Université de Limoges
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

MATHÉMATIQUES 3

Parcours MIP et MASS de Licence (semestre 3)

Année universitaire 2013 - 2014

Notes d'après *D. Boularas, J.-P. Massias, A. Salinier, H. Smati, J.-A. Weil*

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales généralisées

I. Approximation des fonctions, développements limités

Dans le chapitre 3 du Cours de première année (premier semestre), vous avez vu la formule de Taylor pour construire des approximations de fonctions ; vous avez aussi vu la notion de fonctions équivalentes au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous revoyons tout cela et l'approfondissons en introduisant la technique des développements limités.
Ces méthodes sont fondamentales pour les calculs de limites et d'ordres de grandeurs ; elle vont servir abondamment dans tous les chapitres vus ce semestre.

I.1 Formules de Taylor

I.1.1 Formule de Taylor-Young

Théorème 1 (Taylor-Young)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si f est dérivable n fois sur I, alors il existe une fonction ϵ définie sur I vérifiant $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ et telle que*

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \epsilon(x). \tag{I.1}$$

La formule (I.1) est connue sous le nom de *formule de Taylor-Young*. On parle aussi de développement de Taylor ("Taylor expansion" en anglais) ; nous verrons ci-dessous que le membre de droite de cette égalité est un *développement limité* de f au voisinage de x_0. Cette formule montre comment, localement, on peut *approcher* une fonction par un polynôme.
Pour pouvoir l'utiliser pour des évaluations concrètes, il est utile d'avoir une estimation du *reste* $(x-x_0)^n \epsilon(x)$. C'est que que nous faisons maintenant.

I.1.2 Formule de Taylor-Lagrange, reste intégral

Théorème 2 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si f est dérivable $n+1$ fois sur I alors, pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in]x_0, x[$ (resp. $]x, x_0[$ si $x < x_0$) tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x). \tag{I.2}$$

Vous connaissez déjà un cas simple de cette formule : pour $n = 0$, c'est le théorème des accroissements finis. Cette formule de Taylor-Lagrange peut donc se comprendre comme un théorème des accroissements finis généralisé.
Une conséquence utile de cette formule est *l'inégalité de Taylor-Lagrange* ci-dessous, qui permet de majorer l'écart le graphe de f et l'approximation donnée par le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Sous les hypothèses du théorème 2 :

$$\left| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right) \right| \leq \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c\in I} |f^{(n+1)}(c)|. \tag{I.3}$$

Exemple : Comme la dérivée de e^x est e^x, la formule de Taylor au voisinage de 0 nous donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x).$$

Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange pour estimer une valeur de $e^{\frac{1}{2}}$. Comme la fonction exponentielle est croissante, nous voyons que (pour x positif)

$$\left| e^x - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c\in[0,x]} e^c = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, comme nous savons que $e < 3$, nous pouvons majorer $e^{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{3}$, donc par 1.74. Ainsi, la formule ci-dessus donne l'estimation suivante :

$$\left| e^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2})^n}{n!} \right) \right| \leq 1.74 \frac{1}{2^(n+1)(n+1)!}.$$

Ceci montre que si on remplace $e^{\frac{1}{2}}$ par le nombre $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n \cdot n!}$ (que l'on peut calculer avec juste les opérations $+, *, /$), on a une précision de l'ordre de 5.10^{-3} pour $n = 3$, de 4.10^{-5} pour $n = 5$, de 3.10^{-11} pour $n = 10$, etc. Nous avons donc non seulement une approximation du nombre $e^{\frac{1}{2}}$ mais aussi une majoration de l'erreur commise dans cette approximation. □
Une autre estimation du reste est donné par la formule de Taylor avec reste intégral ci-dessous.

Théorème 3 (Taylor-reste intégral)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I alors, pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n)}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{I.4}$$

I.1.3 Notations $o(\cdots)$ et $\mathscr{O}(\cdots)$ de Landau

Reprenons la formule de Taylor-Young. Dans le reste $(x-x_0)^n \epsilon(x)$, le terme $(x-x_0)^n$ indique un « ordre de grandeur » de l'approximation. La notation ci-dessous permet d'écrire ce genre de reste de façon plus condensée.

Définition 1.1. *Soit f une fonction réelle définie dans un voisinage de* 0. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.*
– *On dit que $f = o\left(x^n\right)$ (« f est un petit-oh de x^n ») si*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ est négligeable devant x^n au voisinage de 0.
– *On dit que $f = \mathcal{O}\left(x^n\right)$ (« f est un grand-oh de x^n ») s'il existe $a \geq 0$ tel que*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|\frac{f(x)}{x^n}\right| < a.$$

Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ est dominée par x^n au voisinage de 0.

Les cas typiques d'utilisation sont les suivants.
Quand $f(x) = x^n \epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, on a $f = o\left(x^n\right)$.
Quand $f(x) = x^n\,(a + \epsilon(x))$, on a $f = \mathcal{O}\left(x^n\right)$.
Naturellement, on peut remplacer x^n par $(x - x_0)^n$ si on travaille au voisinage d'un réel x_0 non nul (et par $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ si on travaille au voisinage de $+\infty$).

I.1.4 Développement limité

Définition 1.2. *Soit x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un* développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 *s'il existe un intervalle I contenant x_0 et $n+1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :*

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Dans les cas d'applications des formules de Taylor, le membre de droite de la formule donne donc un développement limité de f. Remarquons que, pour un polynôme P de degré n, si $P = o\left(x^n\right)$ alors nécessairement $P = 0$ (c'est le polynôme nul). Ceci montre le résultat important suivant d'unicité du développement limité :

Lemme 1.3. *Soit x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0. Supposons que l'on trouve deux développement limités $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$. Alors, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a $a_k = b_k$. Autrement dit, il y a unicité du développement limité (s'il existe).*

Remarque : Si f est suffisamment dérivable, alors la formule de Taylor donne un développement limité. Mais la réciproque n'est pas vraie : une fonction peut admettre un développement limité sans être dérivable. Par exemple, pour $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \sin(1/x)$ (pour $x \in \mathbb{R}^\star$), on peut montrer que $f(x) = o\left(x^2\right)$ (faites le) mais f n'est pas dérivable en 0.
Exemple : On sait (somme des termes d'une suite géométrique) que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - x^n \frac{x}{1 - x}$$

Si on pose $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x}$, on voit qu'on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Le lemme 1.3 ci-dessus montre donc que $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$ est le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.

I.2 Calcul de développements limités et applications

I.2.1 Exemples

Les trois développements limités ci-dessous sont à connaître par coeur impérativement.

$$\boxed{\begin{array}{rcccccccccccc}
\frac{1}{1-x} & = & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + \cdots + & x^n & + & o\left(x^n\right)\\
e^x & = & 1 & + & x & + & \frac{x^2}{2} & + & \frac{x^3}{6} & + \cdots + & \frac{x^n}{n!} & + & o\left(x^n\right)\\
(1+x)^\alpha & = & 1 & + & \alpha x & + & \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 & + & \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 & + \cdots + & \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n & + & o\left(x^n\right)
\end{array}}$$

I.2.2 Règles de calcul sur les développements limités

Une fois qu'on connait des développement limités, on peut les additionner, les multiplier, les dériver et les intégrer. Nous allons préciser ça.

ADDITION : Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)$ alors, pour un réel λ,

$$f(x) + \lambda g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \lambda b_k)(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Exemple : les fonctions hyperboliques $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ **et** $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$**.** En utilisant le développement limité de e^x et e^{-x}, on obtient

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right)$$
$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^6\right)$$

Il ne vous reste plus qu'à écrire la formule générale.

FONCTIONS PAIRES/IMPAIRES :

Lemme 1.4. *Si f est une fonction paire (resp. impaire), alors son développement limité au voisinage de* 0 *n'a que des termes de degré pair (resp. impair).*

DÉMONSTRATION- En cours. □

PRODUIT : Pour obtenir le développement limité de $f(x)\cdot g(x)$ à l'ordre n, on multiplie les polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans ce produit.

Si on a deux développement limités d'ordres différents et qu'on les multiplie ou qu'on les additionne, alors c'est l'ordre le plus petit qui l'emporte.

Exemple : Supposons que $f(x) = 1-x^2+x^2\epsilon_1(x)$ et $g(x) = 1-x+x^3\epsilon_2(x)$. Alors $f(x)g(x) = 1-x-x^2+x^2\epsilon(x)$: les termes en x^3 ont été « avalés » par le reste $x^2\epsilon(x)$.

Exemple : Développement limité de $\dfrac{x^2\sin(x)}{1+x}$ au voisinage de 0.

INTÉGRATION :

Lemme 1.5. *Soit f une fonction dérivable dans un voisinage de 0. Si f' admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$ alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n+1$*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o\left(x^{n+1}\right).$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

Autrement dit, on peut intégrer terme à terme un développement limité (et ça fait monter l'ordre du développement).

Exemple : Développement limité de $\ln(1-x)$

DÉRIVATION :

Lemme 1.6. *Soit f une fonction dérivable dans un voisinage de 0. Si f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$ et si sa dérivée f' admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $n-1$, alors ce développement limité est :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k + o\left(x^{n-1}\right).$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

COMPOSITION :

Lemme 1.7. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et vérifiant $f(0) = 0$. On suppose que f admet le développement limité $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) = xP(x) + o\left(x^n\right)$, où P est un polynôme de degré au plus $n-1$.*
Soit g une fonction définie au voisinage de 0 admettant un développement limité $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$. Posons $F(x) = g\circ f(x) = g(f(x))$.

