

Des fractales en *Crocodile BASIC* (VII)

1. Introduction

Nous étudierons dans cet article les ensembles de Mandelbrot et de Julia générés par la fonction suivante :

$$f(z) = c \left[(z + k)^p + \frac{1}{(z + k)^q} \right]$$

où p et q sont des exposants entiers ($p > 1, q > 0$) et c et k sont complexes.

Cette fonction a été proposée sur le site [Fractalforums](#) par « element90 ». Les images de cet article ont été générées par le programme **mandelinv1**.

2. Aspects théoriques

2.1. Les points critiques

Les points critiques sont les solutions de l'équation :

$$f'(z) = c \left[p(z + k)^{p-1} - \frac{q}{(z + k)^{q+1}} \right] = 0$$
$$z = \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{p+q}} - k$$

2.2. Itérations, estimateur de distance et *continuous dwell*

Avec les méthodes vues dans les articles précédents, on obtient :

- **pour les itérations :**

$$z_n = c \left[(z_{n-1} + k)^p + \frac{1}{(z_{n-1} + k)^q} \right] = c \cdot g(z_{n-1})$$

avec $z_0 = (q/p)^{1/(p+q)} - k$ pour Mandelbrot et $z_0 = z_{\text{pixel}}$ pour Julia.

- **pour la dérivée :**

Nous dérivons par rapport à c , k étant constant :

$$z'_n = g(z_{n-1}) + c \cdot g'(z_{n-1})$$

$$g'(z_{n-1}) = \left[p(z_{n-1} + k)^{p-1} - \frac{q}{(z_{n-1} + k)^{q+1}} \right] z'_{n-1}$$

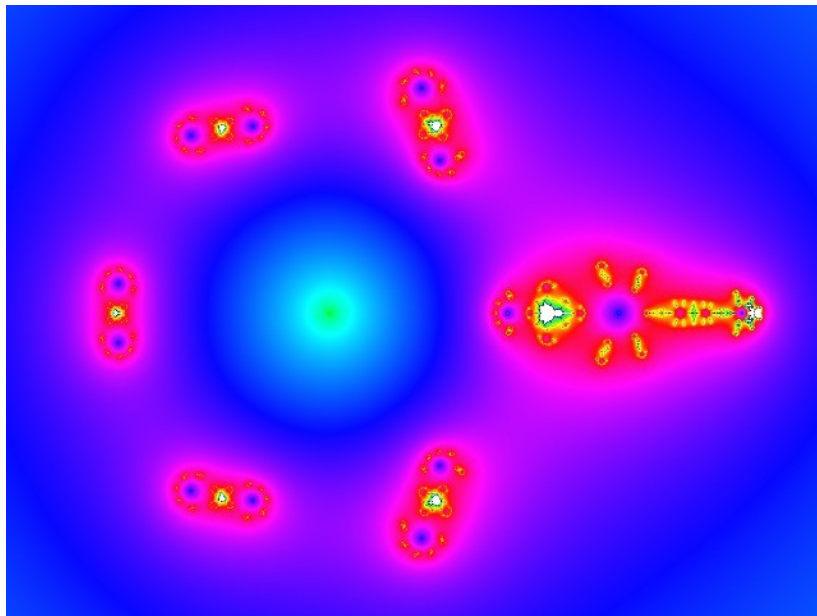
Pour l'ensemble de Julia, c est constant donc le terme $g(z_{n-1})$ disparaît dans la dérivée, et $z'_0 = 1$.

Nous pouvons alors utiliser les formules vues dans les articles précédents pour calculer l'estimateur de distance et le *continuous dwell*.

