

Des fractales en *Crocodile BASIC* (VIII)

1. Introduction

Nous étudierons dans cet article les ensembles de Mandelbrot générés par la fonction :

$$f(z) = [c(z^p - z^q) - 1]^r$$

où p , q et r sont des exposants entiers tels que $p > 1$, $q > 0$, $q \neq p$, $r > 1$. Cette formule a été proposée sur le site [Fractalforums](#) par « element90 ». Les images de cet article ont été générées par le programme **mandelstar**.

2. Aspects théoriques et graphiques

2.1. Les points critiques

Les points critiques sont les solutions de l'équation :

$$f'(z) = rc \cdot (pz^{p-1} - qz^{q-1}) [c(z^p - z^q) - 1]^{r-1} = 0$$

Le premier terme entre parenthèses conduit à un premier point critique :

$$z = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

Le deuxième terme conduit à une équation qui ne peut être résolue que numériquement dans le cas général ; nous nous contenterons donc du seul point critique précédent.

2.2. Itérations, estimateur de distance et *continuous dwell*

Avec les méthodes vues dans les articles précédents, on obtient :

- **pour les itérations :**

$$z_n = [c(z_{n-1}^p - z_{n-1}^q) - 1]^r = [c \cdot g(z_{n-1}) - 1]^r$$

avec $z_0 = (q/p)^{1/(p-q)}$ pour Mandelbrot et $z_0 = z_{\text{pixel}}$ pour Julia

- **pour la dérivée**, en dérivant par rapport à c :

$$z'_n = r \cdot [g(z_{n-1}) + c \cdot g'(z_{n-1})] [c \cdot g(z_{n-1}) - 1]^{r-1}$$

$$g'(z_{n-1}) = (pz_{n-1}^{p-1} - qz_{n-1}^{q-1}) z'_{n-1}$$

avec $z'_0 = 0$ pour Mandelbrot.

Pour l'ensemble de Julia, c est constant donc :

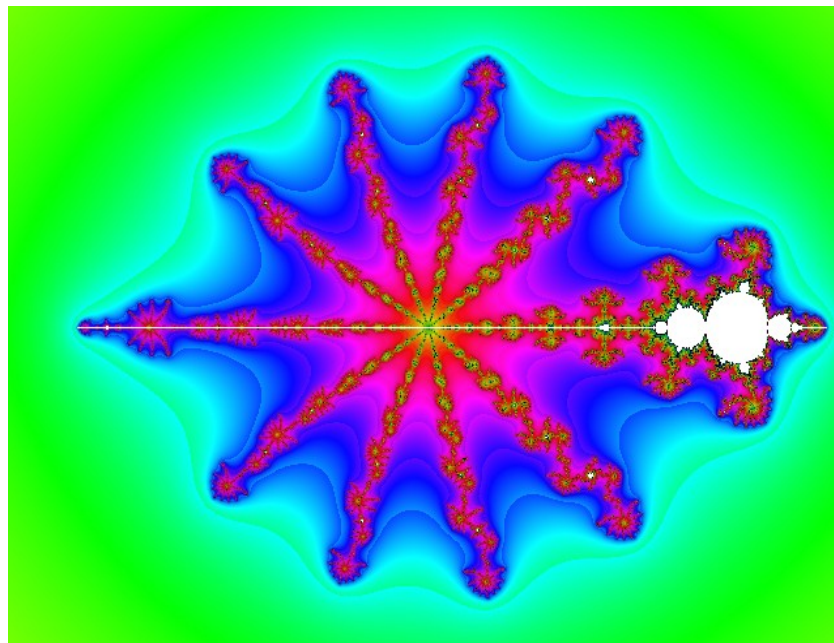
$$z'_n = rc \cdot g'(z_{n-1}) [c \cdot g(z_{n-1}) - 1]^{r-1}$$

avec $z'_0 = 1$

3. Le programme : mandelstar.bas

Le programme reprend l'organisation décrite dans les précédents articles. Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension **.star**

