Des fractales en *Crocodile BASIC* (V)

1. Introduction

Nous étudierons dans cet article les ensembles de Mandelbrot et de Julia générés par la fonction « inverse » :

$$f(z) = z^p + \frac{c}{z^q} + k$$

où p et q sont des exposants entiers ($p > 1$, $q > 0$) et c et k sont complexes.

Les images illustrant cet article ont été tracées par le programme **`mandelinv`**.

2. Aspects théoriques et graphiques

2.1. Les points critiques

Les points critiques sont les solutions de l'équation :

$$f'(z) = pz^{p-1} - c\frac{q}{z^{q+1}} = 0$$

$$z = \left(\frac{q}{p}c\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

Si c est complexe, on a $(p + q)$ points critiques. Cependant, on montre qu'ils donnent la même image ; on peut donc choisir un point quelconque.

Notez aussi que le point critique dépend de c, ce qui n'était pas le cas avec les fonctions précédentes.

2.2. Itérations, estimateur de distance et *continuous dwell*

Avec les méthodes vues dans les articles précédents, on obtient :

- **pour les itérations** :

$$z_n = (z_{n-1})^p + \frac{c}{(z_{n-1})^q} + k$$

avec $z_0 = (q\,c\,/\,p)^{1\,/\,(p\,+\,q)}$ pour Mandelbrot et $z_0 = z_{\text{pixel}}$ pour Julia

- **pour la dérivée** :

Nous dérivons par rapport à c, k étant constant. D'autre part, pour l'ensemble de Mandelbrot, z_0 dépend de c donc nous devons aussi dériver z_0 par rapport à c :

$$z'_n = \left[p \cdot (z_{n-1})^{p-1} - c \cdot \frac{q}{(z_{n-1})^{q+1}}\right] z'_{n-1} + \frac{1}{(z_{n-1})^q}$$

$$z'_0 = \left(\frac{1}{p+q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p}c\right)^{\frac{1}{p+q}-1} = \frac{z_0}{(p+q)c}$$

Pour l'ensemble de Julia, c est constant donc le terme $1\,/\,(z_{n-1})^q$ disparaît dans la dérivée, et $z'_0 = 1$.

Nous pouvons alors utiliser les formules vues dans les articles précédents pour calculer l'estimateur de distance et le *continuous dwell*.

2.3. Symétrie par rapport à Ox

On montre que :

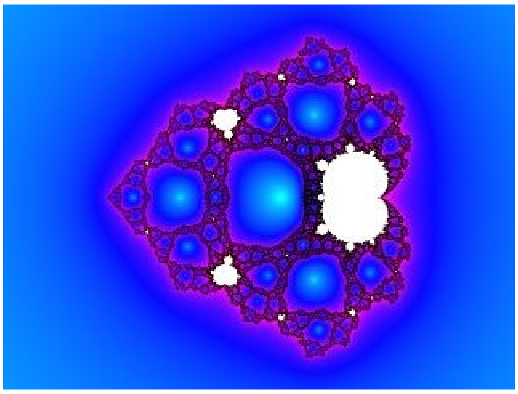
- l'ensemble de Mandelbrot est symétrique si k est réel
- l'ensemble de Julia est symétrique si c et k sont réels

3. Les ensembles de Mandelbrot

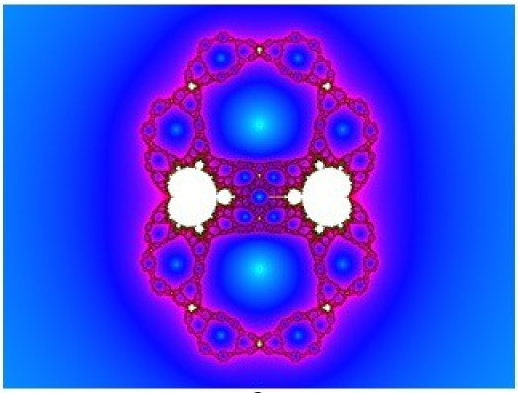
Les images montrent une infinité de domaines, ressemblant plus ou moins à l'ensemble classique de Mandelbrot. Ces domaines sont connectés par un réseau de filaments présents à toutes les échelles.