3. Le programme : mandelinv1.bas

Le programme reprend l'organisation décrite dans les précédents articles. Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension **.inv1**

Avec l'exemple par défaut ($p = q = 6$, $k = 2$), l'image obtenue est la suivante :



4. Les algorithmes

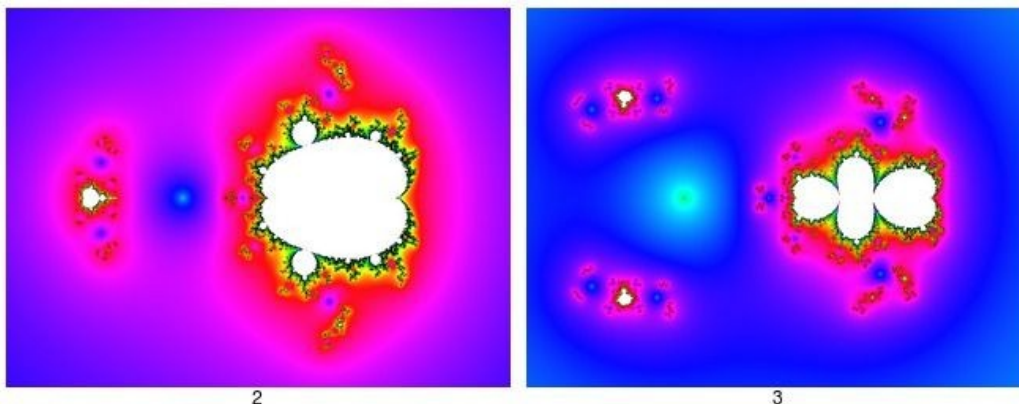
Les algorithmes ont été décrits dans les articles précédents. On a juste ajouté dans la procédure `mdbc01` un test sur la valeur de $|z'_n|$ (variable `mdz`) car la dérivée peut devenir nulle pour les points très éloignés de l'ensemble de Mandelbrot.

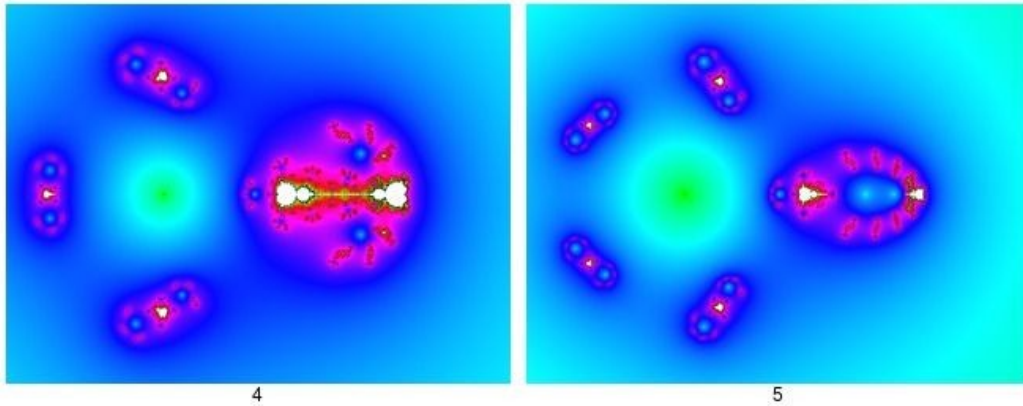
5. Exemples

Nous présentons ici quelques images des ensembles de Mandelbrot obtenus pour différentes valeurs des exposants p , q et de la constante k .

5.1. Exemple 1 : $p = q, k = 2$

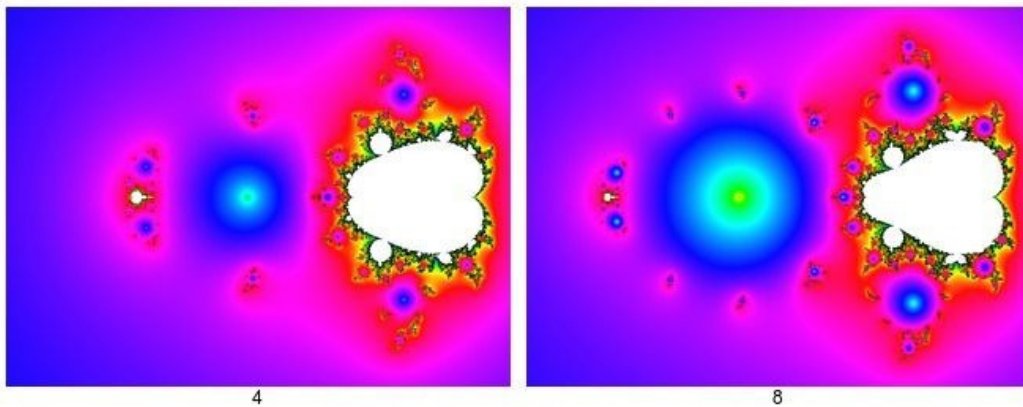
Ici les images sont identifiées par les valeurs de p , le cas $p = 6$ correspondant au programme `exemple`. L'ensemble de Mandelbrot est éclaté en p fragments disposés autour d'un disque central. Le fragment principal se trouve à l'est et contient des mini-ensembles plus ou moins déformés. Les autres fragments contiennent des mini-ensembles d'aspect classique.