Avec l'exemple par défaut ($p = 6, q = 5, r = 2$), l'image obtenue est la suivante :



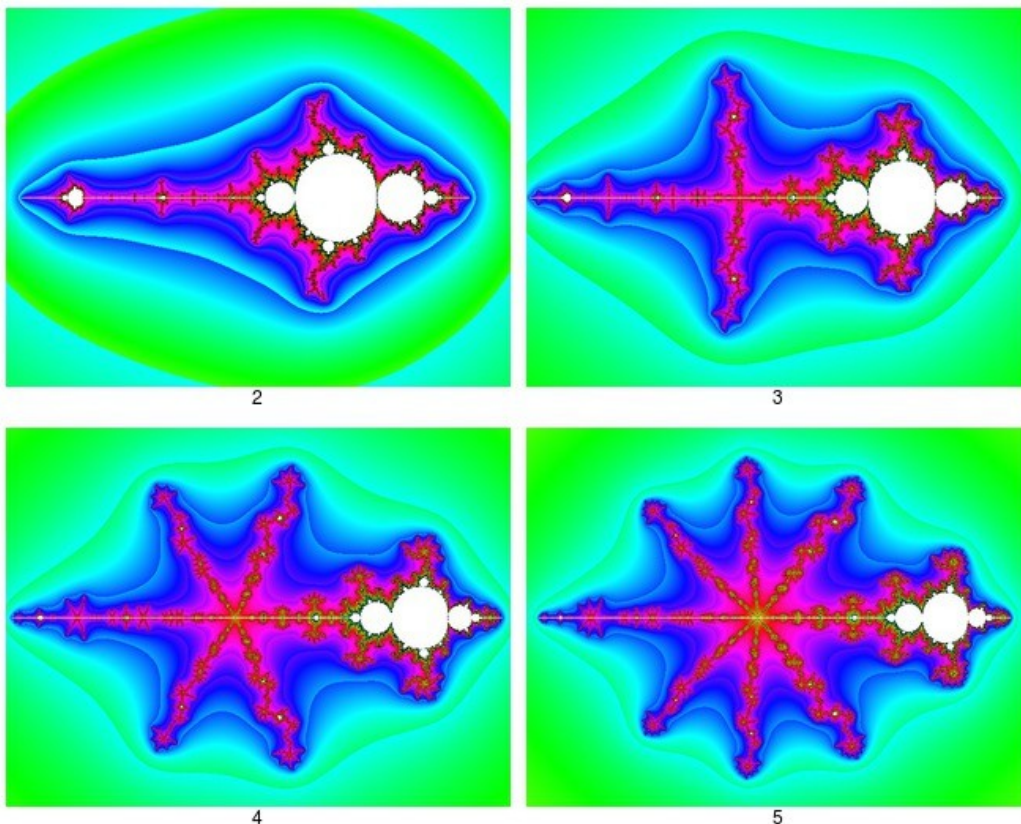
L'image se caractérise par la présence d'une imposante structure en forme d'étoile, émanant de la partie « ouest » de l'ensemble de Mandelbrot, et dont l'extension spatiale est beaucoup plus importante que celle de l'ensemble lui-même !

4. Exemples

Nous présentons ici quelques images des ensembles de Mandelbrot obtenus pour différentes valeurs des exposants p, q, r .

