

# Des fractales en *Crocodile BASIC* (VI)

## 1. Introduction

Nous décrivons ici les ensembles de Mandelbrot et de Julia d'équation  $z^p + c$ , avec  $p$  un exposant complexe. Les images sont tracées par le programme **mandelcomp**.

## 2. Aspects théoriques et graphiques

Le cas des exposants entiers ou réels ayant été traité dans les deux premiers articles de cette série, nous n'envisagerons ici que les exposants complexes.

Posons  $z = R e^{i\theta}$  et  $p = m + ki$  avec  $m > 1$ . On a :

$$z^p = e^{p \ln z}$$

$$\ln z = \ln R + i\theta \quad \text{avec } \theta \in ]-\pi, \pi]$$

Remarquez que l'on ne prend que la partie principale du logarithme, ce qui se traduira par des discontinuités sur les figures, comme c'était le cas avec les exposants réels (voir article n° 2).

On en déduit :

$$p \ln z = (m + ki)(\ln R + i\theta) = (m \ln R - k\theta) + i(k \ln R + m\theta)$$

$$z^p = e^{m \ln R - k\theta} e^{i(k \ln R + m\theta)}$$

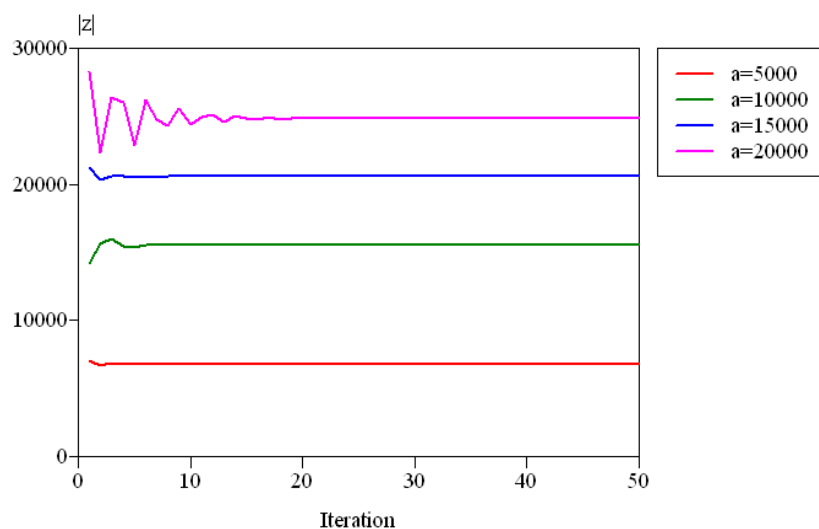
D'où :

$$|z^p| = R^m e^{-k\theta}$$

Si le produit  $k\theta$  est positif le terme exponentiel tend à faire diminuer le module de  $z^p$ , de sorte que le point pourra rester à l'intérieur de l'ensemble de Mandelbrot, même avec un module initial  $R$  relativement élevé.

A titre d'exemple, pour l'exposant  $p = 2 + 5i$  (soit  $k = 5$ ), nous avons représenté l'évolution du module de  $z$  au cours des 50 premières itérations, pour des points  $c$  tels que  $c = a(-1+i)$ . Le module et l'argument de  $c$  sont  $|c| = a\sqrt{2}$  et  $\theta = 3\pi/4$  ; la valeur initiale de  $e^{-k\theta}$  est donc  $e^{-15\pi/4} \approx 7,65 \cdot 10^{-6}$ , soit un effet réducteur très

important. De fait, on constate que même pour des valeurs très élevées de  $a$ , de l'ordre de  $10^4$ , la suite tend vers une valeur limite et donc le point  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot. Ce dernier aura donc une extension spatiale bien plus importante que si la partie imaginaire de l'exposant avait été nulle (voir figure "5" au paragraphe 4.2).



- Si  $k$  est positif, l'ensemble de Mandelbrot va se développer principalement dans le deuxième quadrant (nord-ouest,  $\pi/2 < \theta < \pi$ ), qui correspond aux plus fortes valeurs positives de  $\theta$ .
- Si  $k$  est négatif, l'ensemble de Mandelbrot va se développer principalement dans le troisième quadrant (sud-ouest,  $-\pi < \theta < -\pi/2$ ), qui correspond aux valeurs les plus négatives de  $\theta$ .

Ces résultats indiquent aussi que nous devons donner une valeur élevée au rayon d'échappement pour qu'il reste toujours supérieur à la limite atteinte par le module de  $z$  lorsque le point se trouve dans l'ensemble de Mandelbrot. Ceci n'est pas gênant car une forte valeur de ce paramètre est également requise pour pouvoir calculer l'estimateur de distance, utilisé pour la coloration des images. Ici le rayon d'échappement a été fixé à  $10^{10}$ .

