

Chapitre 5

Séries trigonométriques

I. Introduction et définitions

Dans ce chapitre, nous verrons une autre classe importante de séries de fonctions, les séries trigonométriques. La propriété essentielle de ces séries est la prise en compte, dans la décomposition d'une fonction périodique en "somme infinie" de fonctions simples, du caractère de périodicité. Prenons par exemple la fonction $x \mapsto \sin x$. Son développement en série entière est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et ses approximations à n'importe quel ordre n qui sont des fonctions polynomiales ne sont pas périodiques et encore moins 2π -périodiques.

Dans un premier temps, nous étudierons le cas de fonctions 2π -périodiques. Parmi ces fonctions, les plus simples sont évidemment de la forme $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les premières sont paires et les secondes, impaires. Ensuite, nous passerons au cas des fonctions T -périodiques où T est un nombre réel positif quelconque.

Définition 5.1. On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum u_n(x)$ dont le terme général $u_n(x)$ est de la forme

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (\text{I.1})$$

Convention

On conviendra d'écrire les sommes partielles d'une série trigonométrique (I.1) sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

où l'on pose $b_0 = 0$.

Définition 5.2. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, est développable en série trigonométrique si elle est limite simple (ou somme) d'une série trigonométrique.

Exemples

1. Les fonctions sin et cos sont développables en séries trigonométriques (déterminer les coefficients a_n et b_n correspondants).
2. La série de terme général $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est trigonométrique.
3. Représenter les graphes des fonctions 2π -périodiques $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-\pi, 0[, \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-\pi, 0[, \\ 0 & \text{si } x \in [0, \pi[, \end{cases}$$

Autre écriture des séries trigonométriques

Après substitution

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

le terme général (I.1) devient $\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}$ où $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $\beta_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$. La somme partielle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s'écrit aussi (écriture exponentielle complexe)

$$\sum_{n=-p}^p c_n e^{inx},$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients c_n sont égaux à α_n et les coefficients c_{-n} à β_n .

Il s'ensuit que $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

Comme dans le cas général des séries de fonctions, on rencontre la notation (limite)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{ou} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

pour désigner les séries trigonométriques.

Convention : convenons de noter ces derniers objets $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Il s'agit de suites de fonc-

tions de la forme $p \mapsto \sum_{n=-p}^p c_n e^{inx}$ où $p \in \mathbb{N}$.

Exercices

1. Écrire les coefficients c_n des séries trigonométriques $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ et $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$
2. Inversement, écrire les coefficients a_n et b_n des séries trigonométriques : $\sum_{n=-p}^p \frac{ne^{inx}}{n^2 + 1}$

et $\sum_{n=-p}^p \frac{e^{inx}}{n+1}$.

II. Convergence des séries trigonométriques

La notion de convergence peut, bien-sûr, s'appliquer aux séries trigonométriques écrites selon la définition. Elle correspond, sous l'écriture exponentielle complexe, à la définition suivante :

Définition 5.3. Une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est convergente sur une partie D de $\mathbb{R}$ s'il existe une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie l'assertion :

$$\forall x \in D, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad p > N(\varepsilon, x) \implies \left| \sum_{n=-p}^p c_n e^{inx} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

On posera $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

Exercice. Écrire de façon analogue les définitions de convergence uniforme, absolue et normale d'une série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

Une série trigonométrique est une série de fonctions particulières définies sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, tous les théorèmes et propositions vus dans le chapitre des séries de fonctions restent vrais. Il en résulte la proposition suivante.

Proposition 1. Si les séries numériques $[|a_n|]$ et $[|b_n|]$ convergent, alors la série trigonométrique $[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ converge normalement (donc uniformément) et sa somme est une fonction continue.

DÉMONSTRATION- Exercice. □

Exemple

La "somme" de la série $[\frac{\cos(nx) + \sin(nx)}{n^2}]$ existe et est continue.

En fait, grâce au théorème d'Abel (appliqué à la série trigonométrique en écriture complexe) et à la majoration du reste, nous avons respectivement les théorèmes suivants.

Théorème 2. Si les suites de nombres réelles (a_n) et (b_n) sont positives, décroissantes et convergentes vers 0, alors la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

DÉMONSTRATION- Appliquer le corollaire du théorème d'Abel. □

Théorème 3. Si les suites de nombres réels positifs (a_n) et (b_n) sont décroissantes et convergent vers 0, alors, la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge uniformément sur tout intervalle de type $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION- Admis □

II.1 Propriétés de la fonction “somme”

De la convergence uniforme établie dans le théorème précédent, on déduit le théorème suivant.