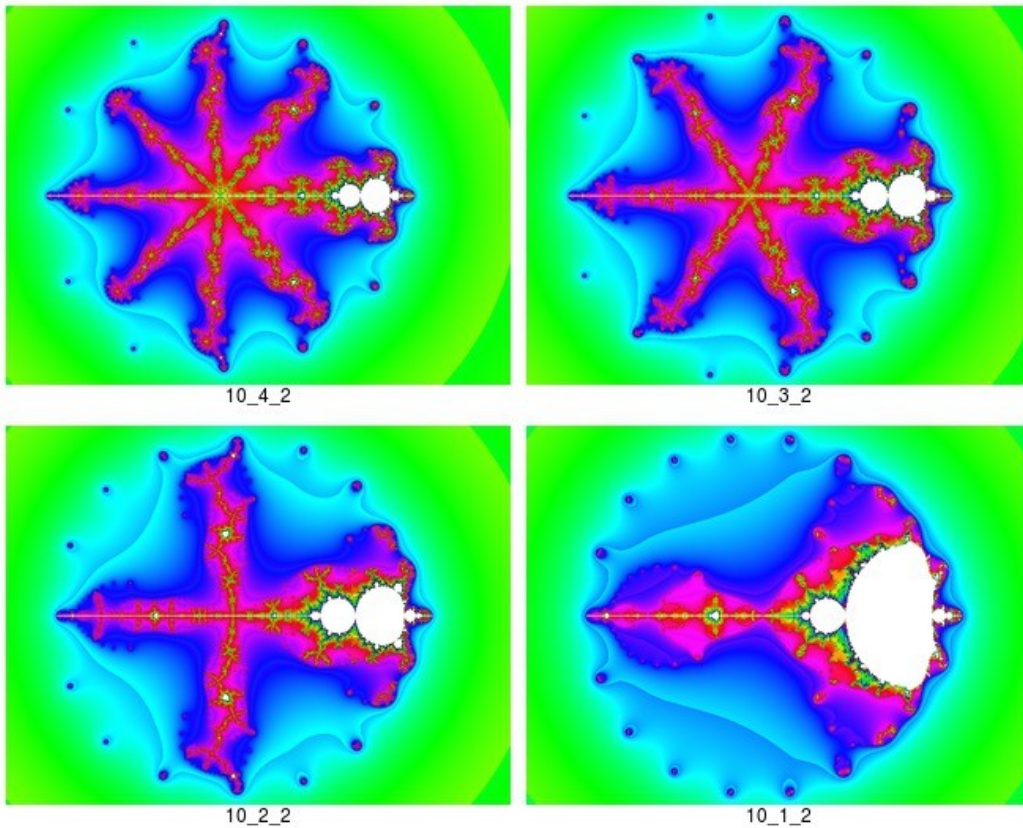
4.1. Exemple 1 : $p > 1, q = p - 1, r = 2$

Les images sont désignées par la valeur de p , le cas $p = 6$ correspondant au programme exemple. On obtient des étoiles de plus en plus grandes, le facteur de zoom ayant été progressivement réduit pour que toute l'étoile tienne sur la figure. Par comparaison, l'ensemble de Mandelbrot apparaît de plus en plus petit. Si l'on considère qu'il y a 2 branches horizontales, le nombre total de branches est égal à $2(p - 1)$.



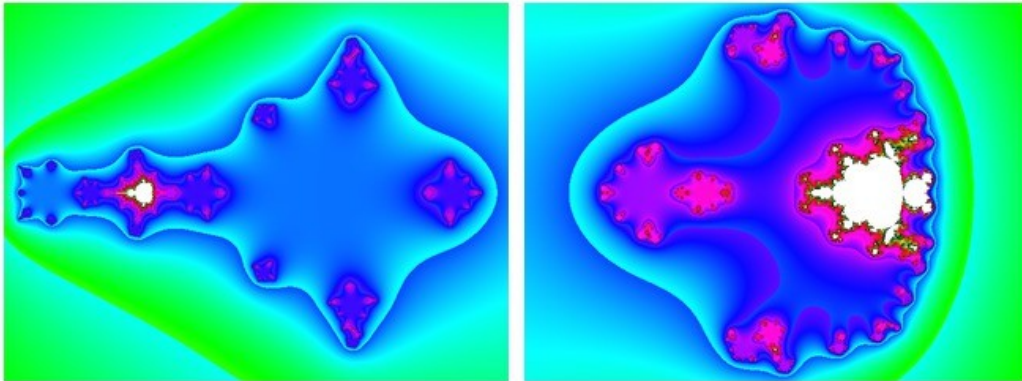
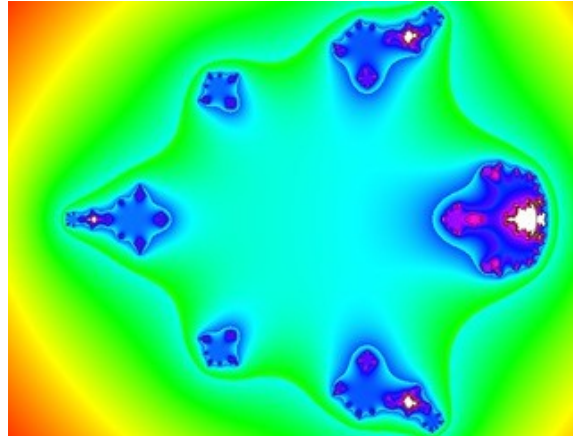
4.2. Exemple 2 : $p = 10, q < p, r = 2$