### 3. Le programme : mandelcomp.bas

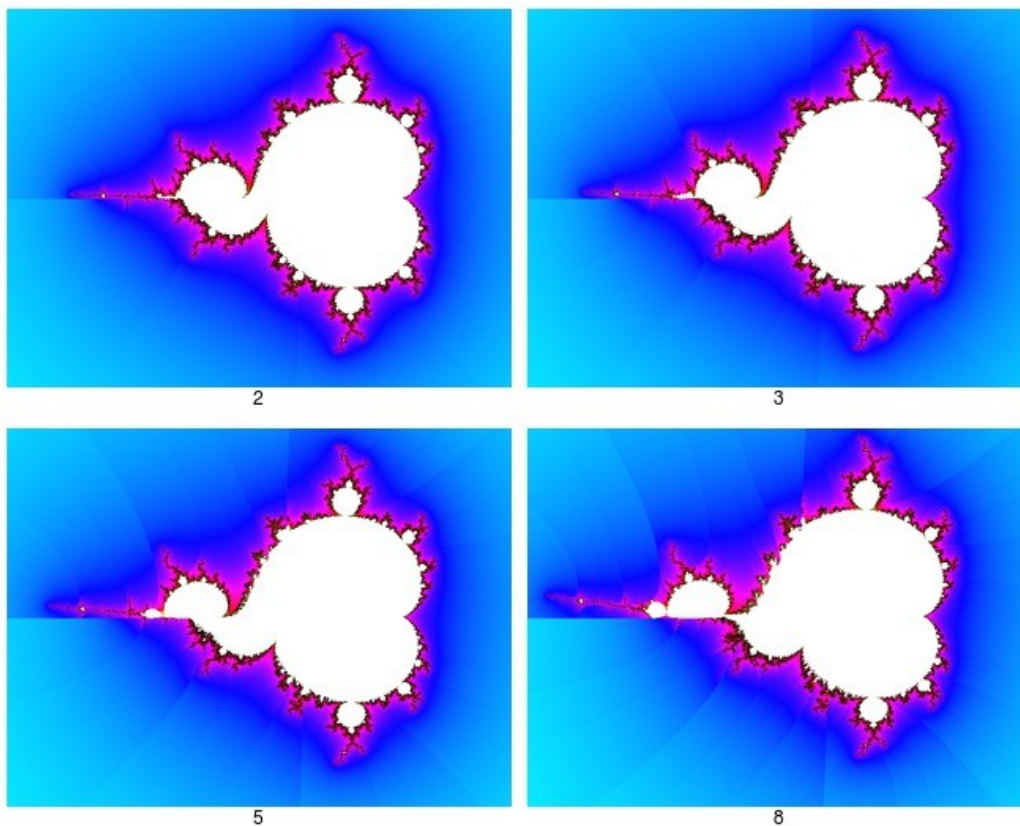
Le programme reprend l'organisation décrite dans les précédents articles. Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension `.comp`

### 4. Exemples

Nous présentons ici quelques images des ensembles de Mandelbrot obtenus pour différentes valeurs de l'exposant complexe.

#### 4.1. Exemple 1 : $p = 2 + \varepsilon i$ , $\varepsilon \ll 1$

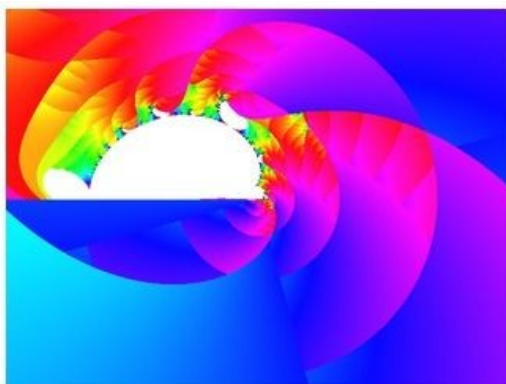
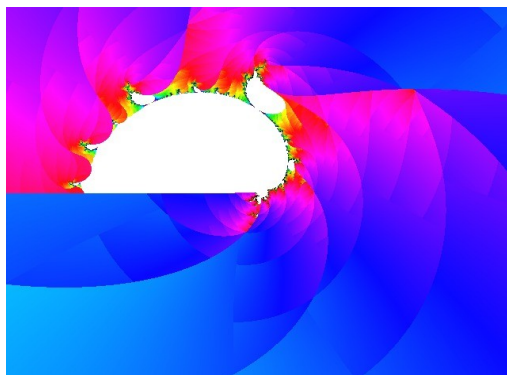
On voit ici la déformation progressive de l'ensemble de Mandelbrot lorsqu'on augmente progressivement la partie imaginaire, qui reste toutefois très en-dessous de 1. Les images sont désignées par la valeur de la partie imaginaire exprimée en centièmes, p. ex.  $\varepsilon = 0,02$  pour l'image "2".