Alors le développement limité de F d'ordre n au voisinage de 0 s'obtient en calculant $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k P(x)^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à $n-k$ dans le calcul de $P(x)^k$.

DÉMONSTRATION- En cours. □

DIVISION : Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et telle que $f(0) \neq 0$. On suppose que $f(0) = 1$. Supposons que f admet un développement limité de la forme

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) = 1 - x\,P(x) + o\left(x^n\right)$$

d'ordre n au voisinage de 0 (où P désigne un polynôme de degré au plus $n-1$). Comme on sait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o\left(u^n\right)$, le lemme de composition 1.7 montre que le développement limité de $1/f$ au voisinage de 0 est donné par

$$\frac{1}{f}(x) = 1 + x\,P(x) + \sum_{k=2}^{n} x^k P(x)^k + o\left(x^n\right)$$

où, comme ci-dessus, l'on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $n-k$ dans le calcul de $P(x)^k$.

Exemple : On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o\left(x^5\right) = 1 - x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2) + o\left(x^5\right)$. Donc $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2) + x^4(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2)^2 + o\left(x^5\right)$. On calcule facilement $(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2)^2$ (modulo x^5) et on obtient $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right)$. On multiplie ce développement par celui du sinus ($\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)$) et on trouve le développement de $\tan(x)$ à l'ordre 5.

Une autre méthode consiste à procéder par *division suivant les puissances croissantes* comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple : Calculons encore un développement limité de $\tan(x)$ au voisinage de 0. On sait que $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o\left(x^6\right)$. Comme la fonction tangente est impaire, son développement limité n'aura que des termes de degré impair et sera donc de la forme $\tan(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$. On a donc

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o\left(x^6\right) = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6)(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5) + o\left(x^6\right)$$

Le terme de degré 1 dans cette égalité montre que $c_1 = 1$. On a donc

$$(c_3 x^3 + c_5 x^5)(1 - \frac{1}{2}x^2) = \sin(x) - x\cos(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o\left(x^6\right)$$

On en déduit que $c_3 = \frac{1}{3}$. On poursuit le processus de division :

$$c_5 x^5 = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{1}{3}x^3\cos(x) = \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$$

d'où $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.

Exercice 1.1. *Retrouver les valeurs de c_1, c_3, c_5 de ce développement limité en utilisant la relation* $\tan(x) = \int_0^x (1+\tan(t)^2)dt$ *et en procédant par identification.*

Exercice 1.2. *Développement limité de* $\arctan(x)$ *au voisinage de* 0 *par (au moins) deux méthodes : d'une part en utilisant la relation* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$*, d'autre part en utilisant le développement de la tangente et la relation* $\arctan(\tan(x)) = x$.

I.2.3 Développement limité de fonctions au voisinage d'un point autre que 0

En pratique, il est toujours plus commode de calculer des développements limités au voisinage de 0.
Au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose donc $x = x_0 + h$ puis $f(x) = f(x_0+h)$ et on la regarde comme une fonction en h dont on calcule un développement limité au voisinage de $h = 0$.
Au voisinage de $+\infty$, on pose $x = 1/h$, donc $f(x) = f(1/h)$ et on la regarde comme une fonction en h dont on calcule un développement limité au voisinage de $h = 0$.

I.2.4 Équivalence de fonctions au voisinage d'un point

Définition 1.8. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est* équivalente à g au voisinage de x_0 *quand* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. *On le note* $\boxed{f \underset{x_0}{\sim} g.}$

Une caractérisation commode est la suivante. On a $f \underset{x_0}{\sim} g$ lorsque, pour x au voisinage de x_0, on a $f(x) = g(x)\cdot(1+o(1))$ ou encore $f(x) = g(x)\cdot(1+\epsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.

Lemme 1.9. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, non nulles au voisinage de x_0 et équivalentes au voisinage de x_0. Alors elles sont de même signe au voisinage de x_0.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

Une fonction f non nulle ne peut jamais être équivalente à 0.
On ne peut pas additionner des équivalents ; pour le faire, il faut revenir au développement limité correspondant et faire un développement limité de la somme. En revanche, on peut multiplier des équivalents.

II. Rappels sur le calcul d'une intégrale définie

Rappelons (première année, second semestre, chapitre 9) qu'une « intégrale définie » concerne les fonctions réelles f *continues sur un intervalle fermé et borné* $[a,b]$. L'objet $\int_a^b f(t)dt$ existe alors bel et bien. C'est un nombre. Géométriquement, on l'interprète comme l'aire *algébrique* de la portion de plan (rapporté au repère Oxy) délimitée par l'axe des abscisses Ox, les droites verticales $x=a$ et $x=b$ et la courbe graphique qui représente f.

II.1 Intégration par parties

Si u et v sont des fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a,b]$, on obtient directement à partir de la relation $(uv)'=u'v+uv'$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{II.5}$$

Pour toute fonction réelle (à variable réelle x) continûment dérivable u, on pose $du = u'(x)dx$. Si u et v sont deux fonctions continûment dérivables, on a $d(uv) = udv + vdu$. Cela permet d'écrire la formule de l'intégration par parties de façon plus simple :

$$\int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{II.6}$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt = \int_0^1 t\,d(e^t) = \Big[te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt = \Big[te^t - e^t\Big]_0^1 = 1.$

II.2 Changement de variables

Soient I et J deux intervalles réels, $u : J \longrightarrow I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Supposons que u réalise une bijection d'un intervalle $[\alpha,\beta]\subset J$ dans $[A,B]\subset I$ et est continûment dérivable. Si F est une primitive de f, l'égalité

$$(F\circ u)' = (f\circ u)\,u',$$

montre que (en effectuant le changement de variable $x=u(t)$) :

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt = F(u(\beta))-F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx. \tag{II.7}$$

Ne pas oublier, dans un changement de variable, de changer les bornes de l'intégrales.
Exemple : calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x},$$

à l'aide du changement de variable classique : $t = \tan\dfrac{x}{2}\cdot$

Exercice 1.3. *Calculer les intégrales :*

$$\int_0^1 t^2e^t\,dt,\quad \int_1^2 \frac{\ln t}{t}\,dt,\quad \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\,dt.$$

III. Intégrale généralisée

III.1 Position du problème

Jusqu'à présent, pour nous, l'intégrale (dite définie) est une notion qui ne concerne que les fonctions *continues* sur un intervalle *fermé* et *borné*. Ces fonctions sont en particulier bornées.

Question
Que devient la notion d'intégrale si l'on supprime l'une des contraintes précédentes ?
Réponse
C'est l'objet de ce chapitre où, toujours sous l'hypothèse de continuité, nous généraliserons la définition de l'intégrale aux intervalles pas nécessairement bornés ou/et pas nécessairement fermés.
Autrement dit, nous voudrions donner un sens aux objets

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{b}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

où f est continue respectivement sur les intervalles *ouverts ou semi-ouverts d'extrémités des nombres finis ou infinis.* Ces intégrales sont parfois appelées intégrales *"impropres".*
Dans un premier temps, nous verrons le cas des intervalles semi-ouverts où nous distinguerons les cas des intervalles semi-ouverts *bornés* des intervalles semi-ouverts *non bornés.* Ensuite, nous étudierons les cas restants comme des combinaisons des premiers.

Exercice 1.4. *Donner des exemples de fonctions bornées et non bornées sur des intervalles de type* $[a,b[$ *et* $[a,+\infty[$.

III.2 Généralisation aux intervalles semi-ouverts

III.2.1 Cas d'un intervalle borné

Les intervalles semi-ouverts bornés sont de la forme $]a,b]$ ou $[a,b[$ où a et b sont des nombres réels.
Soit $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $c \in]a,b]$, le nombre
$I(c) = \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ est bien défini et cela, de façon unique (pourquoi ?).

Définition 1.10. *On dit que la fonction* $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ *est* intégrable sur l'intervalle $]a,b]$ *(ou que* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge*) si la limite de la fonction* I *ci-dessus existe lorsque* c *tend vers* a*. Cette limite est alors appelée intégrale de* f *sur l'intervalle* $]a,b]$ *et on écrit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} I(c).$$

Si une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle *diverge.*

Exercice 1.5. *Transposer la définition (1.10) aux intervalles de la forme* $[a,b[$.

Exercice 1.6. *Quelle est la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ *?*

Notation : dans l'exemple ci-dessus, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie sur $[0,1[$. Pour souligner le fait qu'il y a un problème quand x tend vers 1, on pourra la noter

$$\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Proposition 4 (intégrale de Riemann en 0)**.** *Soit* $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. *L'intégrale* $\displaystyle\int_{\to 0}^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge si* $\alpha < 1$ *et diverge si* $\alpha \geq 1$.

DÉMONSTRATION- pour $c \in]0,1[$, on a

$$I(c) = \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\ln c & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(1-c^{1-\alpha}) & \text{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

d'où le résultat. □

Exercice 1.7. *Cherchez un exemple de fonction continue, non bornée et intégrable sur un intervalle de type* $[a,b[$.

Proposition 5. *Soit* $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue qui admet une limite lorsque* $x \to a$. *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

III.2.2 Cas d'un intervalle non borné

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $c \in [a,+\infty[$, le nombre $I(c) = \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ est bien défini et cela, de façon unique.