<u>3.1. Cas 1</u> : $p = q$, $k = 0$

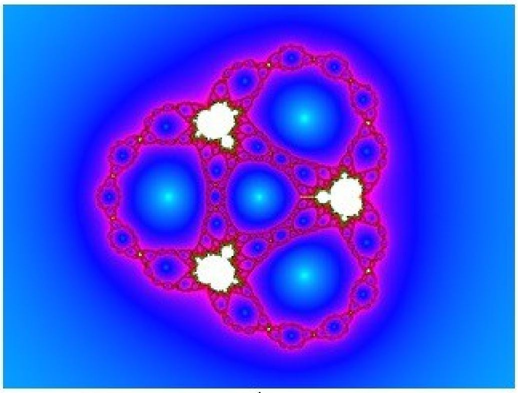
La valeur $p = 2$ donne une image spécifique, où le domaine principal (en blanc à droite) diffère de l'ensemble classique :



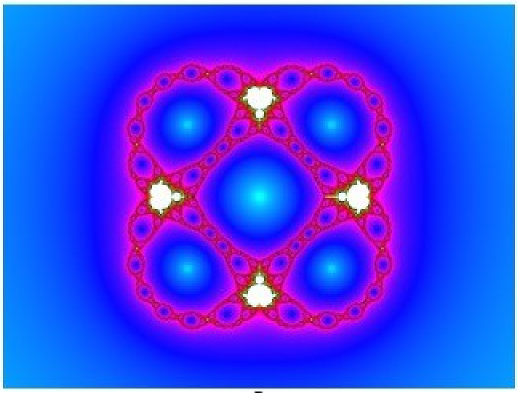
Les autres valeurs de p donnent des structures plus régulières, montrant $(p - 1)$ mini-ensembles de Mandelbrot et une symétrie d'ordre $(p - 1)$. Ici les images sont identifiées par les valeurs de p :