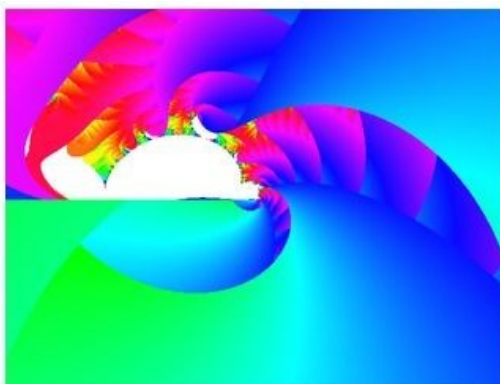
Les déformations deviennent très importantes ; l'ensemble paraît écartelé en direction du deuxième quadrant. Dans le même temps il apparaît des discontinuités, traduisant le fait que la fonction puissance complexe est une fonction à valeurs multiples.

#### 4.2. Exemple 2 : $p = 2 + k i, k \geq 1$

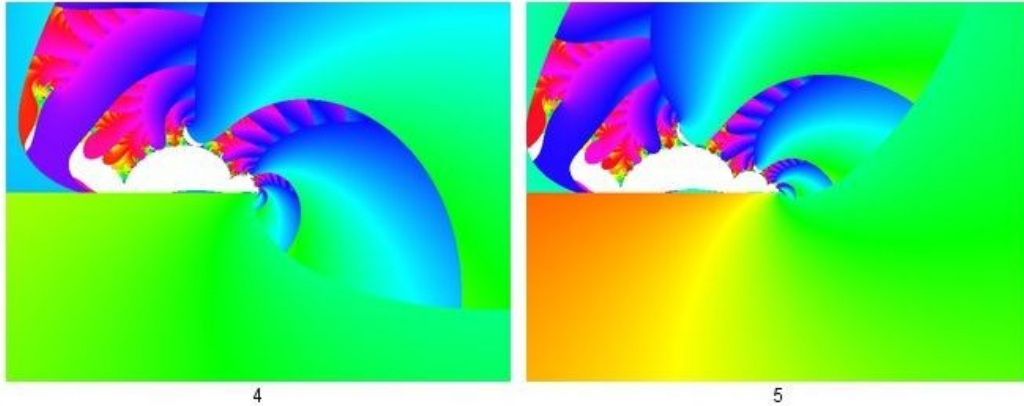
La première image correspond à  $k = 1$ . Les suivantes sont étiquetées par la valeur de  $k$ . Elles sont toutes centrées en  $(0, 0)$  et l'échelle a été ajustée pour que l'ensemble de Mandelbrot figure tout entier sur le graphique.



2



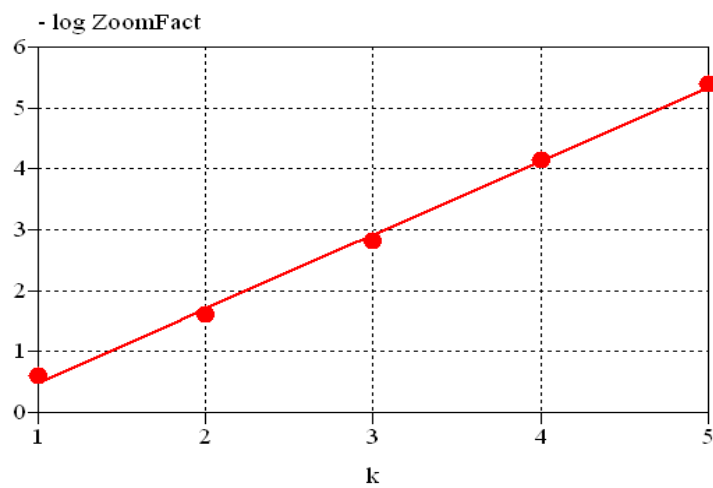
3



Les valeurs du paramètre ZoomFact sont les suivantes :