Définition 1.11. *On dit que la fonction* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *est* intégrable sur $[a,+\infty[$ *(ou que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge*) si la limite de la fonction* I *existe lorsque* c *tend vers* $+\infty$. *Cette limite est alors appelée* intégrale de f sur l'intervalle $[a,+\infty[$ *et on écrit*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} I(c).$$

Proposition 6 (intégrale de Riemann en $+\infty$)**.** *Soit* $f : [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. *L'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge pour* $\alpha \leq 1$.

DÉMONSTRATION- voir la proposition (4).

Exercice 1.8. *Reprendre la définition précédente pour l'intervalle de type* $]-\infty,a]$.

Exercice 1.9. *Trouver la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2(1-x)}\,dx$.

III.3 Généralisation aux intervalles ouverts

III.3.1 Cas d'un intervalle borné

Un intervalle ouvert et borné est de la forme $]a,b[$ où a et b sont nombres réels.

Théorème/Définition 7. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour un nombre $c \in]a,b[$, les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent, alors elles le sont indépendamment du choix de $c \in]a,b[$.*
On dit alors que la fonction f est intégrable sur $]a,b[$ *et*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

DÉMONSTRATION- En cours. □

Exemple L'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente (pourquoi ?).

Dans le cas d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert, il faut donc traiter les deux bornes séparément. L'intégrale convergera seulement quand elle converge (indépendamment) en chaque borne. D'autre part, il faut toujours vérifier que la fonction est bien définie et intégrable en tout point à l'intérieur de l'intervalle.

III.3.2 Cas d'un intervalle non borné

Un intervalle ouvert non borné est de la forme $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,+\infty[$.

Théorème/Définition 8. *Soit $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour un nombre $c \in]a,+\infty[$, les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent, alors elles le sont indépendamment du choix de $c \in]a,b[$.*
On dit alors que la fonction f est intégrable sur $]a,+\infty[$ *et*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exercice 1.10. *Transposer cette définition aux cas des intervalles $]-\infty,a[$ ou $]-\infty,+\infty[$.*

Exemple La fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}$ est intégrable (cours).

Exercice 1.11. *Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge. En est-il de même pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$?*

Terminologie Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite intégrable sur l'intervalle I (ouvert, fermé ou semi-ouvert) si son intégrale converge.

IV. Propriétés des intégrales convergentes

IV.1 Intégrale généralisée de fonctions positives

Rappelons qu'une fonction continue et croissante $u : [a,b[\to \mathbb{R}$ admet une limite lorsque x tend vers b si, et seulement si, elle est majorée (prouvez le). Ce rappel permet d'établir un critère de convergence des intégrales de fonctions positives.

Lemme 1.12. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, il faut et il suffit que la fonction définie sur $[a,b[$ par $t \mapsto \int_a^t f(x)\,dx$ soit majorée.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

Exercice 1.12. *Trancrire le théorème précédent aux autres cas d'intervalles semi-ouverts et ouverts.*

Théorème 9. *Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives telles que $f \le g$. Alors,*

1. *Si l'intégrale $\int_a^t g(x)\,dx$ converge, l'intégrale $\int_a^t f(x)\,dx$ converge aussi.*
2. *Si l'intégrale $\int_a^t f(x)\,dx$ diverge, l'intégrale $\int_a^t g(x)\,dx$ diverge aussi.*

DÉMONSTRATION- En cours. □Ce théorème est parfois appelé “critère de comparaison”.

Exemples

1. On vérifie que pour tout x de l'intervalle $[1,+\infty[$, $e^{-x^2} \le e^{-x}$. Donc, l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ où a est un réel quelconque converge (à montrer rigoureusement).
2. Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$ diverge (pourquoi ?).

IV.2 Critère de Cauchy

Proposition 10. ***(Critère de Cauchy pour la convergence des intégrales)*** *Soit f une fonction réelle ou complexe, définie dans l'intervalle $[a,+\infty[$ et continue par morceaux dans tout intervalle $[a,t]$, $(a<t)$. Pour que l'intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :
pour tout $\epsilon > 0$, il existe t_0 tel que, quels que soient t_1, t_2 supérieurs à t_0, on a $|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx| \le \epsilon$.

DÉMONSTRATION- En cours. □

Remarque : Soit f une fonction réelle ou complexe, définie dans l'intervalle $[a,+\infty[$. Supposons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \neq 0$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge. Une condition <u>nécessaire</u> (mais pas suffisante) de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

En effet, supposons (par exemple) que $l > 0$ et choisissons un $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < l$. Par hypothèse, il existe un nombre A tel que, pour tout $x > A$, on ait $f(x) > l-\epsilon > 0$. Alors, pour $x > A$, $\int_A^x f(t)dt > \int_A^x (l-\epsilon)dt = (l-\epsilon)(x-A)$. Comme $\lim_{x\to\infty}(x-A) = +\infty$, on a $\lim_{x\to\infty}\int_A^x f(t)dt = +\infty$ donc l'intégrale diverge.

Exemple : les intégrales de Fresnel. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$$

sont convergentes.

Considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ et utilisons le changement de variable $x^2 = t$. La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ et à dérivée continue. Le changement de variable est donc légitime. On a , pour $0 < b \leqslant b'$,

$$\int_b^{b'} \cos(x^2)\,dx = \int_{b^2}^{b'^2} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_{b^2}^{b'^2} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\right]_{b^2}^{b'^2} + \frac{1}{4}\int_{b^2}^{b'^2} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Donc, on obtient

$$|\int_b^{b'} \cos(x^2)\,dx| \leqslant \frac{1}{2b'} + \frac{1}{2b} + \int_{b^2}^{b'^2} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Or, on a d'une part, pour tb et b' assez grand, on a $\frac{1}{2b'} \leqslant \epsilon/3$ et $\frac{1}{2b} \leqslant \epsilon/3$. D'autre part, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

étant convergente, elle vérifie donc le critère de Cauchy (disons avec $\epsilon/3$).Il s'ensuit que

$$|\int_b^{b'} \cos(x^2)\,dx| \leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

pour $b' \geqslant b \geqslant b_0$. Donc l'intégrale de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

vérifie le critère de Cauchy, et par conséquent, elle est convergente. La convergence de la deuxième intégrale de Fresnel se démontre de façon analogue. □

Proposition 11 (Critère d'Abel)**.** *Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec :*

1. *f est positive et décroissante vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*
2. *Il existe $M > 0$ tel que, $\forall x \in [a, +\infty[$, on a $\left|\int_a^x g(t)dt\right| < M$.*

Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

DÉMONSTRATION- Utilise le critère de Cauchy et la seconde formule de la moyenne : pour tous $x, y \in [a, +\infty[$, $\exists c \in [x, y]$ tel que $\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x)\int_x^c g(t)dt$. En effet, on a alors $\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| \leq 2Mf(x)$ et $f(x)$ tend vers 0 ce qui permet d'appliquer le critère de Cauchy □

IV.3 Convergence absolue

Définition 1.13. *Soit I un intervalle ouvert ou semi-ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Son intégrale est dite absolument convergente si l'intégrale de la fonction $|f| : I \to \mathbb{R}$ est convergente.*

Dans cette définition, l'intervalle I pourrait être borné ou non borné.

Théorème 12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert ou semi-ouvert I. Si son intégrale est absolument convergente, alors elle est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours. □

Exemple On montre facilement que l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx$ est absolument convergente (idée : $|\sin(x)| \leq 1$ puis majoration par une intégrale de Riemann) ; elle est donc convergente.
Exercice Montrer que l'ensemble des fonctions continues et absolument intégrables sur un intervalle I est stable par rapport à l'addition.

IV.4 Intégrabilité et équivalence de fonctions

Théorème 13. *Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives, continues. Si elles sont équivalentes au voisinage du point b, alors les deux intégrales*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

sont de même nature (ou bien elles convergent toutes les deux, ou bien elles divergent toutes les deux).

DÉMONSTRATION- En cours. □

Exemple la fonction $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}}$ est équivalente à l'infini à $\frac{2}{x^{3/2}}$. Comme $\int^{\to +\infty} \frac{2}{x^{3/2}}dx$ converge (intégrales de Riemann), l'intégrale $\int^{\to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}}dx$ converge.

Exercice 1.13. *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$ *est divergente (pourquoi ?)*

Remarque : Le théorème précédent peut être étendu aux fonctions posistives $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

où λ est un nombre *strictement positif.*
En effet, sous cette condition, on peut déduire que les fonctions f et λg sont équivalentes, donc de même nature et que les fonctions λg et g sont aussi de même nature.

Remarque : Pour une fonction $f := [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive, si on arrive à montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)x^{\alpha} = l \geq 0$ avec $\underline{\alpha > 1}$, alors ces critères montrent que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

V. Cas d'une fonction complexe de variable réelle

De telles fonctions sont définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}$.
Exemples

1. L'image de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$ est le cercle trigonométrique (ensemble des nombres complexes de module égal à 1.)
2. L'image de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = t(1+i)$ est la première bissectrice du plan rapporté au repère usuel.

Remarque : Soit I un intervalle. La donnée d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ équivaut à la donnée de deux fonctions $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ qui correspondent aux parties réelle et imaginaire de la première. On écrit : $f = f_1 + i f_2$.

Définition 1.14. *Soit I un intervalle quelconque. La fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite continue si les parties réelle et imaginaire f_1 et f_2 sont continues.*

Il suffit que l'une des deux fonctions f_1 ou f_2 soit discontinue pour que la fonction f le soit.