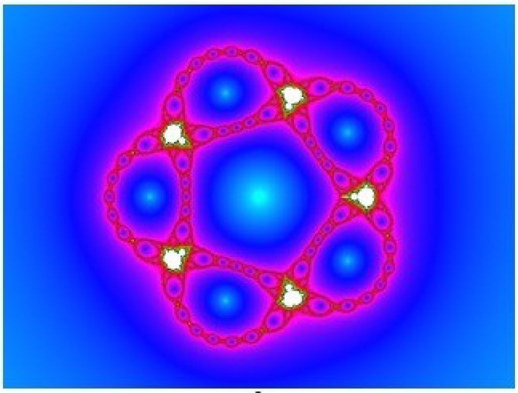
3



4



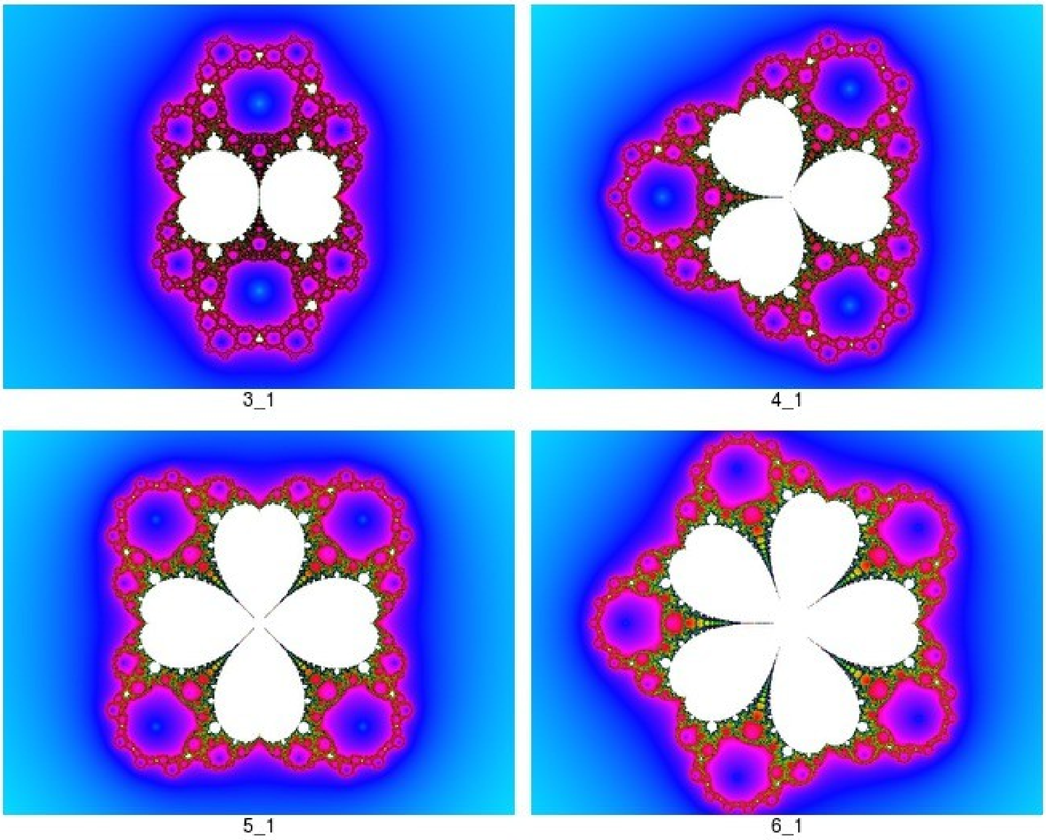
5



6

3.2. Cas 2 : $p \neq q$, $k = 0$

Quand $p > 2$ et $q = 1$, les principaux mini-ensembles de Mandelbrot fusionnent en une structure unique ayant $(p - 1)$ lobes et montrant une symétrie d'ordre $(p - 1)$. Ici les images sont identifiées par les valeurs de p et q.

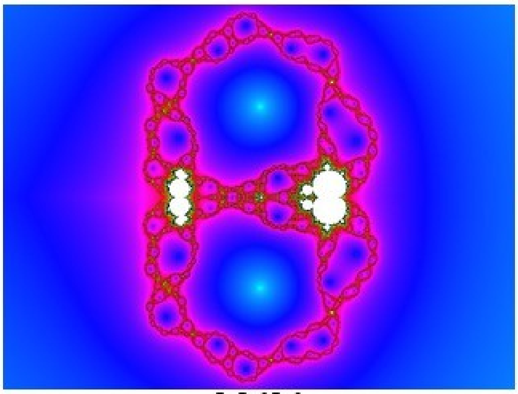


En augmentant q au-delà de 1 tout en gardant p constant on retrouve l'aspect original des mini-ensembles, mais la taille de l'image diminue.

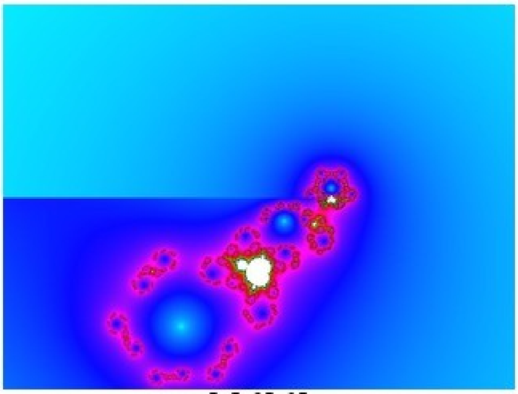
3.3. Cas 3 : $k \neq 0$

- Si k est réel, la symétrie d'ordre $(p - 1)$ disparaît tandis que l'ensemble change de forme et de taille.
- Si k est complexe, on perd la symétrie par rapport à Ox et une discontinuité apparaît sur l'axe des Ox négatifs.