Théorème 4. La “somme” d’une série trigonométrique est 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

DÉMONSTRATION- Admis

□

Théorème 5. Si la série $[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ converge vers une fonction f sur un intervalle I et si la série dérivée $[na_n \cos(nx) - nb_n \sin(nx)]$ est uniformément convergente sur I , alors cette dernière converge vers une fonction g telle que $f' = g$.

DÉMONSTRATION- Admis

□

Exercice

Trouver la somme de la série trigonométrique de terme général $\frac{n \cos(nx)}{2^n}$ (utiliser l’écriture exponentielle complexe)

II.2 Dérivation et intégration d’une série trigonométrique

Théorème 6. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n(|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente, alors la série $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ est convergente. Sa somme $f(x)$ est continument dérivable et sa dérivée f' s’obtient par dérivation terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})' = \sum_{n=1}^{+\infty} i n (c_n e^{inx} - c_{-n} e^{-inx}).$$

DÉMONSTRATION- En cours

□

Corollaire 7. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ est continue, et la série

$$c_0 x + (-c_1 i e^{ix} + c_{-1} i e^{-ix}) + \dots + \left(-\frac{c_n}{n} i e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i e^{-inx}\right) + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{c_n}{n} i e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i e^{-inx}\right)$$

est une primitive de $f(x)$.

DÉMONSTRATION- Il suffit d’appliquer le théorème précédent à la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{c_n}{n} i e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i e^{-inx}\right). \quad \square$$

III. Coefficients et série de Fourier

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à l'étude des séries trigonométriques dont on connaît au départ leurs coefficients.

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons au problème inverse.

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique. Sous quelles conditions supplémentaires admet-elle, dans un domaine D de $\mathbb{R}$ (à préciser), un développement en série trigonométrique et dans le cas où un tel développement existe, comment déterminer D ainsi que les coefficients a_n et b_n correspondants ?

III.1 Cas des séries trigonométriques

L'origine des séries trigonométriques est la résolution de ce problème inverse (voir la note historique) et, plus précisément, dans la décomposition d'une solution de l'équation des cordes vibrantes en "somme infinie" de fonctions périodiques.

Plusieurs réponses ont été données. La plus complète (dans le cadre de notre unité d'enseignement) est celle qui est contenue dans le théorème de Dirichlet-Jordan.

Avant d'énoncer ce théorème, nous avons besoin de quelques définitions et notations.

Définition 5.4. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux si, sur tout intervalle borné, elle ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité (et elle est continue ailleurs).

Définition 5.5. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continûment dérivable par morceaux si sur tout intervalle borné, à l'exception d'un nombre fini de points, elle est dérivable et sa dérivée est continue.

Exemple

La fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est continûment dérivable par morceaux puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'intersection de $\mathbb{Z}$ avec tout intervalle borné est fini.

Notations

1. On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel (à vérifier) des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, 2π -périodiques, continûment dérivables par morceaux et possédant en tout point de discontinuité a , des limites à gauche et à droite.
2. On note $f(a^+)$ et $f(a^-)$ les limites à droite et à gauche de f en a . Il est clair qu'une fonction est continue si, et seulement si, ses limites à gauche et à droite en tout point sont égales.

Exemples

1. La fonction $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie sur $[-\pi, \pi[$ par $v(x) = |x|$ est un élément de $\mathcal{E}$.
2. La fonction $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \in]0, 2\pi[$ est continûment dérivable par morceaux, mais n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, posons $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ (c'est le *symbole de Kronecker*).
 Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, un petit calcul montre que l'on a :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ix) \sin(jx) dx = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ix) \cos(jx) dx = \delta_{i,j}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(ix) \sin(jx) dx = \delta_{i,j}.$$

Si l'on avait une relation du type

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

alors les relations ci-dessus donnent une idée de comment calculer les coefficients a_n et b_n (« sous de bonnes hypothèses »).

Définition 5.6. On appelle coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{E}$, les nombres réels a_n et b_n définis par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

La série trigonométrique définie par les sommes partielles

$$S_p(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est appelée série de Fourier de f .

Exercices

1. Soit u un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout nombre réel α , on a :

$$\int_0^{2\pi} u(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} u(x) dx$$

et en particulier,

$$\int_0^{2\pi} u(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx.$$

2. Montrer que les coefficients c_n de la série de Fourier (deuxième écriture $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$) associée à la fonction 2π -périodique f ont pour expressions :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Le lien entre la fonction f et sa série de Fourier est établi par le théorème suivant.