Définition 1.15. *Soit I un intervalle quelconque. La fonction $f : I \to \mathbb{C}$, continue, est intégrable si les parties réelle et imaginaire f_1 et f_2 sont intégrables sur I et alors,*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f_1(x)\,dx + i\int_I f_2(x)\,dx.$$

Cette définition regroupe tous les cas d'intervalle. Elle concerne donc les intégrales définies comme les intégrales généralisées.

Attention : il s'agit bien ici de fonctions complexes de variable réelle car pour les fonctions complexes de variable complexe, la définition d'intégrale est toute autre. Elle sera vue en troisième année.

Les règles d'intégration vues précédemment s'appliquent aux fonctions aussi bien réelles que complexes, *mais de variable réelle.*

VI. La fonction gamma d'Euler : Γ

Soit $\alpha > 0$, La fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\alpha-1}$ est définie et continue dans $]0, +\infty[$. Montrons que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$

est convergente. On sépare cette intégrale en deux intégrales généralisées :

$$\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

Étude de $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$**.** On remarque que $0 < e^{-x}x^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$. Le critère de comparaison montre que l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$.
Étude de $\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$**.** Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0$, donc pour x assez grand, on a $e^{-x}x^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$, le critère de comparaison permet de conclure que l'intégrale $\int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ est convergente pour $\alpha > 0$. On peut poser la définition suivante

Définition 1.16. *On appelle* fonction gamma d'Euler *la fonction* $\Gamma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$

Proposition 14. *Pour* $\alpha > 1$*, on a* $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1), \quad (\alpha > 1)$.
En particulier, pour tout entier $n \geqslant> 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

DÉMONSTRATION- le point 1. se démontre en utilisant une intégration par parties. Pour le point 2. on applique la formule établie au point 1. et on montre que $\Gamma(1) = 1$.

Chapitre 2

Séries numériques

Ce chapitre est basé sur les suites numériques réelles ou complexes. On suppose acquis les définitions et les résultats essentiels qu'on rappelle brièvement dans le paragraphe suivant.

I. Rappels sur les suites numériques

Définition 2.1. *Une* suite numérique *est une application de* $\mathbb{N}$ *— éventuellement privé d'un nombre fini d'éléments — dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Notation : on note (u_n) (ne pas omettre les parenthèses) la suite qui à n associe $u(n)$. L'image $u(n)$ est notée u_n et on l'appelle *terme général* de la suite.

Exemples fondamentaux :

1. Les termes de la suite $(\frac{1}{n})$ sont tous compris entre 0 et 1.
2. Les termes de la suite (a^n) où a est un nombre réel sont tous positifs si est positif et de signes alternés si a est strictement négatif.
3. Trouver le terme général de la suite arithmétique de raison r et de premier terme a_0 ;
4. Trouver le terme général de la suite géométrique de raison r et de premier terme a_0.

Définition 2.2. *La suite* (u_n) *est* convergente s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) vérifiant : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N, \quad |u_n - l| < \varepsilon$.
Le nombre l est appelé limite de la suite (u_n) et on écrit : $l = \lim_{n\to\infty} u_n$ ou $u_n \to l$.

Définition 2.3. *La suite réelle* (u_n) *est majorée (resp. minorée) s'il existe* M *(resp.* m*) appartenant à* $\mathbb{R}$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$ *(resp.* $m \leq u_n$*).*
Une suite réelle est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 1. *Une suite* (u_n) *est bornée si et seulement si il existe une constante positive* C *telle que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq C$.

Proposition 2. *Toute suite convergente est bornée.*

En d'autres termes, une suite non bornée ne peut être convergente.

Définition 2.4.

1. *La suite réelle* (u_n) *tend vers* $+\infty$ *si :* $\forall\ A > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n > N,\ u_n > A$ *;*
2. *La suite réelle* (u_n) *tend vers* $-\infty$ *si :* $\forall\ A > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n > N,\ u_n < -A$*.*

On écrit respectivement : $u_n \to +\infty$ *ou* $u_n \to -\infty$*.*

Proposition 3. *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont des suites convergentes telles que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq n_0$ *(avec* $n_0 \in \mathbb{N}$*), alors on a :* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$*.*

Remarque : Le passage à la limite transforme l'inégalité stricte en inégalité large.

Théorème 4 (théorème sandwich ou théorème des gendarmes)**.** *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites numériques telles que :*
— *pour tout n :* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *;*
— (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite* l*.*
Alors, la suite (w_n) *converge vers* l*.*

Définition 2.5. *Une suite* (u_n) *est* croissante *(resp. décroissante) si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $u_{n+1} \geq u_n$ *(*$u_{n+1} \leq u_n$*). Une suite croissante ou décroissante est appelée* suite monotone.

Exemples :

1. La suite $(\frac{1}{n})$ est décroissante (trivial).
2. La suite $(\frac{5n-1}{n})$ est croissante (prouvez le).

Théorème 5. *Une suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) est convergente.*

Définition 2.6. *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont* adjacentes *si :*
— (u_n) *est croissante et* (v_n) *décroissante ;*
— *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $u_n \leq v_n$ *;*
— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 6. *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont des suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.*

Définition 2.7. *La suite* (v_n) *est une* suite extraite *(ou* sous-suite*) de la suite* (u_n) *s'il existe une application* $\phi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$*, strictement croissante, telle que* $v_n = u_{\phi(n)}$*.*

Proposition 7. *Toute suite extraite d'une suite convergente vers* l *converge aussi vers* l*.*

Corollaire 8. *Si une suite* (u_n) *admet deux suites extraites qui convergent vers deux limites distinctes, alors la suite* (u_n) *n'est pas convergente.*

Exercice
Montrer que la suite $((-1)^n)$ ne converge pas.

Théorème 9 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Ce théorème sera admis.

Définition 2.8. *On dit qu'une suite* (u_n) *est une* suite de Cauchy *si :*
pour tout $\epsilon > 0$*, il existe* $N_\epsilon > 0$ *tel que : pour tous* $n, p > N_\epsilon$*, on a* $\left|u_n - u_p\right| < \epsilon$.

Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est vraie pour les suites réelles ou complexes.
Exemple : La suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ est une suite de Cauchy de nombres rationnels, mais sa limite est $\sqrt{2}$ qui est un nombre réel non rationnel.

Définition 2.9. *Deux suites numériques* (u_n) *et* (v_n) *sont* équivalentes *s'il existe une suite numérique* (ε_n) *qui tend vers* 0 *et vérifiant :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$.
Quand c'est le cas, on le note $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n.}$

Remarque : Si les termes de la suite (v_n) ne s'annulent pas, alors les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition 10. *Deux suites positives et équivalentes sont de même nature.*

II. Séries numériques : position du problème, définitions et premières propriétés

On sait que la somme algébrique ne concerne qu'un nombre fini de termes. Que se passe-t-il lorsque l'on passe à un nombre infini de termes ? Il existe de nombreuses situations qui illustrent cette problématique. La plus connue est celle du paradoxe de Zénon.

II.1 Paradoxe de Zénon

Zénon (495-435 av. J.-C.) a énoncé de nombreux paradoxes. Le plus célèbre est celui de la flèche (ou d'Achille et la tortue).

> *Pour atteindre une cible immobile, une flèche parcourt, dans un premier temps, la moitié de la distance qui l'en sépare, puis dans un second temps, la moitié de la distance restante, et ainsi de suite. La flèche aura donc toujours une moitié de distance à parcourir aussi petite que soit cette distance. Donc la flèche ne devrait jamais atteindre la cible.*
> *Et pourtant, elle l'atteint.*

Derrière ce paradoxe se cache la notion de convergence des séries numériques.

II.2 Définitions, premières propriétés

Dans ce qui suit, K désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pour uniformiser l'écriture et sauf mention contraire, on suppose que les suites sont définies pour tous les entiers naturels n. Si exceptionnellement, une suite (u_n) est définie pour $n > n_0$, on conviendra de la prolonger à tout $n \leq n_0$ en posant $u_n = 0$.

Une série numérique est une suite numérique *particulière*. En effet,

Définition 2.10. *Soit (u_n) une suite numérique réelle ou complexe. La suite numérique (S_n) définie par $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est appelée* série numérique de terme général u_n*. On la note $[u_n]$.*
Les nombres u_n sont les termes *de la série.*
La suite $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est la suite des sommes partielles *de la série $[u_n]$.*

Définition 2.11 (et notation)**.** *On dit que la série numérique $[u_n]$* converge *(resp. diverge) si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ converge (resp. diverge).*
Si cette suite des sommes partielles (S_n) converge, sa limite est appelée (abus de langage) somme de la série $[u_n]$*. On la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

Remarques

1. On pourra aussi utiliser le symbole $\sum_{n\geq 0} u_n$ pour noter la série de terme général u_n. On dit alors que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou ne converge pas.

2. Le mot somme est utilisé de façon abusive car il s'agit, ici, d'une limite et non d'une somme. Une somme met toujours en jeu un nombre fini de termes.

Exemples

1. Soit a un nombre réel ou complexe.
   La *série géométrique* $[a^n]$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.
2. La série $[\frac{1}{n}]$ diverge. Posons $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Alors
   $$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
   donc (S_n) n'est pas une suite de Cauchy.
3. La série $[u_n]$ définie par $u_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ diverge.
4. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge. En effet, posons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{n!}$; la formule de Taylor-Lagrange montre que $e = \exp(1) = S_N + \dfrac{1}{(N+1)!}e^{c_N}$ avec $c_N \in]0,1[$. On a $\left|\dfrac{1}{(N+1)!}e^{c_N}\right| \leq \dfrac{e}{(N+1)!}$ qui tend vers 0 donc (S_N) converge (et sa limite est e).
5. L'écriture décimale des nombres réels.