Exemples :



5_5_05_0



5_5_05_05

5_5_05_0 : $p = 5$, $q = 5$, $k = (0.5, 0)$
5_5_05_05 : $p = 5$, $q = 5$, $k = (0.5, 0.5)$

4. Les ensembles de Julia

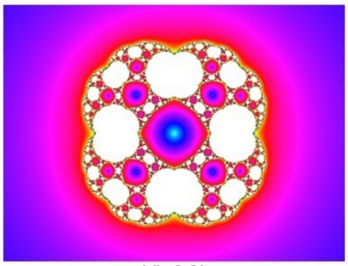
Pour ces ensembles, le paramètre c est constant et la fonction peut s'exprimer comme somme de deux termes :

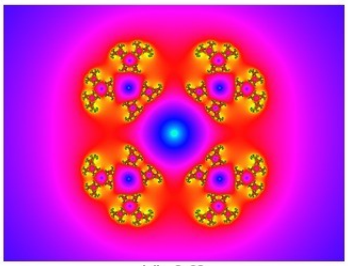
$$f(z) = (z^p + k) + \left(\frac{c}{z^q}\right)$$

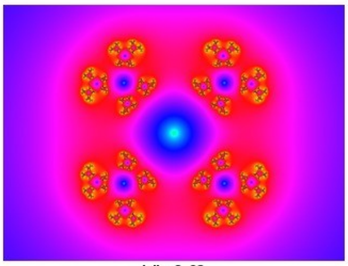
Le terme $(z^p + k)$ définit un ensemble « multibrot » de paramètre k (voir article II). Si le module de c est assez petit, l'ensemble « inverse » peut être considéré comme une perturbation de l'ensemble « multibrot ». Si ce dernier est connecté, la perturbation se traduira par une fragmentation de l'ensemble.

Exemple 1 :

Si $p = q = 2$ et $k = 0$, l'ensemble de Julia « multibrot » serait un disque. L'ajout du terme (c / z^q) avec des valeurs croissantes de c va rendre le disque de plus en plus fragmenté. Ici $c = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$:

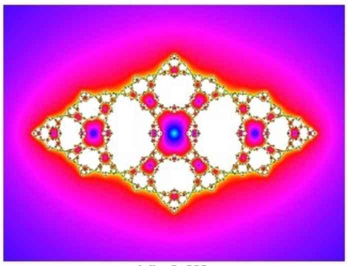

julia_2_01

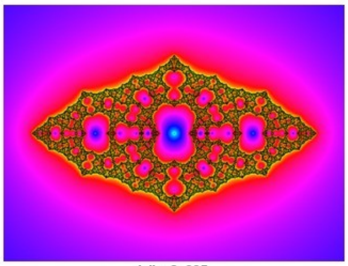

julia_2_02

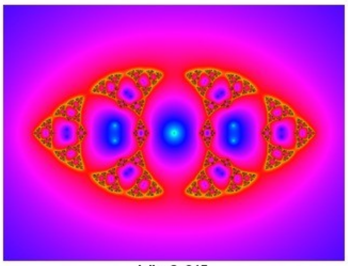

julia_2_03

Exemple 2 :

Si $p = q = 2$ et $k = (-0.75, 0)$, l'ensemble de Julia « multibrot » a été montré au chapitre I, image **`julia_2_a`**. Les images suivantes montrent la fragmentation progressive de l'ensemble, pour c = 0,03 ; 0,05 ; 0,15 :