Les images sont désignées par les valeurs des 3 exposants sous la forme p_q_r . Lorsque q diminue, le nombre de branches diminue aussi et l'ensemble devient de plus en plus fragmenté.



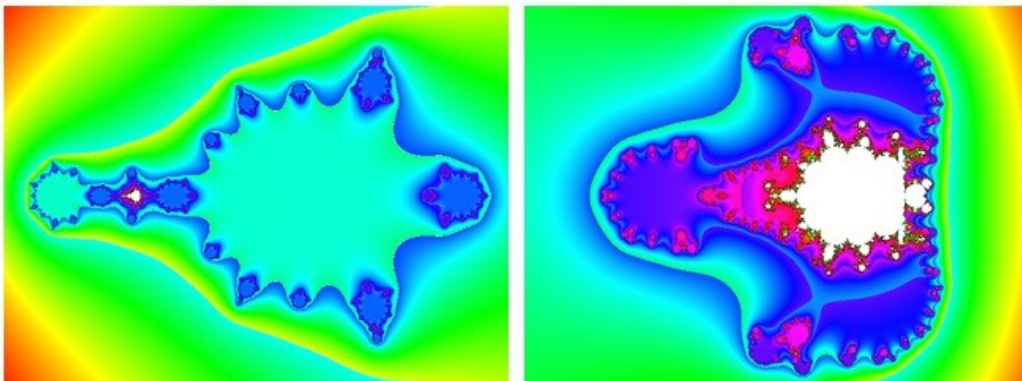
4.3. Exemple 3 : $p = 3, q = 2, r$ impair

Pour les valeurs impaires de l'exposant r , l'ensemble est formé de plusieurs fragments. Ici l'exemple avec $r = 3$, d'abord la vue d'ensemble puis les agrandissements des fragments « ouest » et « est » :



Alors que le mini-ensemble de Mandelbrot situé dans le fragment « ouest » conserve sa forme classique, celui du fragment « est » évoquerait plutôt, après une rotation convenable de l'image, un célèbre personnage de Walt Disney !