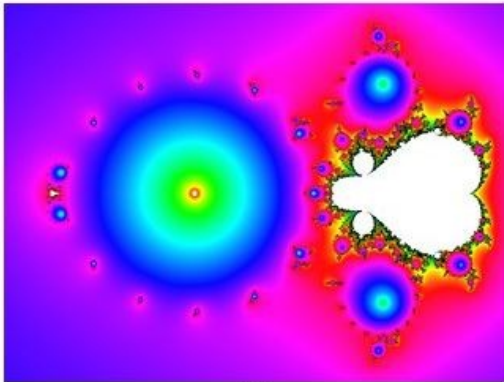




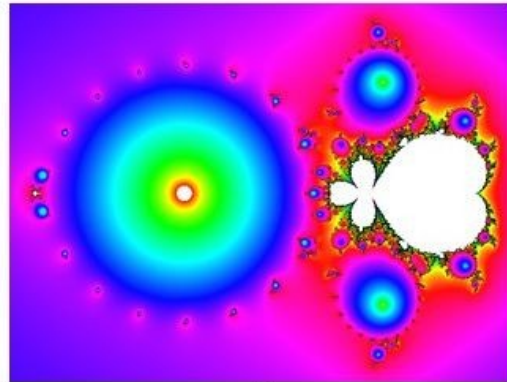
5.2. Exemple 2 : $p = 2, q > 1, k = 2$

Ici les images sont identifiées par la valeur de q . On observe un disque central dont le rayon augmente avec q . La partie principale de l'ensemble de Mandelbrot est située à l'est. Une partie beaucoup plus petite et d'aspect classique se trouve à l'ouest. Autour du disque se trouvent de multiples fragments contenant aussi des mini-ensembles, visibles uniquement aux forts grossissements.





