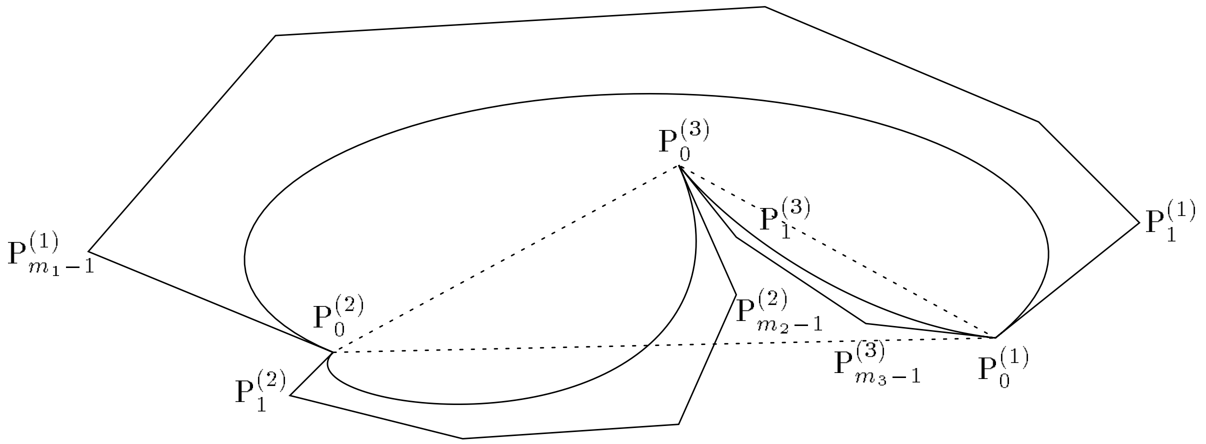

Figure I.26

Nous avons prouvé, dans le cas général, que les points $\mathrm{P}_{m_1-1}^{(1)}$ et $\mathrm{P}_1^{(2)}$ sont séparés par la droite $\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$. De la même façon, les points $\mathrm{P}_1^{(1)}$ et $\mathrm{P}_{m_3-1}^{(3)}$ sont séparés par la droite $\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}$. Nous voulons aussi prouver que la droite $\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$ sépare les points $\mathrm{P}_0^{(2)}$ et $\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}$. Supposons que $\mathrm{P}_0^{(2)}$ et $\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}$ sont dans le même demi-plan par rapport à la droite $\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$; alors la demi-droite $]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}$ sera contenue dans $\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)})$, donc nous pouvons déduire que $]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}m_3{}^{(3)}[$ coupe $reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[)$. D'un autre côté, le segment $]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}m_3{}^{(3)}[$ fait partie de la frontière de $reg(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}[)$ et il en résulte que

$$reg(\mathcal{B}_2,]\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}[) \cap reg(\mathcal{B}_3,]\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)}[) \neq \emptyset,$$

contradiction. Pour des raisons similaires, $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}$ va séparer $\mathrm{P}_0^{(2)}$ et $\mathrm{P}_1^{(3)}$. Comme $\mathcal{P}_3 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_1^{(3)}\mathrm{P}_0^{(3)}\mathrm{P}_{m_3}^{(3)})}$ et $\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)})}$, la ligne polygonale $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple.

Vérifions maintenant la pseudo-simplicité de la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Nous savons $\mathcal{P}_2 \subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)})}$ et $\mathcal{P}_1 \subset \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[))}$. Comme la droite $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}$ sépare $\mathrm{P}_0^{(2)} = \mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$ et $\mathrm{P}_0^{(1)} = \mathrm{P}_{m_3}^{(3)}$, $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)} \cap \mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)} \subset]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[$. Alors

$$\begin{aligned}&\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[))\\ &\quad = \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}, \mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}, \mathrm{P}_0^{(2)}) \cap \mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, \mathrm{P}_{m_2}^{(2)}),\end{aligned}$$