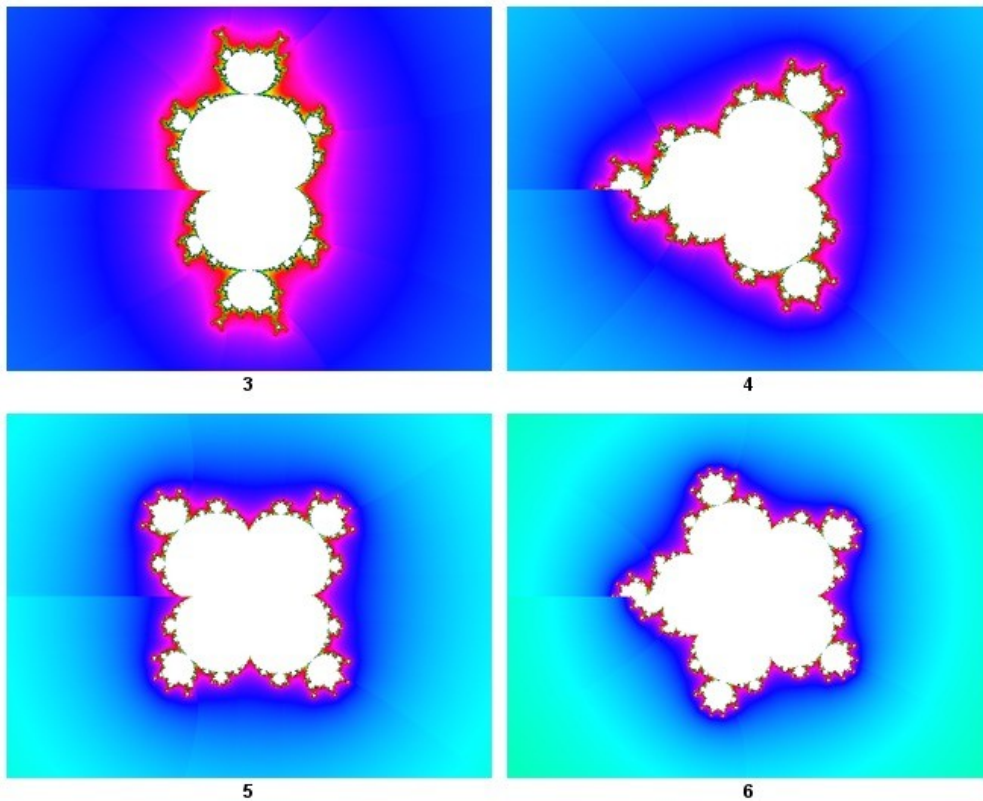
- $k = 1$  : ZoomFact = 0,25
- $k = 2$  : ZoomFact = 0,025
- $k = 3$  : ZoomFact = 0,0015
- $k = 4$  : ZoomFact = 0,00007
- $k = 5$  : ZoomFact = 0,000004

Comme le montre le graphique suivant, la surface occupée par l'ensemble (inversement proportionnelle à ZoomFact) augmente de façon pratiquement exponentielle :