julia_2_003


julia_2_005


julia_2_015

5. Le programme : `mandelinv.bas`

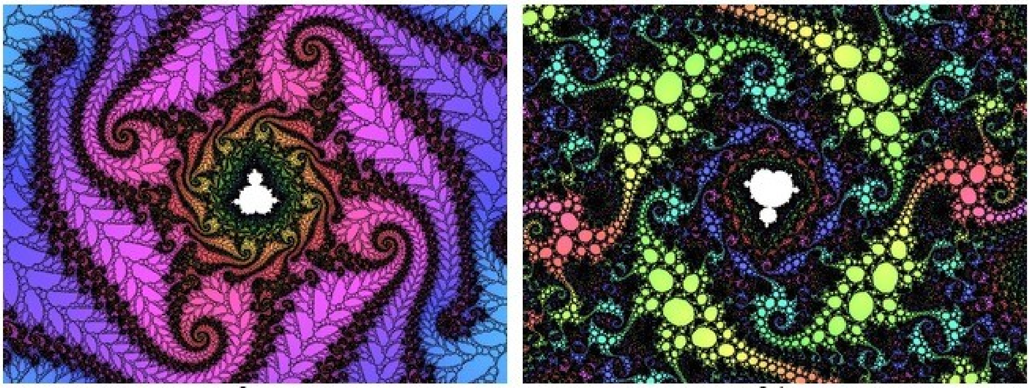
Le programme reprend l'organisation décrite dans les précédents articles. Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension **`.inv`**
Le programme **`clover.bas`** est un cas particulier de **`mandelinv`**. Il dessine le « trèfle à quatre feuilles fractal » (voir § 3.2, figure 5_1) mais ne fait pas de sauvegarde.

6. Quelques exemples supplémentaires

Ces exemples sont tirés des ensembles de Mandelbrot et de Julia avec différents exposants. Comme d'habitude, les noms des images correspondent aux noms des fichiers de paramètres fournis avec le logiciel.

6.1. Ensemble d'équation $z^2 + c / z^2$

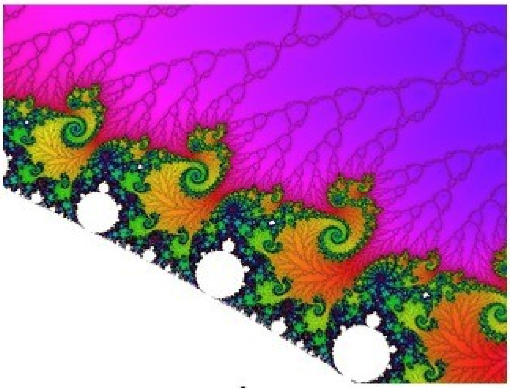
Les zooms dans l'ensemble de Mandelbrot montrent les structures habituelles, mais l'omniprésence des filaments assombrit les images et leur donne un aspect de vitrail.



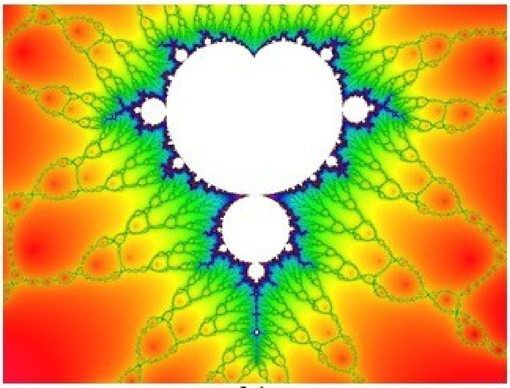
2_a 2_b

6.2. Ensemble d'équation $z^6 + c / z^6$

On y retrouve l'image classique de l'ensemble de Mandelbrot, alors que la formule est très différente de $z^2 + c$: c'est ce que l'on appelle l'*universalité* de l'ensemble de Mandelbrot.