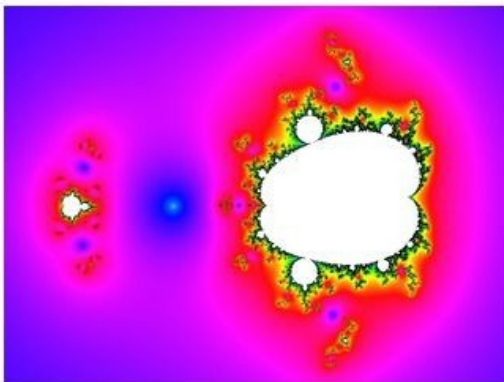
12



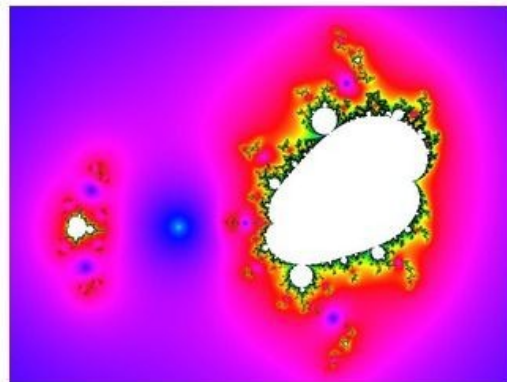
16

5.3. Exemple 3 : $p = q = 2, k = 2 + y.i$

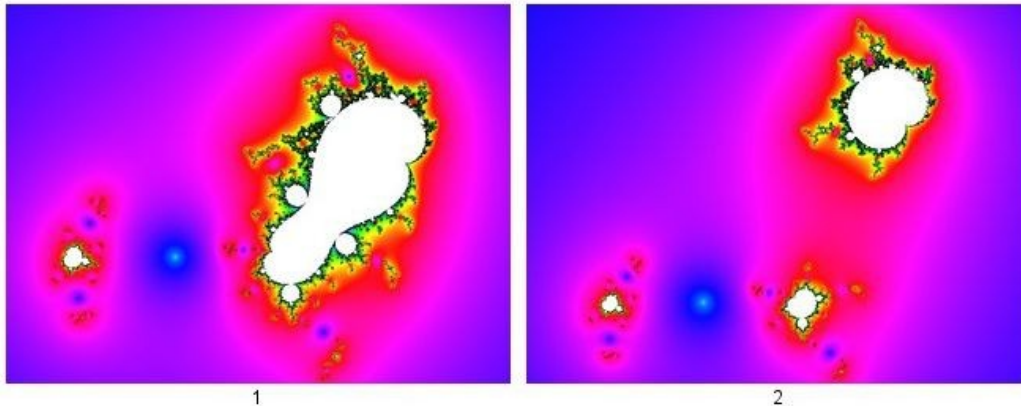
Les images montrent la déformation progressive des ensembles lorsque la partie imaginaire de la constante k augmente (ici $y = 0,1 ; 0,5 ; 1 ; 2$). Notez la perte de la symétrie par rapport à Ox .