Définition 2.12. *On appelle reste d'ordre p d'une série numérique $[u_n]$ qui converge vers S le nombre*
$$R_p = S - \sum_{n=0}^{p} u_n = u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots$$

Il est clair que si une série $[u_n]$ converge alors, son reste d'ordre p définit une suite qui converge vers 0.

Proposition 11. *Si la série numérique $[u_n]$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Attention : La condition $u_n \to 0$ est nécessaire mais pas suffisante pour que la série $[u_n]$ converge. Par exemple, la série $[\frac{1}{n}]$ diverge alors que $\frac{1}{n}$ tend vers zéro. Comme pour les intégrales généralisées en l'infini, le principe est que u_n doit tendre vers zéro "bien plus vite" que $\frac{1}{n}$ pour que la série converge (ce sera précisé plus loin).

Corollaire 12 (test d'obstruction à la convergence)**.** *Si le terme général de la suite (u_n) ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, alors la série $[u_n]$ diverge.*

Exemples

1. On a vu que la série $[u_n]$ définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ diverge. Pourtant, la suite (u_n) tend vers 0.
2. La série $[(-1)^n]$ est évidemment divergente.

Définition 2.13. *Deux séries* $[u_n]$ *et* $[v_n]$ *sont dites* de même nature *si elles convergent simultanément ou divergent simultanément.*

Proposition 13. *On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes. La somme, par contre, change (bien sûr).*

DÉMONSTRATION- En cours □

II.2.1 Structure d'espace vectoriel des séries convergentes

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des séries à coefficients dans K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On munit $\mathscr{S}$ des deux lois suivantes :

$$\forall\,[u_n],[v_n]\in\mathscr{S},\quad \text{on pose } [u_n]+[v_n]=[u_n+v_n],$$

$$\forall\,\lambda\in K,\forall\,[u_n]\in\mathscr{S},\quad \text{on pose } \lambda[u_n]=[\lambda u_n]$$

Muni de ces deux lois, $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel sur K

Proposition 14. *L'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{S}$.

DÉMONSTRATION- En cours □

Proposition 15. *Soit* $u_n = v_n + i\,w_n$ *le terme général d'une série à coefficients complexes. La série* $[u_n]$ *converge vers* $l = l_1 + i\,l_2$ *si et seulement si les séries* $[v_n]$ *et* $[w_n]$ *convergent respectivement vers* l_1 *et* l_2.

DÉMONSTRATION- Découle de la proposition précédente □

III. Séries à termes positifs.

Une série $[u_n]$ est à termes positifs si

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\quad u_n\geq 0.$$

Dans ce cas, la suite des sommes partielles, (S_n), associée à la série $[u_n]$, est croissante. Donc, elle converge si et seulement si elle est majorée.

Exemple : La série $[\frac{1}{n^2}]$ est convergente.

En effet, on a $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ donc $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<1+\sum_{n=2}^{N}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{N}<2.$

Pour étudier les séries à termes positifs, nous disposons de trois théorèmes importants ci-dessous.

Théorème 16 (critère “intégral"). *Soit f une fonction continue, positive, décroissante sur $[1,+\infty[$. La série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si la limite de la fonction $F : [1,\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ est finie (donc si $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge).*

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemple fondamental

On en déduit que la série de Riemann $[\frac{1}{n^\alpha}]$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Proposition 17 (Règle de Riemann). .

S'il existe $\alpha>1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers 0, alors $[u_n]$ converge.
S'il existe $\alpha\leq 1$ tel que $(n^\alpha u_n)$ tend vers $+\infty$, alors $[u_n]$ diverge.

Exemple : la série $[e^{-2\sqrt{n}}]$ converge puisqu'on a (par exemple) $\lim_{n\to+\infty} n^2e^{-2\sqrt{n}}=0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances).

Théorème 18 (comparaison de deux séries). *Soient $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries à termes positifs telles que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n\leq v_n$.*

1. *Si la série $[v_n]$ converge, alors $[u_n]$ converge.*
2. *Si la série $[u_n]$ diverge, alors $[v_n]$ diverge.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples

1. Nouvelle preuve que la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^3}$ (série de Riemann avec $\alpha=2$) converge : pour $n>1$, on a $\frac{1}{n^3}<\frac{1}{n^2}$ et nous savons que $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum\frac{1}{n^3}$ converge.
2. La série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car on peut minorer son terme général par $\frac{1}{n}$ et la série correspondante diverge.
   Trouver un autre argument pour établir la divergence de cette série.

Théorème 19. *Soient $[u_n]$ et $[v_n]$ deux séries à termes positifs. Si $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n$ quand n tend vers l'infini, alors $[u_n]$ et $[v_n]$ sont de même nature.*

DÉMONSTRATION- On reprend la définition de deux suites équivalentes : deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes si

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N};\quad\forall n>n_0,\quad|u_n-v_n|\leq\varepsilon|v_n|.$$

Poser $\varepsilon=\frac{1}{2}$ et utiliser ensuite le théorème précédent.

Exemples

1. La série de terme général $u_n=\frac{1}{n^2+n+1}$ converge puisque $u_n\sim\frac{1}{n^2}$.
2. Revenons à la série $[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)]$. Cette dernière diverge car $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge.

Attention. Ces théorèmes s'appliquent seulement aux séries à termes positifs.

Exemple : La série de terme général $u_n = \dfrac{2^n+5}{3^n-11}$ converge.

Corollaire 20 (Comparaison logarithmique)**.** *Soit* $[a_n]$ *et* $[b_n]$ *des séries à termes positifs telles que, pour tout* n*, on ait*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Si $[b_n]$ *converge (resp.* $[a_n]$ *diverge) alors* $[a_n]$ *converge (resp.* $[b_n]$ *diverge).*

DÉMONSTRATION- On multiplie terme à terme ces inégalités et on applique le théorème. □

IV. Séries à termes quelconques

IV.1 Séries absolument convergentes

Définition 2.14. *Une série* $[u_n]$ *est* absolument convergente *si la série des valeurs absolues (ou des modules dans* $\mathbb{C}$*)* $[|u_n|]$ *est convergente.*
Si une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Proposition 21. *Si la série* $[u_n]$ *est absolument convergente, alors la série* $[u_n]$ *converge.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples :

1. $[e^{in\theta}/n^{5/2}]$ converge absolument pour tout θ réel.
2. $[a^n/n!]$ converge absolument pour tout nombre (réel ou complexe) a.

Remarque : La réciproque de la proposition précédente est fausse. Prendre par exemple la série $[\dfrac{(-1)^n}{n}]$ qui converge (voir, plus loin, le théorème d'Abel) sans converger absolument puisque la série des valeurs absolues est la série harmonique.

Définition 2.15. *Une série numérique qui converge sans converger absolument est dite semi-convergente.*

IV.2 Un critère important de convergence

Théorème 22 (Règle de D'Alembert)**.** *Soit* $[u_n]$ *une série numérique, réelle ou complexe. On suppose que la limite de la suite* $(\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|)$ *existe. On la note* a*.*

1. *Si* $a < 1$*, la série* $[u_n]$ *converge.*
2. *Si* $a > 1$*, la série* $[u_n]$ *diverge.*
3. *Si* $a = 1$*, il faut utiliser une autre méthode (voir la règle de Raabe-Duhamel ci-dessous).*

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples

1. La série $[\dfrac{a^n}{n!}]$ est convergente pour tout $a \geq 0$.

2. La série $[\frac{a^n}{n^2}]$ est convergente pour tout a tel que $0 \leq a < 1$ (montrer de deux manières différentes).
   Pour $a > 1$, elle est divergente et pour $a = 1$, c'est une série de Riemann convergente.
3. La série $[\frac{a^n}{n}]$ est convergente pour tout a tel que $0 \leq a < 1$. Pour $a \geq 1$, elle est divergente (pourquoi ?).
4. Trouver un exemple d'application du troisième cas de la règle de D'Alembert.

Exercice 2.1. *Montrer que si la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ *diverge vers l'infini, alors la série* $[u_n]$ *diverge.*

Pour des séries à termes positifs, on peut se souvenir du critère de comparaison logarithmique (corollaire 20) ; on peut parfois aussi utiliser ce raffinement de la règle de d'Alembert.

Proposition 23 (Règle de Raabe-Duhamel)**.** *Soit* $[u_n]$ *une série à termes strictement positifs telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
– *Si* $\alpha > 1$ *alors* $[u_n]$ *converge.*
– *Si* $\alpha < 1$ *alors* $[u_n]$ *diverge.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemple : la série de terme général $u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$: on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1/2}{n} + o(1/n)$ donc la règle de Raabe-Duhamel montre que $[u_n]$ diverge.
Mentionnons maintenant un autre critère de convergence, mais d'un emploi plus délicat.

Théorème 24 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $[u_n]$ *une série numérique, réelle ou complexe. On suppose que la limite de la suite* $\sqrt[n]{|u_n|}$ *existe. On la note* a.