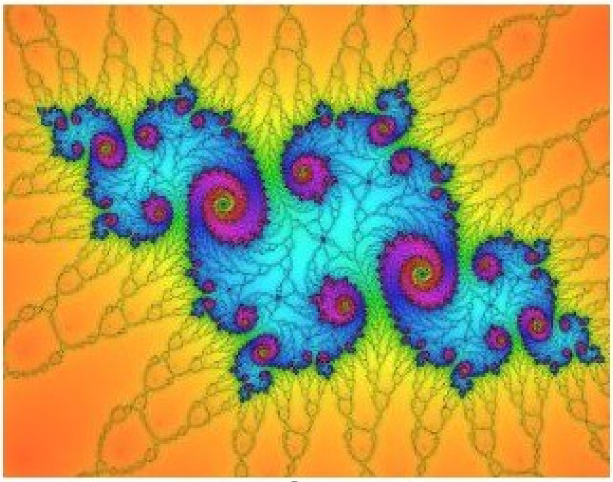


6_a

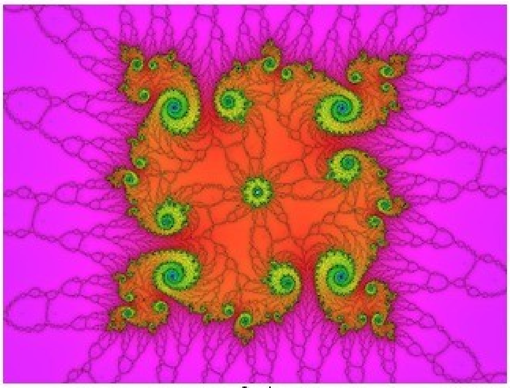


6_b

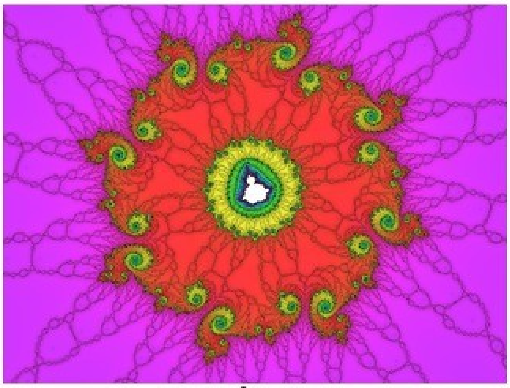
L'image suivante montre un *Embedded Julia Set* situé à l'intersection d'un groupe de filaments. Les agrandissements montrent le « noyau » central et son « nucléole ».



6_c



6_d

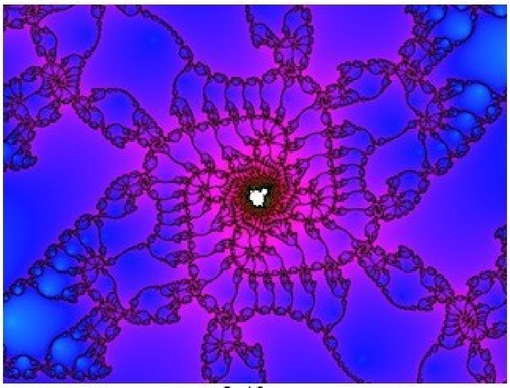


6_e

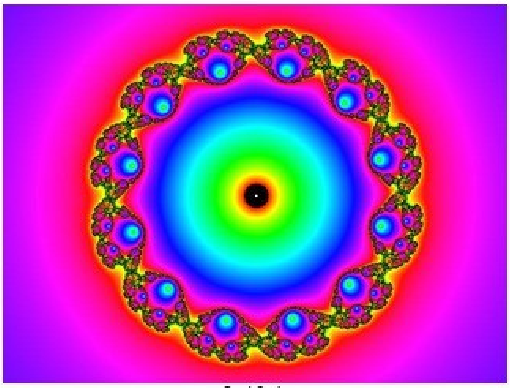
6.3. Ensemble d'équation $z^2 + c / z^{10}$

Les images montrent un mini-ensemble de Mandelbrot enchassé dans un réseau complexe de filaments, ainsi qu'un ensemble de Julia tiré de la même région.

L'ensemble de Julia a une structure circulaire puisque $k = 0$ (voir section 4). Le nombre de motifs entourant l'ensemble est égal à la somme des exposants ($2 + 10 = 12$).



2_10_a



2_10_b

7. Conclusion

Nous avons vu dans cet article des fonctions faisant intervenir des termes fractionnaires. Ces fonctions, qui ont été relativement peu explorées, génèrent des images souvent surprenantes. Nous y avons aussi rencontré un concept important : l'universalité de l'ensemble de Mandelbrot. Nous retrouverons cette propriété dans les prochains articles de cette série.

8. Référence

Le site de Robert Devaney présente une collection d'articles consacrés à ces ensembles.