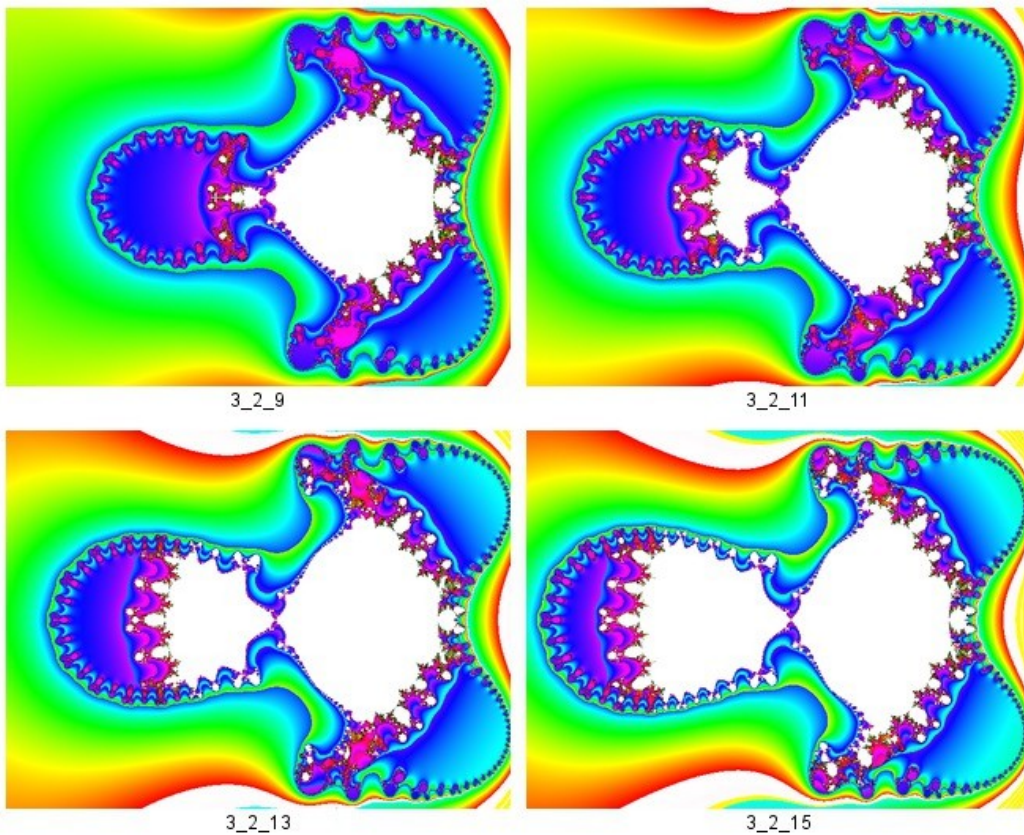
La fragmentation augmente avec la valeur de r . En témoignent ces images montrant les fragments « ouest » et « est » pour l'ensemble d'exposant $r = 5$:



Les images suivantes montrent l'expansion progressive du « Mickey fractal » dans la région « est » de l'ensemble, à mesure que le paramètre r augmente.

Remarquez que :

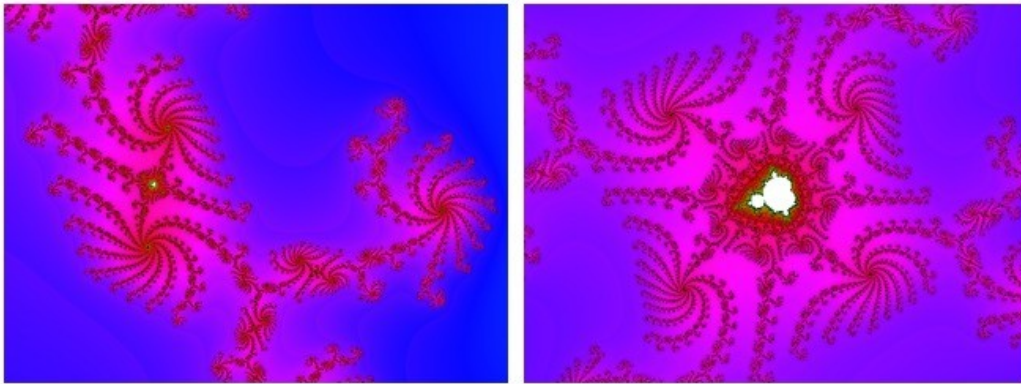
- les bandes blanches en périphérie sont des artefacts de la méthode de coloration ; elles ne font pas partie de l'ensemble de Mandelbrot ; on peut s'en rendre compte en traçant les images en noir et blanc (option `ColorFact = 0`)
- le facteur d'échelle a été ajusté pour compenser une légère diminution de taille de l'image lorsque r augmente.