Théorème 8. (théorème de Dirichlet-Jordan) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, la série de Fourier associée à f converge ponctuellement vers la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

DÉMONSTRATION- Admis

□

Corollaire 9. Si la fonction $f \in \mathcal{E}$ est continue en a , sa série de Fourier converge ponctuellement en a vers $f(a)$.

Grâce à ce théorème, on peut voir que si f est paire, tous les coefficients b_n sont nuls et si f est impaire, les coefficients a_n , à sont nuls (la fonction de départ f peut ne pas s'annuler en 0).

Exemples

1. Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \alpha$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = \beta$ si $x \in [-\pi, 0[$. La série de Fourier $[u_n]$ associée à f est définie par

$$a_0 = \alpha + \beta, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \quad b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = 2 \frac{\alpha - \beta}{(2n+1)\pi}.$$

Que devient cette série lorsque $\alpha = -\beta$?

2. Soit g la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \alpha x$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = \beta x$ si $x \in [-\pi, 0[$. La série de Fourier $[v_n]$ associée à g est définie par

$$a_0 = \frac{\alpha - \beta}{2}\pi + 2 \frac{\beta - \alpha}{(2n+1)^2\pi},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = 2 \frac{\beta - \alpha}{(2n+1)^2\pi}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(\alpha + \beta)}{n}.$$

III.2 Le cas complexe

Théorème 10. Soit f une fonction complexe, périodique de période 2π . Si

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

est la somme d'une série trigonométrique, et si cette série converge **uniformément**, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

On note parfois $\hat{f}(k) = c_k$ ce k -ième coefficient de Fourier.

DÉMONSTRATION- Admis

□

On a la correspondance suivante pour les coefficients de Fourier dans l'écriture réelle ou complexe :



$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (e^{-inx} + e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (e^{-inx} - e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{array} \right.$$

III.3 Cas des fonctions T -périodiques

Comme pour les fonctions 2π -périodiques, les fonctions T -périodiques de base sont $x \mapsto \cos(\frac{2\pi x}{T})$ et $x \mapsto \sin(\frac{2\pi x}{T})$. Elles sont indéfiniment dérivables. La première est paire et la seconde est impaire.

Tous les résultats et propriétés établis jusqu'ici peuvent s'appliquer aux fonctions T -périodiques.

Les coefficients de Fourier deviennent dans ce cas :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx,$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{\frac{-2n\pi i}{T}x} dx.$$

Exercice Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor; \quad x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

sont périodiques, de périodes respectivement égales à 1 et 2. Calculer leurs coefficients de Fourier.

Exemple : Considérons la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \\ -\frac{\pi}{4} & \text{pour } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[; \\ 0 & \text{pour } x = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Etudions la série de Fourier de f . Cette fonction vérifie les condition du théorème et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Donc, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}).$$

Calculons les coefficients de Fourier de f . On a

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-inx} dx - \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-inx} dx.$$

Pour $n = 0$, on a $c_0 = 0$. Pour $n \neq 0$, on a par intégration

$$c_n = \frac{1}{8} \frac{e^{-in\frac{\pi}{2}} - e^{in\frac{\pi}{2}}}{-in} - \frac{1}{8} \frac{e^{-in\frac{3\pi}{2}} - e^{in\frac{-\pi}{2}}}{-in}$$

et donc

$$-8inc_n = 2e^{-in\frac{\pi}{2}} - 2e^{in\frac{\pi}{2}} = -2(2i \sin(n\frac{\pi}{2})).$$

Il s'ensuit que

$$c_n = \frac{1}{2n} \sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Si n est pair, on a $c_n = 0$ et si $n = 2k + 1$ est impair, on a $c_n = \frac{1}{2n}(-1)^k$.

Comme f est paire, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

En posant $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

IV. Interprétation géométrique

IV.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathcal{E}$

On sait que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la notion de produit scalaire sert à définir l'orthogonalité de deux vecteurs et à établir des relations métriques dans l'espace comme

- le théorème de Pythagore,
- et l'expression des coordonnées d'un vecteur v par rapport à une base (e_1, e_2, e_3) comme produits scalaires de v et des éléments e_i .

En fait, ces relations métriques peuvent se retrouver dans n'importe quel espace vectoriel (même de dimension infinie) pourvu que l'on puisse y définir "un produit scalaire".