car $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)} \in reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[)$. Cet ensemble est l'intérieur d'un triangle dont les sommets sont les points $\mathrm{P}_0^{(2)}$, $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}$ et le point d'intersection des droites $\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)}$ et $\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}$, donc des points de $\overline{reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[)}$. En conclusion, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 &\subset \overline{\mathrm{Int}(\angle \mathrm{P}_0^{(2)}\mathrm{P}_{m_2}^{(2)}\mathrm{P}_{m_2-1}^{(2)})} \cap \overline{\mathrm{DP}(\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}, reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[))}\\ &\subset \overline{reg(\mathcal{B}_1,]\mathrm{P}_0^{(1)}\mathrm{P}_{m_1}^{(1)}[)}\end{aligned}$$

et nous en déduisons $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \subset \{\mathrm{P}_0^{(1)}, \mathrm{P}_0^{(2)}\}$. Comme $\mathrm{P}_0^{(1)} \notin \mathcal{P}_2$, il résulte que la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ est pseudo-simple.

De façon très semblable, on prouve que la ligne polygonale $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple et en sachant que les lignes polygonales $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_1$ sont pseudo-simples, il est évident que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ est pseudo-simple.

Il nous reste à traiter le cas $I'_1 \cup I'_2 \neq \emptyset$. Si I'_1 et I'_2 ne sont pas tous les deux vides, alors γ_0 défini comme pour le cas $n \geq 4$ est un réel et on prouve que ce γ_0 satisfait la condition de l'énoncé du théorème. La preuve est en tout point identique à celle du cas général, sauf qu'il faut donner une justification différente à chaque fois que le fait que n est supérieur ou égal à 4 a été utilisé. Mais nous nous sommes prévalus de cette condition une seule fois, dans la démonstration du cas 2.2, en prouvant que $\mathcal{P}_j \cap d'' = \emptyset$. Il nous reste donc à trouver autrement une contradiction si $i \in I''_1$ et $P_0^{(i)} \in reg(\mathcal{P}_j, \mathcal{B}_j)$, $j = i+1$ (figure I.22).

Supposons toujours que $i = 1$. Nous voulons prouver que $2 \in I'_2$ et nous commençons par montrer que $3 \in I'_2$. Évidemment, comme $P_{m_2}^{(2)} \in reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, il résulte $3 \in I_2$. Prouvons que $3 \notin I''_2$. De nouveau, la preuve sera faite par l'absurde, en supposant que $3 \in I''_2$ et en obtenant une contradiction.

Si $3 \in I''_2$, nous pouvons montrer que la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_1^{(1)}$ et $P_{m_3-1}^{(3)}$ (de la même façon dont nous avons prouvé que si $i \in I''_1$, alors la droite $P_{m_i}^{(i)}P_{m_{i+1}}^{(i+1)}$ sépare les points $P_{m_i-1}^{(i)}$ et $P_1^{(i+1)}$). D'un autre côté, comme $P_0^{(3)} \in reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_1^{(1)}$ et $P_0^{(2)}$. Donc $P_{m_3-1}^{(3)} \in DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})$. Des propriétés des courbes de Bézier et de la convexité de $\overline{\mathcal{P}_3}$, il résultera $\mathcal{B}_3 \subset \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$.

La droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ coupe $\mathcal{B}_1$ dans un seul point, à part $P_0^{(1)}$; soit $\{P_1\} =]P_0^{(1)}P_0^{(3)} \cap \mathcal{B}_1$. Le point $P_0^{(1)}$ est à l'intérieur du polygone $\overline{\mathcal{P}_2}$, donc la droite $P_0^{(1)}P_0^{(3)}$ sépare les points $P_0^{(2)}$ et $P_{m_2-1}^{(2)}$. Par conséquent, cette droite va couper $\mathcal{B}_2$ dans un point autre que $P_0^{(3)}$; soit $\{P_2\} =]P_0^{(3)}P_0^{(1)} \cap \mathcal{B}_2$. En notant $\widetilde{\mathcal{B}}_1$ le morceau de $\mathcal{B}_1$ compris entre P_1 et $P_{m_1}^{(1)}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_2$ le morceau de $\mathcal{B}_2$ compris entre $P_0^{(2)}$ et P_2, nous pouvons écrire

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2 = (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \cap \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$$

D'un autre côté, $P_2 \in]P_0^{(1)}P_0^{(3)}[$ et ce segment est inclus dans $reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)$, avec

$$P_0^{(1)}, P_1 \in \delta(reg(\mathcal{B}_1,]P_0^{(1)}P_{m_1}^{(1)}[)),$$

nous obtenons donc $P_0^{(3)} \in]P_1P_2[$.