1. *Si* $a < 1$, *la série* $[u_n]$ *converge.*
2. *Si* $a > 1$, *la série* $[u_n]$ *diverge.*
3. *Si* $a = 1$, *il faut utiliser une autre méthode.*

Exemples

1. La série $[\frac{a^n}{n^n}]$ converge pour tout $a \geq 0$.
2. La série $[\frac{a^n}{n}]$ converge pour tout $0 \leq a < 1$ car $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}) = 1$; elle diverge pour $a \geq 1$.
3. Soit a et b deux nombres complexes non nuls. La série numérique $[u_n]$ définie par $u_{2n} = a^{n+1}b^n$ et $u_{2n+1} = a^{n+1}b^{n+1}$ converge si $|ab| < 1$. En effet, d'après le critère de Cauchy, $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{|u_n|}) = \sqrt{|ab|}$.
   Remarquons que le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite si $a \neq b$.

Exercice 2.2. *Exprimer les sommes partielles de la dernière série.*

Théorème 25 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (a_n) une suite de nombres positifs décroissant vers 0. Alors la série alternée $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Ce théorème est en fait une conséquence du théorème d'Abel suivant, qui sera admis. Les exemples qui en découlent sont importants à retenir.

Proposition 26 (Forme réduite du théorème d'Abel)**.** *Soit $[a_n v_n]$ une série qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La suite de terme général $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ est bornée (c'est à dire : $|V_n|$ est borné).*
2. *la suite (a_n) est réelle, décroissante et tend vers zéro.*

Alors la série $[a_n v_n]$ converge.

Corollaire 27 (Critère d'Abel pour les séries trigonométriques)**.** *Soit (a_n) une suite de nombres positifs décroissant vers 0. Alors la série $\sum_n e^{i\,n\theta} a_n$ est convergente.*

DÉMONSTRATION- En cours □ □

Exemples importants. Les séries trigonométriques suivantes convergent si $\theta \neq 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$.

$$[\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}], \quad [\frac{e^{-in\theta}}{n^\alpha}], \quad [\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}], \quad [\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}].$$

IV.3 La formule de Stirling

Proposition 28 (Formule de Stirling)**.** *La factorielle de n admet l'équivalent suivant :*

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\, n^n.$$

En examinant la démonstration de cette identité, on obtient le développement asymptotique

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}).$$

V. Calcul approché de la somme d'une série

Position du problème

Le calcul d'une limite conduit, en général, à un processus infini. Pour en obtenir une approximation numérique, on cherchera à calculer un nombre fini de termes et à majorer l'erreur commise dans cette approximation.

Prenons pour exemple le calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (valeur exacte) avec la précision de 10^{-4}. Pour cela, nous utilisons la relation suivante (vu au premier chapitre) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$$
De la majoration $\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\right| \leq \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$, on déduit que lorsque n tend vers l'infini, le second membre tend vers la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (qui existe, puisque la série converge). Donc, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.
La relation ci-dessus nous permet d'approximer la valeur de ln(2) à l'aide des nombres rationnels. Si on arrête le développement de ln(2) à l'ordre n, la valeur absolue du reste sera majoré par $\frac{1}{n+2}$. Par conséquent, pour que l'erreur ne dépasse pas 10^{-4}, il suffit de pousser le développement jusqu'à n tel que $\frac{1}{n+2} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire, $n \geq 1998$.
L'estimation (ou la majoration) du reste d'une série numérique est en général difficile.

V.1 Le cas des séries géométriques

On a alors $\sum_{n=1}^{N} a^n + \frac{a^{N+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ donc on a une formule explicite pour le reste R_N :
$$R_N = \frac{a^{N+1}}{1-a}.$$

V.2 Le cas des séries télescopiques

Considérons une série $[a_n]$ que l'on sache écrire sous la forme $a_n = b_{n+1} - b_n$. Quand on écrit $\sum_{n=1}^{N} a_n$ les termes en b_n et $-b_n$ vont se « télescoper » et on aura $\sum_{n=1}^{N} a_n = b_{N+1} - b_1$. L'étude de la série $[a_n]$ est ramenée à celle de la suite (b_N). Ce procédé de sommation « télescopique » est un analogue discret de la méthode usuelle pour calculer des intégrales : si on connait une primitive F de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Dans notre procédé ci-dessus, a_n jouerait le rôle de la fonction f et b_n serait un analogue discret de sa primitive F dans l'expression $\sum_{n=1}^{N} a_n = b_{N+1} - b_1$. L'art d'écrire une somme sous forme télescopique est subtil ; c'est comme ça, par exemple, que des logiciels comme MAPLE ou MATHEMATICA calculent des valeurs explicites pour des expressions du type $\sum_{n=1}^{N} a_n$.

V.3 Le cas des séries alternées

Théorème 29 (des séries alternées)**.** *Soit $[(-1)^n a_n]$ une série alternée où la suite à termes positifs (a_n) est décroissante et converge vers 0. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles, R_n, celle de ses restes d'ordre n et S sa somme. Alors,*

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$,
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq a_{n+1}$.

DÉMONSTRATION- voir la preuve du théorème 27 page 30 □

V.4 Le cas d'une série $[f(n)]$

Plaçons nous dans le contexte du critère intégral (théorème 16 page 27). Soit f une fonction continue, positive, décroissante sur $[0,+\infty[$. Nous savons que la série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Supposons que c'est le cas et voyons comment obtenir une majoration du reste. Notons $S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ les sommes partielles et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$ le reste d'ordre N. On a alors (reprendre la preuve du théorème 16)

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} f(x)dx$$

Si on a un moyen de majorer la valeur de $\int_N^{+\infty} f(x)dx$, alors on en déduit une majoration du reste R_N : on peut estimer l'erreur commise en estimant $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ par le nombre $\sum_{n=N}^{+\infty} f(n)$.

De manière analogue, on montre que : si l'intégrale diverge, alors $S_N \underset{+\infty}{\sim} \int_0^N f(x)dx$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

I. Suites de fonctions

On appelle *suite de fonctions* toute suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions d'un même intervalle I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). L'ensemble des fonctions définies et bornées sur I sera noté $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ dans ce qui suit. Ces suites de fonctions apparaissent naturellement dans de nombreux modèles. Une application fréquente en informatique graphique ou en physique est que, par passage à la limite, elles permettent aussi de manipuler des objets qui ne sont pas des fonctions : cela se verra sur les dessins ci-dessous.

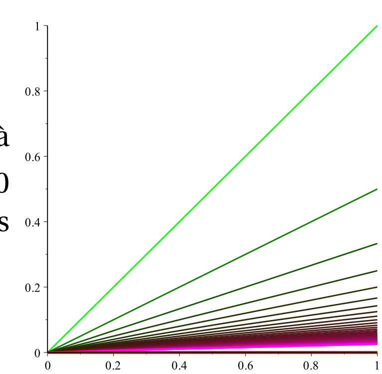
I.1 Convergence simple d'une suite de fonctions

La notion de « convergence »peut prendre plusieurs sens différents pour de telles suites.

Définition 3.1. *Soit $x_0 \in I$. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) de $\mathscr{F}(I,K)$* converge simplement *au point x_0 si la suite (de nombres) $f_n(x_0)$ converge.*
On note $f(x_0) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ sa limite.
On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement *vers la fonction f si, pour tout $x_0 \in I$, la suite (de nombres) $f_n(x_0)$ converge vers le nombre $f(x_0)$.*

Pour étudier la convergence simple : on fixe une valeur de x et on fait tendre n vers l'infini.
On fait ça pour chaque $x \in I$: cela donne la fonction limite $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Exemple 1 : On prend l'intervalle $I = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.

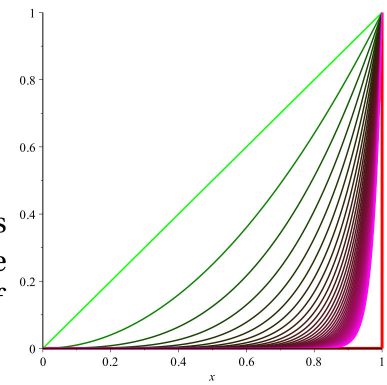


Le graphe de f_n est une droite de pente $\dfrac{1}{n}$. On voit donc que, à la limite, ces droites vont tendre vers la droite d'équation $y = 0$ (en rouge sur la figure). De fait, si on fixe un $x_0 \in [0,1]$, alors $f_n(x_0) = \dfrac{x_0}{n}$ et on voit bien que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{n} = 0$.

Exemple 2 : On prend l'intervalle $I = [0,]$ et $f_n(x) = x^n$.

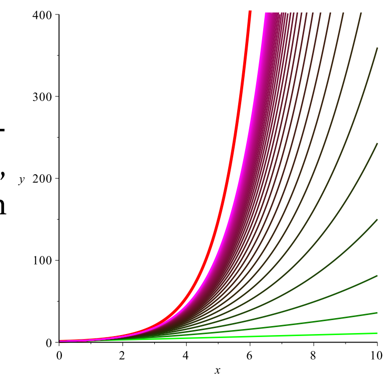
Pour $x_0 \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^n = 0$ donc

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$



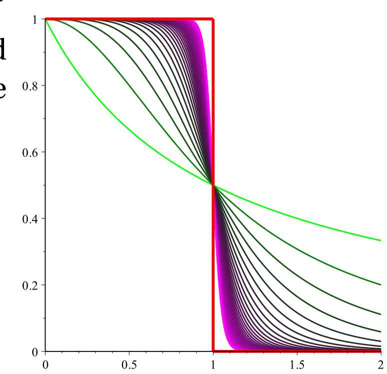
Les graphes des f_n semblent, graphiquement, tendre vers un demi-carré (en rouge), qui n'est pas le graphe d'une fonction. Ceci se traduit par le fait que la fonction limite f n'est pas continue alors que les f_n l'étaient.