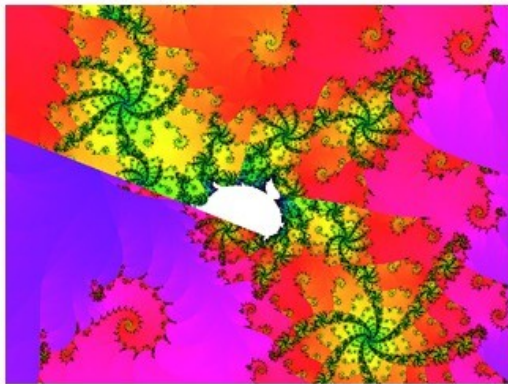
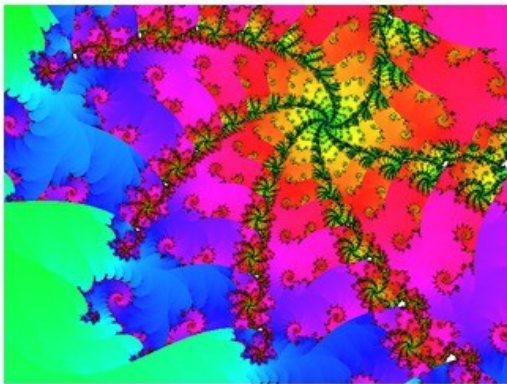
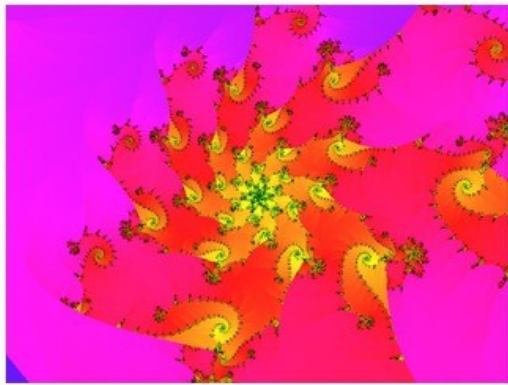
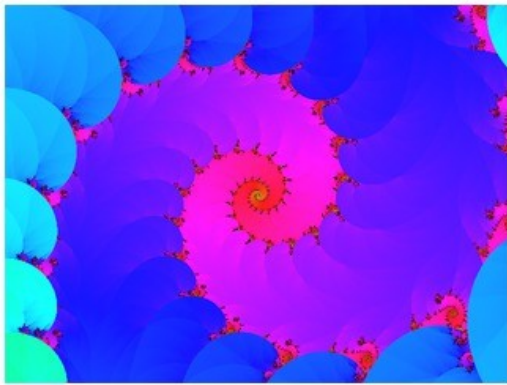
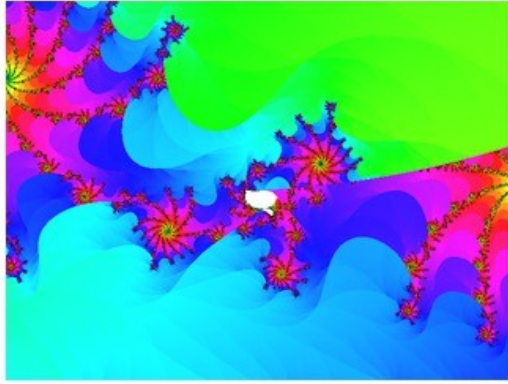
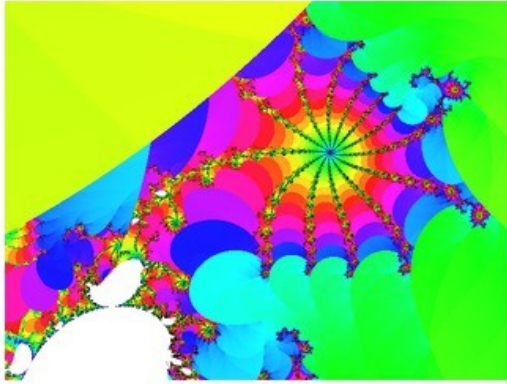
### 4.3. Exemple 3 : $p = m + 0,1 i$ ( $m$ entier)

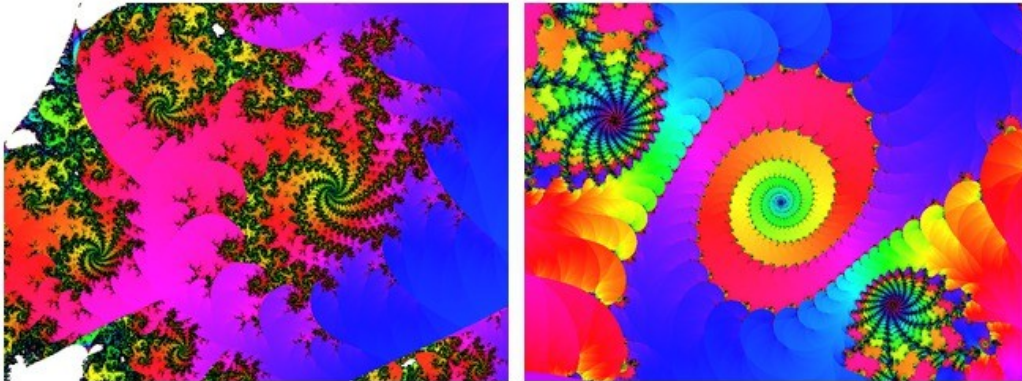
Les images (repérées par la valeur de  $m$ ) montrent les déformations subies par les ensembles "multibrot" lorsque la partie réelle de l'exposant augmente. On constate que les ensembles à exposant pair, qui ont un lobe selon les  $x$  négatifs, sont les plus affectés.



### 4.4. Quelques exemples supplémentaires

Nous montrons ici quelques agrandissements réalisés dans les "vallées" proches du "bourgeon" le plus important de l'ensemble d'exposant  $p = 2 + i$  (voir la première figure du paragraphe 4.2). Notez que la dernière image est un ensemble de Julia.





## **5. Conclusion**

Cette incursion dans le domaine peu exploré des ensembles de Mandelbrot à exposant complexe nous a révélé des propriétés nouvelles, notamment l'augmentation quasi-exponentielle de la taille des ensembles lorsque la partie imaginaire de l'exposant augmente.