Rappelons qu'une application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ définit un produit scalaire dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E si c'est est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive :

1. $\forall x_1, x_2, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \mu \varphi(x_2, y);$
 $\forall x, y_1, y_2 \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2),$
2. $\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x),$
3. $\forall x, x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x, x) > 0.$

On note souvent le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le nombre $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ est la longueur (norme) de x .

Exercice

Montrer que si le produit scalaire de deux vecteurs u et v est nul, alors $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ (théorème de Pythagore).

Produits scalaires

1. La forme bilinéaire dans $\mathbb{R}^3$, définie par $(x, y) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ définit le produit scalaire euclidien classique.
2. la forme bilinéaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{E}$.

Ce deuxième exemple est fondamental pour la suite.

IV.2 Égalité de Parseval

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, posons $\delta_{p,q} = 0$ si $p \neq q$ et $\delta_{p,p} = 1$ (c'est le *symbole de Kronecker*).

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, rappelons les *relations d'orthogonalité* vues plus haut :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) dx = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \delta_{p,q}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \delta_{p,q}.$$

Ces relations montrent que la famille de fonctions $\{\sin(px), \cos(px); p \in \mathbb{N}\}$ est orthonormale. Est-elle une base de $\mathcal{E}$? Nous détaillerons la réponse en cours.

Au sens du produit scalaire défini sur $\mathcal{E}$, la norme (ou longueur) d'un élément f de $\mathcal{E}$ est égale à

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(x) \overline{f(x)} dx}.$$

Théorème 11 (Égalité de Parseval). Soit $f \in \mathcal{E}$. Notons $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier (en exponentielle) :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ikx}.$$

1. La suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f , c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n f(t)|^2 dt = 0.$$

$$2. \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|^2.$$

Si le développement en série de Fourier vient de la décomposition d'un signal, les coefficients c_k sont les contributions des *harmoniques*. L'égalité de Parseval s'interprète donc en disant que l'énergie totale du signal s'obtient en sommant les contributions des différentes harmoniques.

Dans le cas d'un développement réel, l'égalité de Parseval devient

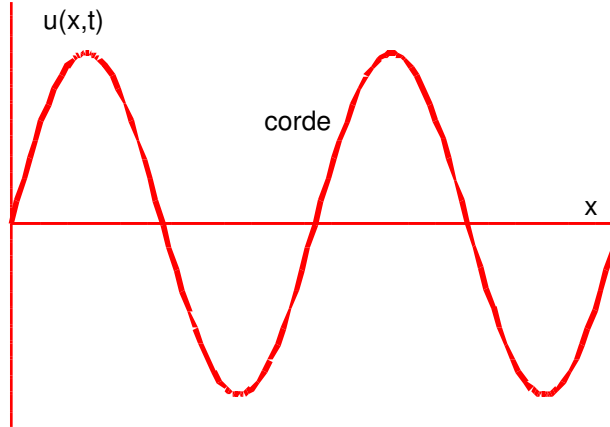
$$\|f\|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

V. Note historique

Le point de départ était l'équation aux cordes vibrantes (cas idéal)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour laquelle D'Alembert (1717-1783) trouva des solutions (en 1747) de la forme $u(x, t) = f(ct + x) - f(ct - x)$ où f est une fonction quelconque périodique, de période $2l$ (l est la longueur de la corde et c , la vitesse de la propagation de l'onde).



La courbe ci-dessus représente graphiquement la position initiale de la corde à l'instant $t = 0$. Pour un x donné, $u(x, \cdot)$ est une fonction périodique en temps t .

En 1753, Daniel Bernoulli (1700-1782) entreprit de considérer des fonctions f de la forme

$$2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

ou encore

$$\sin\left(\frac{n\pi(ct+x)}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi(ct-x)}{l}\right).$$

Sachant que les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont les fonctions périodiques les plus simples, il eut l'idée d'exprimer la fonction f de la solution de D'Alembert sous forme d'une série trigonométrique

$$f(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi u}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi u}{l}\right) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi(u-\beta)}{l}.$$

Les termes de cette dernière série désignent les harmoniques.

En prenant cette fonction comme solution de D'Alembert et ensuite en substituant $t = 0$, on obtient la condition initiale qui doit être une fonction périodique en x . Se pose alors la question : comment écrire une fonction quelconque comme "somme infinie" de fonctions sinus d'arcs multiples ?

Cette question fut résolue par J. Fourier (1772-1837) en 1807, en étudiant l'équation de la chaleur.

Les séries trigonométriques sont aussi utilisées en astronomie, acoustique, optique et bien d'autres domaines.