Exemple 3 : On prend l'intervalle $I = [0,10]$ et $f_n(x) = (1+\dfrac{x}{n})^n$.



Le calcul de la limite de f_n conduit à une forme indéterminée. On note que $f_n(x) = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$. On en déduit que, pour x_0 fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = e^{x_0}$. Donc $f(x) = e^x$ (graphe en rouge).

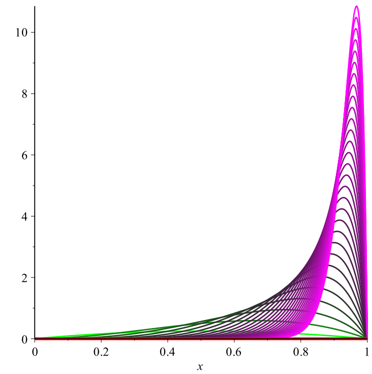
Exemple 4 : On prend l'intervalle $I = [0,2]$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.



Là encore, les graphes des f_n tendent vers le violet quand n grandit. On voit que les graphes des f_n tendent vers une sorte de signal carré (en rouge). Concrètement,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in [1,2[\end{cases}$$

Exemple 5 : On prend l'intervalle $I = [0,1]$ et $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$.



Il est facile de voir que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. On note que le maximum de f_n semble croitre en s'approchant de 1. Ici, il se passe un phénomène étonnant :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$$

En effet,

$$\int n^2 x^n (1-x)\, dx = -\frac{x^{n+1} n^2 ((n+1)x - n - 2)}{(n+1)(n+2)}$$

donc

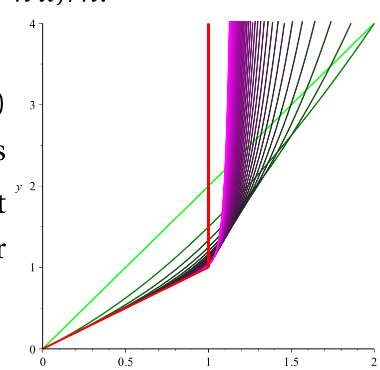
$$\int_0^1 n^2 x^n (1-x)\, dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Une étude rapide f_n permet de trouver son maximum sur $[0,1]$.
La dérivée est $f_n'(x) = -\dfrac{n^2 x^n (-n + nx + x)}{x}$. Elle s'annule en $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ et f_n atteint un max en x_n. La valeur de f_n en ce point est

$$M_n = f_n(x_n) = n^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

L'expression de M_n semble compliquée, mais on trouve facilement sa limite avec un développement limité. On sait que $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + (\dfrac{1}{n})^2 + O\left((\dfrac{1}{n})^3\right)$ (car $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0).
Alors $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \exp^{n \ln(\frac{n}{n+1})} = \dfrac{1}{e}\left(1 + \dfrac{1}{2n} + O\left((\dfrac{1}{n})^2\right)\right)$.
On en déduit (faire le calcul) que $M_n = \dfrac{1}{e}\left(n - 1/2 + O\left((\dfrac{1}{n})^1\right)\right)$ et donc $\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.

Exemple 6 : On prend l'intervalle $I = [0,2]$ et $f_n(x) = (x^n + n\,x)/n$.



Pour $x < 1$, le terme x^n tend vers 0 donc (x est fixé) $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$. Pour $x = 1$, $f_n(1) = \dfrac{1+n}{n}$ qui tend vers 1. Pour $x > 1$, on a $x^n >> n\ x$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{n-1}$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. On voit que la suite (f_n) converge sur l'intervalle $[0,1]$ mais pas sur l'intervalle $[0,2]$.

On voit sur ces exemples plusieurs phénomènes étonnants :

– Dans les exemples 2 et 4, les graphes des f_n tendent vers un graphe qui n'est pas celui d'une fonction.
– Dans ces deux exemples 2 et 4, les f_n sont continues mais la limite ne l'est pas.
– Dans l'exemple 5, on a $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = 1$ alors que $\int_0^1 \lim_n f_n(x)dx = 0$.

On voit donc que la convergence simple préserve peu de propriétés des fonctions. Nous allons donc voir un mode de convergence plus fort qui, lui, préserve ces bonnes propriétés.

I.2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 3.2. *Une suite de fonctions (f_n) de $\mathscr{F}(I,K)$ converge uniformément s'il existe une fonction $f \in \mathscr{F}(I,K)$ telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \text{ tel que } \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \text{on ait :} \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction f est alors appelée limite uniforme *de la suite (f_n).*

En d'autres termes, si on considère une bande d'épaisseur ϵ autour du graphe de f (on parle aussi de « tube » de rayon ϵ) alors, pour n assez grand, tous le graphe de chaque f_n est entièrement contenu dans ce tube : pour n assez grand, on a que $\forall x \in I$, $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$.

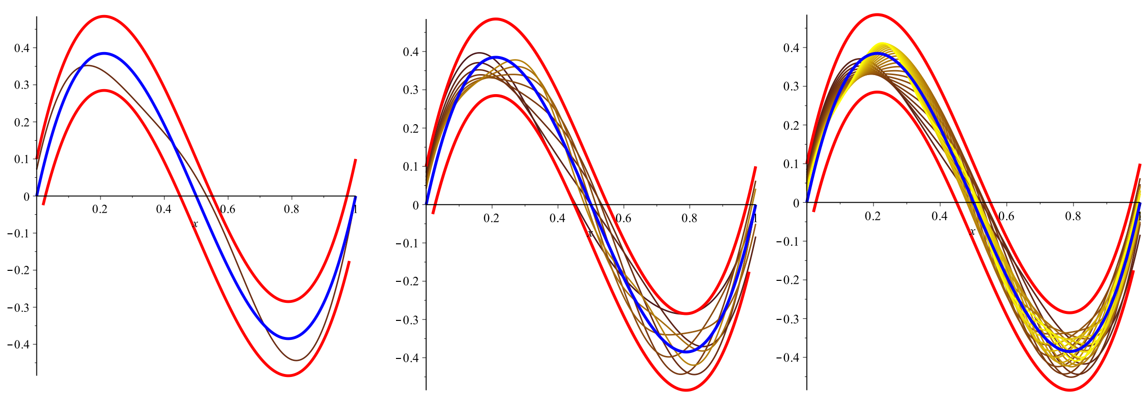


FIGURE 3.1 – Convergence uniforme : $f(x) = 4x(2x-1)(x-1)$ est en bleu, le « tube » $f(x) \pm \epsilon$ est en rouge, les $f_n(x) = f(x) + \frac{\cos\left(\frac{\pi n x}{4}\right)}{n}$ sont tous dans le tube pour $n \geq 9$.

Dans nos exemples, on voit graphiquement qu'il y a convergence uniforme dans l'exemple 1 (et le 6 pour $I = [0,1]$) et qu'il n'y a pas convergence uniforme dans les exemples 2,4 et 5. Dans l'exemple 3, on devine qu'il semblerait y avoir convergence uniforme pour $I = [0,10]$ mais il faudrait le démontrer. La méthode ci-dessous permet de le faire.

Proposition 1. *Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f.*

Remarquons que les limites simple et uniforme d'une suite de fonctions, quand elles existent, sont identiques.

Proposition 2. *Une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si, et seulement si, la suite numérique M_n définie (à partir d'un certain rang) par*

$$M_n = (\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|)$$

converge vers 0.

Étude de la convergence uniforme. On détermine la limite (simple) $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. On pose $g_n = f_n - f$. On étudie la fonction g_n (dérivée, variations) pour trouver $M_n := \sup\limits_{x\in I} |g_n(x)|$. On étudie la suite M_n : il y a convergence uniforme si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

Exemple 3 (suite)

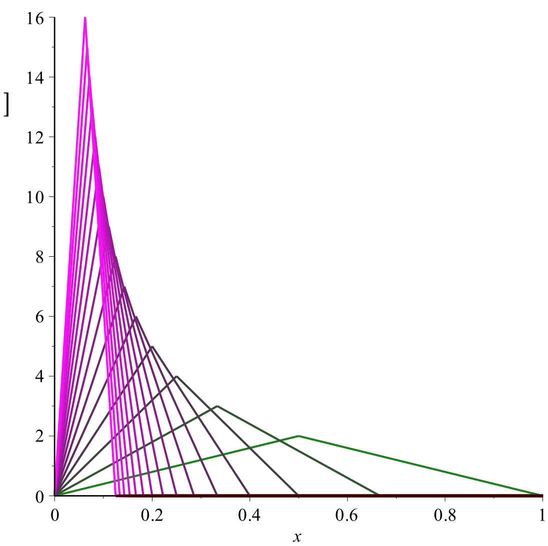
On pose $g_n = f(x) - f_n(x) = e^x - (1+\dfrac{x}{n})^n$. On montre (calculez la dérivée, on a $g_n' > g_n$ et une récurrence montre que $g_n > 0$) que g_n est croissante. On a donc $M_n := \sup\limits_{x\in[0,10]} |g_n(x)| = g_n(10)$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(10) - f_n(10) = 0$.
Il y a donc convergence uniforme sur l'intervalle $[0,10]$.
Attention : si $I = \mathbb{R}^+$ alors $M_n = \infty$ et on perd la convergence uniforme.

Exemple 8 :

La suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1]$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad x \in [0, \dfrac{1}{n}] \\ n^2(\dfrac{2}{n} - x) & \text{si} \quad x \in [\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\dfrac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

n'est pas uniformément convergente.