01



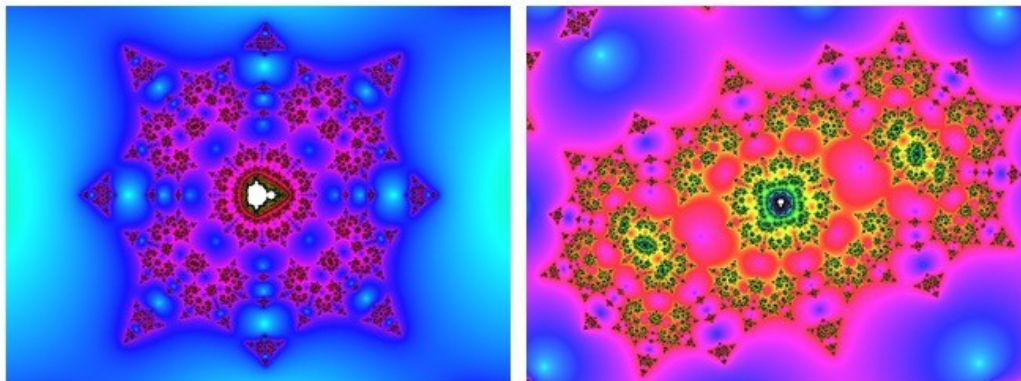
05



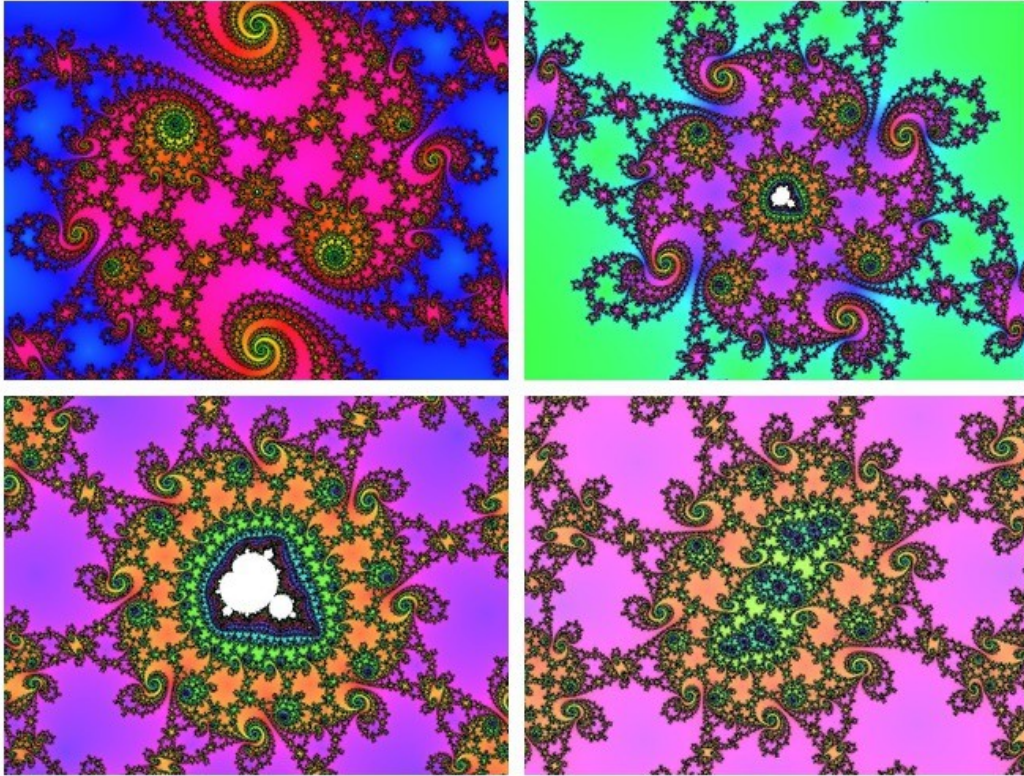
5.4. Quelques exemples supplémentaires

Nous montrons ici des agrandissements de quelques structures tirées des images précédentes :

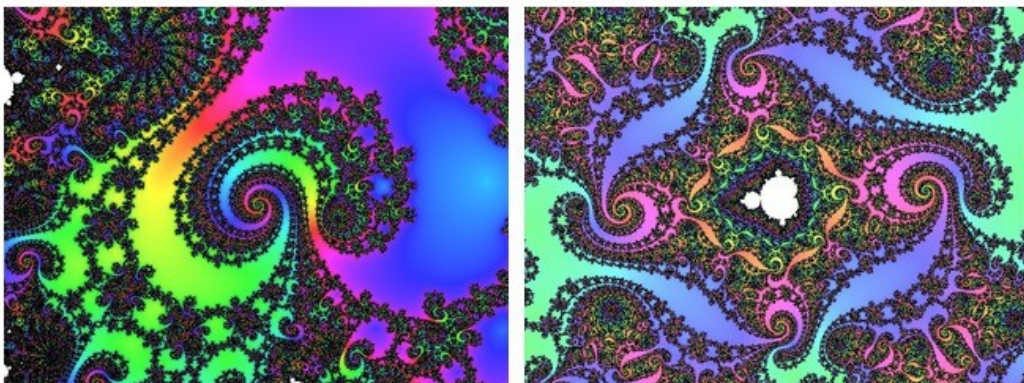
- un mini-ensemble de Mandelbrot d'aspect classique dans l'ensemble de paramètres $p = q = k = 2$, et un *Embedded Julia Set* (EJS) situé à proximité du mini-ensemble.



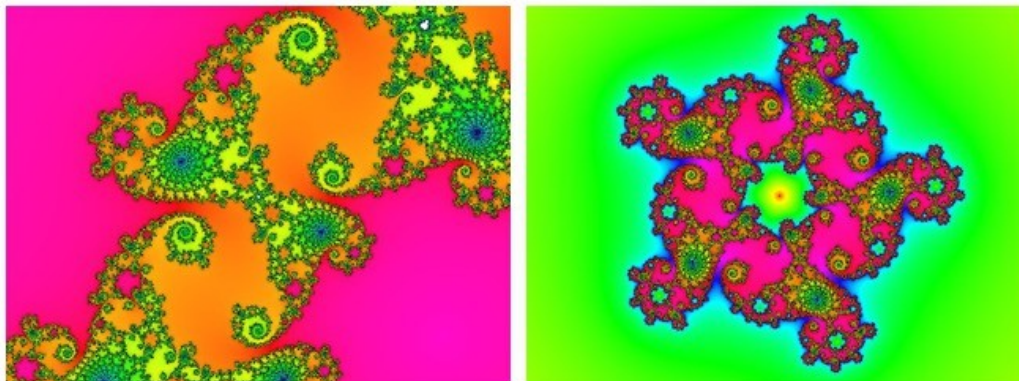
- des agrandissements successifs dans la vallée "est" de l'ensemble de paramètres $p = q = 3$, $k = 2$, aboutissant à un mini-ensemble de Mandelbrot et un EJS.