En conclusion, nous avons une courbe continue, $\mathcal{B}_3 \subset \overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_0^{(2)})}$, qui doit joindre les points $P_0^{(1)} \notin [P_1P_2]$ et $P_0^{(3)} \in]P_1P_2[$, en sachant qu'il existe une courbe continue, $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2$, qui joint les points P_1 et P_2. La courbe $\mathcal{B}_3$ va ainsi forcément couper la courbe $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{B}}_2$, d'où une contradiction avec la simplicité de la polycourbe $\mathcal{B}$.

Donc en effet $3 \in I'_2$. En fait, ce qui nous intéresse est l'inclusion de $\mathcal{B}_3$ dans le demi-plan $\overline{DP(P_0^{(1)}P_0^{(3)}, P_1^{(1)})}$, car maintenant nous pouvons voir facilement que $\mathcal{B}_2 \cap reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[) \neq \emptyset$. Plus exactement, $\mathcal{B}_2 \setminus (\widetilde{\mathcal{B}}_2 \cup \{P_0^{(3)}\}) \subset reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[)$, en sachant que $P_0^{(3)} \neq P_2$. Ainsi, $2 \in I_2$. En plus, 2 ne peut pas appartenir à I''_2, car dans ce cas $P_0^{(2)}$ devrait appartenir à $reg(\mathcal{B}_3,]P_0^{(3)}P_{m_3}^{(3)}[)$, ce qui est faux. Donc $2 \in I'_2$.

Le point $P_0^{(1)}$ est dans $reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2)$, qui est un ouvert, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(P_0^{(1)}, \varepsilon) \subset reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2)$. Soit $P_3 \in B(P_0^{(1)}, \varepsilon) \cap \mathcal{B}_3 \setminus \{P_0^{(1)}\}$, car cet ensemble ne peut pas être vide. Alors

$$P_3 \in \mathcal{B}_3 \cap reg(\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2) \subset \mathcal{B}_3 \cap DP(P_{m_2}^{(2)}P_{m_2-1}^{(2)}, P_0^{(2)})$$

On aura alors

$$\mathrm{d}\Big(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \cap \mathrm{DP}\big(\mathrm{P}^{(2)}_{m_2}\mathrm{P}^{(2)}_{m_2-1}, \mathrm{P}^{(2)}_0\big)\Big) \leq \mathrm{d}\big(\mathrm{P}_3, \mathcal{B}_2\big) \leq \delta^{\mathrm{H}}\big(\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2\big) < \gamma_0 \leq \gamma_0''',$$

d'où une ontradiction avec la définition de γ_0'''.

Celle-ci étant la seule partie de la preuve pour le cas général qui devait être refaite pour le cas $n = 3$, la démonstration de la pseudo-simplicité de $\mathcal{P}$ quand le maximum des distances de Hausdorff entre les courbes de Bézier qui composent la polycourbe et leurs polygones de contrôle respectifs est inférieur à γ_0 est terminée aussi pour le cas $n = 3$.

Avant de conclure la preuve du théorème, nous devons remarquer que tout au long de cette démonstration le degré des courbes de Bézier traitées a été considéré au moins égal à deux, donc le cas où (certaines) courbes de Bézier sont des segments n'a pas été pris en compte. Mais la discussion dans ce cas ne pose aucun problème de principe supplémentaire par rapport au cas traité, les techniques nécessaires à la démonstration pour ce cas étant les mêmes que celles utilisées dans la preuve présentée ici. $\square$