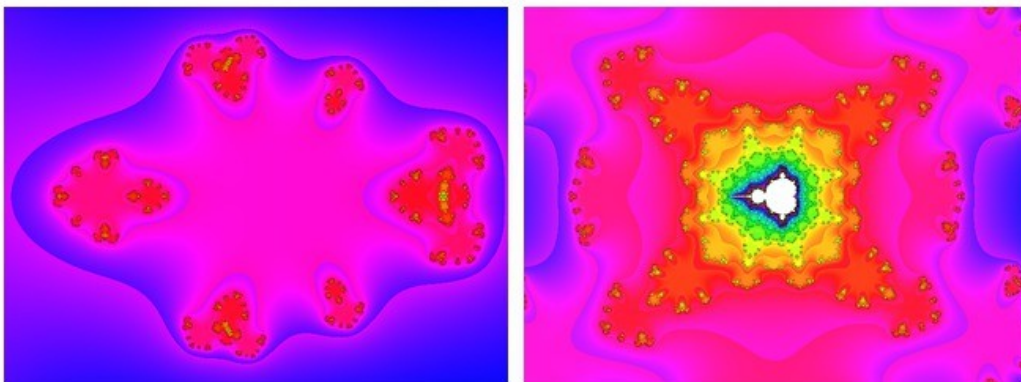
4.4. Quelques exemples supplémentaires

Nous montrons ici des agrandissements de quelques structures tirées des images précédentes :

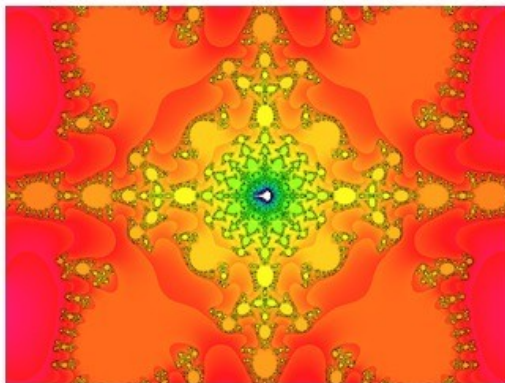
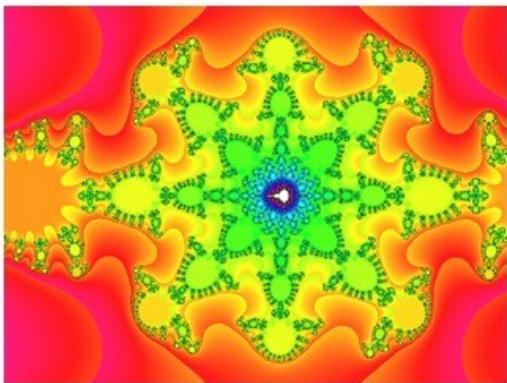
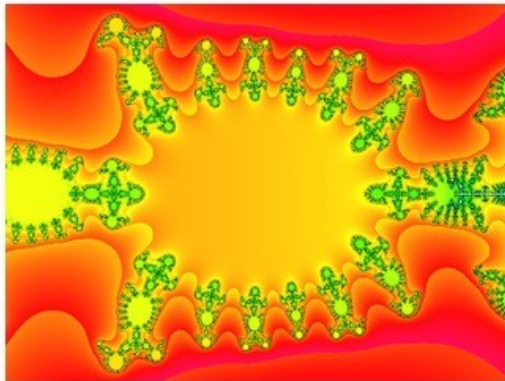
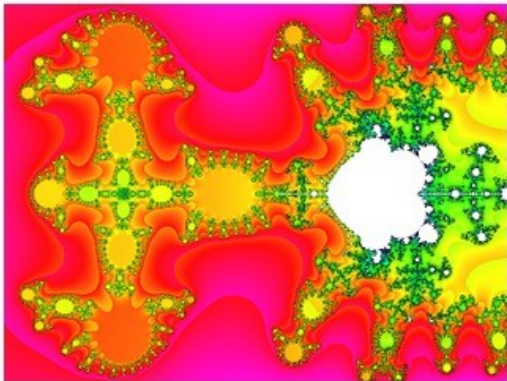
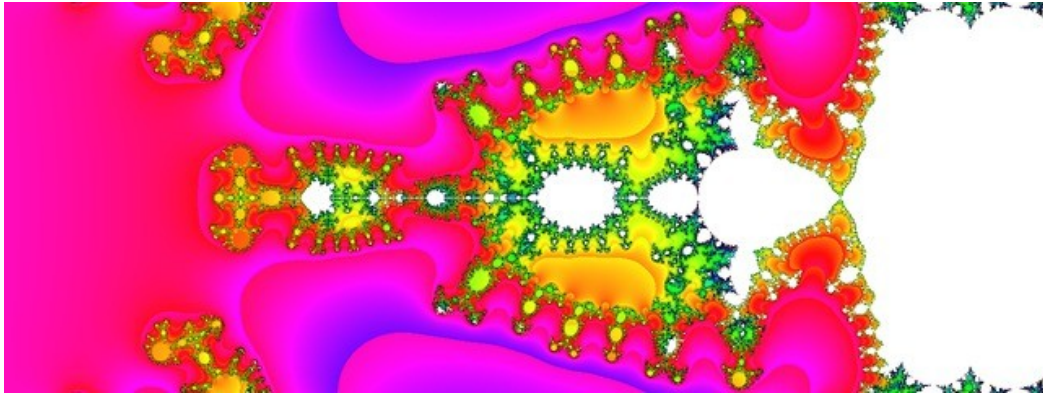
- un détail de l'expansion située au sommet de la partie principale de l'ensemble de Mandelbrot « étoilé » $p = 6, q = 5, r = 2$ (voir la figure page 2) avec un zoom sur le mini-ensemble situé au centre ; nous retrouvons ici l'universalité de l'ensemble de Mandelbrot classique $z^2 + c$, dont la forme se retrouve même dans des images issues d'équations très différentes.