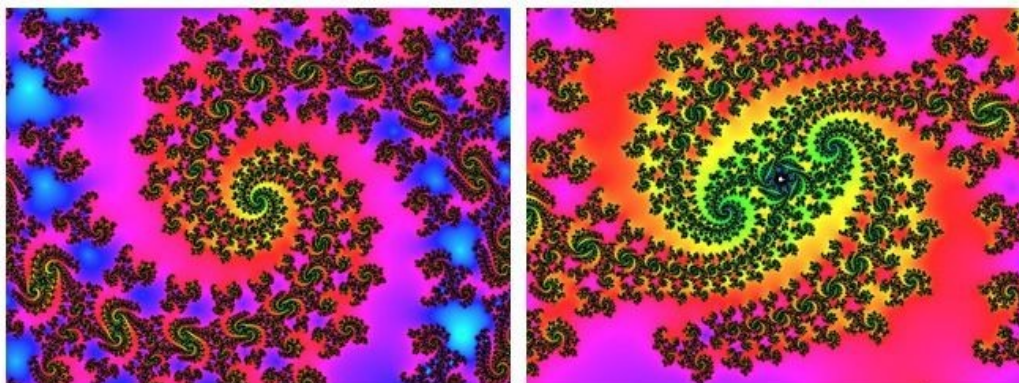
- une double spirale et un mini-ensemble de Mandelbrot dans l'ensemble de paramètres $p = q = 4, k = 2$. L'espace est plutôt encombré ici !

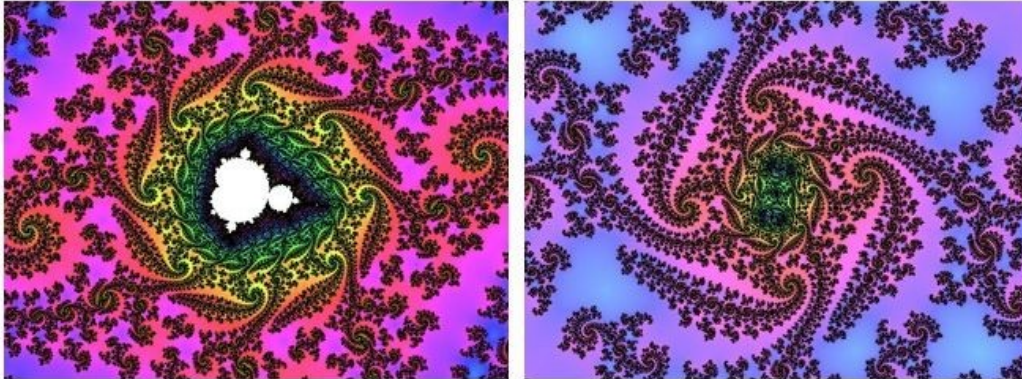


- des spirales dans l'ensemble de paramètres $p = q = 5, k = 2$. La deuxième image est un ensemble de Julia issu de la même région : remarquez la symétrie d'ordre 5.



- le dernier exemple est une série d'agrandissements dans la partie "nord" de l'ensemble à constante complexe $k = 2 + 2i$ avec $p = q = 2$ (voir paragraphe 5.3, image "2"). On y trouve un mini-ensemble de Mandelbrot et un EJS situé à proximité du mini-ensemble.





6. Conclusion

Tout comme la formule étudiée dans l'article précédent, celle-ci donne accès à une grande variété d'images par le biais des paramètres p , q et k .

7. Références

- Le blog d'[Element90](#). L'auteur propose de nombreuses images ainsi que des logiciels *freeware* permettant de les reproduire.
- [Fractalforums](#) : ce site présente régulièrement de nouvelles formules, dont celle étudiée ici.