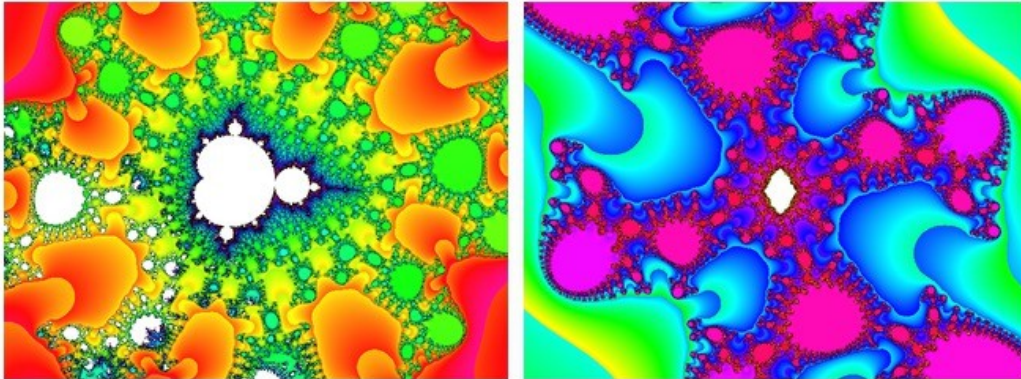
- la structure située juste à l'« ouest » du « Mickey fractal » de l'ensemble $p = 3, q = 2, r = 3$ (voir la deuxième image en haut de la page 15), et un mini-ensemble de Mandelbrot situé dans cette structure.



- une série d'agrandissements de l'extrémité « ouest » du « Mickey fractal » pour l'ensemble $p = 3$, $q = 2$, $r = 7$, avec deux mini-ensembles de Mandelbrot.



- un mini-ensemble de Mandelbrot tiré de l'ensemble $p = 3, q = 2, r = 15$, et un ensemble de Julia issu de la même région. La forme classique du mini-ensemble, au sein des structures irrégulières qui l'entourent, témoigne là encore de l'universalité de l'ensemble de Mandelbrot.



5. Conclusion

La formule étudiée dans cet article génère des images très intéressantes, dont les étonnants ensembles « étoilés ». La présence de trois exposants p, q, r donne accès à une grande variété graphique.

6. Références

- Le blog d'[Element90](#). L'auteur propose de nombreuses images ainsi que des logiciels *freeware* permettant de les reproduire.
- [Fractalforums](#) : ce site présente régulièrement de nouvelles formules, dont celle étudiée ici.