II. Propriétés des suites de fonctions uniformément convergentes

Théorème 3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $I \subset K$ et à valeurs dans K. Si elle converge uniformément vers f, alors la fonction f est continue.*

DÉMONSTRATION- En cours □

De ce théorème, on déduit immédiatement le corollaire

Corollaire 4. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $I \subset K$ et à valeurs dans K. Si elle converge simplement vers une fonction f non continue, alors la convergence n'est pas uniforme.*

Exemples

1. La suite définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$,ne converge pas uniformément vers f (où $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$) car la suite numérique $(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|) = (1)$ ne converge pas vers 0.
2. La suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$ converge vers la fonction nulle qui est continue. Pourtant, la convergence n'est pas uniforme (faites le, c'est l'exemple 5)

Théorème 5. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur l'intervalle réel $[a,b]$. Si elle converge uniformément vers f alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples

1. La suite (f_n) où $f_n(x) = \left(\frac{x^n}{n}\right)$ converge uniformément vers zéro sur $[0,1]$ vérifie bien l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$.
2. La suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2 x^n (1-x)$ converge vers la fonction nulle. D'après le calcul

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n^2 x^n (1-x)dx = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1,$$

   la suite (f_n) ne converge donc pas uniformément vers 0.
3. Comme pour le théorème 1, la condition de convergence uniforme n'est pas nécessaire comme le prouve la suite de terme général f_n où $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$; en effet, on a déjà vu que (f_n) ne converge pas uniformément vers f ; cependant,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Théorème 6. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles ou complexes dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si*

1. *il existe un point $x_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(x_0))$ converge,*
2. *la suite (f_n') converge uniformément vers g sur I,*

alors la suite (f_n) converge uniformément sur I, sa limite f est dérivable et de dérivée égale à g : $f' = g$.

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples

1. Dans les exemples 1 et 3 du début, la suite dérivée (f_n') est uniformément convergente.
2. La suite des $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ tend uniformément vers zéro sur $[0,1]$ et la suite dérivée (f_n') ne converge pas uniformément.
3. La suite des $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ converge uniformément vers 0. La suite des fonctions dérivées f_n' n'a pas de limite du tout quand n tend vers l'infini.
4. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_n définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ sont continues et dérivables. La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction « valeur absolue » , qui n'est pas dérivable en 0 bien que chaque f_n le soit.

III. Séries de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonction. On peut lui associer la *série de fonctions* $[f_n]$ en introduisant la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$. Étudier la série de fonctions $[f_n]$ revient à étudier la suite de fonctions (S_n) en utilisant les techniques du chapitre précédent.

III.1 Convergence simple, uniforme et absolue

Définition 3.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I et $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ la suite des sommes partielles associées. On dit que la série de fonctions $[f_n]$ converge* simplement *(resp.* uniformément*) si la suite de fonctions (S_n) converge simplement (resp. uniformément).*

Exemple fondamental
La série géométrique $[f_n]$ pour $n \geq 1$, définie sur $[-\alpha, \alpha]$ (avec $\alpha \in [0,1[$) par $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{1}{1-x}$.
Par contre, cette même série ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (pourquoi ?).

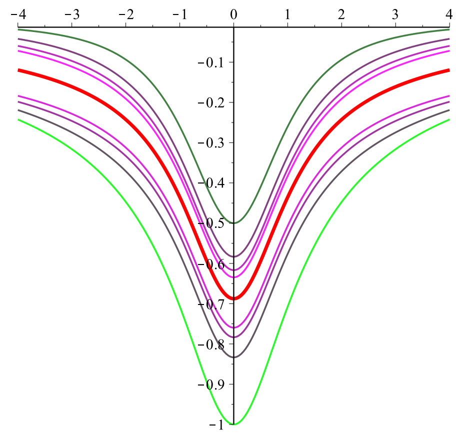
Définition 3.4. *On dit que la série de fonctions $[f_n]$* converge absolument *si la série de fonctions $[|f_n|]$ (la série dont le terme général est la valeur absolue des f_n) converge.*

On établit (de façon analogue aux séries numériques) le résultat suivant.

Proposition 7. *Si la série $[f_n]$ converge absolument, alors elle converge simplement.*

Exemple

1. Considérons la série de terme général $f_n = \dfrac{x^n}{n!}$ définie sur $\mathbb{R}$. La règle de d'Alembert montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette série $\sum_n f_n(x)$ converge (vers l'exponentielle e^x).
2. La série $[f_n]$ définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{e^{nx}}$ converge absolument (à montrer).
3. La série de terme général $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x^2+n^2}}$ est une série alternée. Elle n'est pas absolument convergente (montrez le) mais elle est simplement convergente (montrez le). Sur le graphique, on voit les sommes partielles (du vert au violet, suivant n) qui alternent autour de la limite (en rouge), à cause du $(-1)^n$.



Supposons qu'une série de fonction $[f_n]$ converge, c'est à dire que $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_n$ converge vers une fonction S. Comme dans le chapitre précédent, le reste d'ordre n est défini par $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)$. Il y a convergence uniforme si

$$\sup_{x\in I} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in I} |R_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les résultats vus pour les suites de fonctions nous donnent immédiatement :

Théorème 8. *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonction convergeant uniformément vers S sur l'intervalle I.*

1. *Si les f_n sont bornées sur I, alors S est bornée sur I.*
2. *Si les f_n sont continues sur I, alors S est continue sur I.*
3. *Si les f_n sont intégrables sur l'intervalle borné I, alors S est intégrable sur I et*

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

4. *Si $\sum_n f_n'$ converge uniformément vers T, alors S est dérivable et $S' = T$, c'est à dire*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'$$

III.2 Convergence normale

On voit que la convergence uniforme est une propriété forte mais elle va être souvent bien difficile à montrer. Nous allons donc introduire un autre mode de convergence à la fois plus fort et plus facile (en général) à manipuler.

Définition 3.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction bornées sur I. Soit $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{R})$. On appelle* norme (infinie) de f sur I *le nombre* $||f||_\infty := \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$.

On pourra juste dire « norme de f ». La norme vérifie les deux inégalités triangulaires $||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g||$ et $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Définition 3.6. *Soit $f_n \in \mathscr{B}(I,\mathbb{R})$ une série de fonctions bornées sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $[f_n]$* converge normalement *quand la série $\sum\limits_n ||f_n||$ converge.*

> Pour étudier la convergence normale : on étudie les variations de la fonction f sur I. On en déduit $||f_n|| = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$ (si tout va bien) et on étudie alors la série de terme général $||f_n||$.
> Parfois, il suffit de trouver un nombre $m_n > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $|f(x)| \leq m_n$. Si la série $\sum\limits_n m_n$ est convergente, alors la série $\sum\limits_n f_n$ est normalement convergente.

De la définition, on déduit la proposition suivante.

Proposition 9. *La série $[f_n]$ converge normalement si, et seulement si, il existe une suite de réels (m_n) telle que*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq m_n$,*
2. *la série numérique $\sum\limits_n |m_n|$ converge.*

DÉMONSTRATION- En cours □

> **Théorème 10.** *Si la série $[f_n]$ converge normalement alors elle converge simplement, absolument, et uniformément.*

DÉMONSTRATION- En cours □

On voit donc que si on montre la convergence normale, alors on a « gratuitement » toutes les merveilleuses propriétés découlant de la convergence uniforme (continuité, intégralité, décidabilité).

Exemples :

1. La série $[f_n]$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement (à montrer).
2. La série $[\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}]$ converge absolument pour $x > 1$, diverge pour $x \leq 0$. Que se passe-t-il pour les autres valeurs réelles de x ?

On voit que la convergence normale implique la convergence uniforme. Il existe néanmoins des séries pour lesquelles on a convergence uniforme sans avoir la convergence normale (par exemple, certaines séries alternées).

Exemple : On considère la séries de fonctions f_n définies sur $I = [0, +\infty[$ par $f_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$. Pour x fixé, le critère des séries alternées montre que $\sum_n f_n(x)$ converge. De plus, la majoration du reste d'une série alternée (voir chapitre précédent) montre que

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

On voit que $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$ donc on a bien convergence uniforme (notez qu'on a montré la convergence uniforme *sans connaitre la limite*). Mais $||f|| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc on n'a pas convergence normale.

III.3 Autres propriétés

On reprend les trois grands théorèmes vus dans le cadre des suites de fonctions.

Théorème 11. *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonction convergeant normalement vers S sur l'intervalle I (c'est à dire que $\sum_n f_n$ converge vers S et $\sum_n ||f_n||$ converge).*

1. *Si les f_n sont bornées sur I, alors S est bornée sur I.*
2. *Si les f_n sont continues sur I, alors S est continue sur I.*
3. *Si les f_n sont intégrables sur l'intervalle borné I, alors S est intégrable sur I et*
$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)dx.$$
4. *Si $\sum_n f_n'$ converge normalement (donc uniformément) vers T, alors S est dérivable et $S' = T$, c'est à dire*
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)'$$

Il existe deux classes importantes de séries de fonctions : les séries entiéres et les séries trigonométriques. Les chapitres suivants les étudient plus en détail.

Chapitre 4

Séries entières

On appelle *série entière* réelle (resp. complexe) une série de fonction de la forme $\sum a_n x^n$ où x est une variable réelle (resp. $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe).
Les nombres (réels ou complexes) a_n sont appelés les *coefficients* de la série entière.
Le premier terme a_0 d'une série entière $\sum a_n z^n$ est dit terme constant.
Dans tout ce qui suit, le corps K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant le contexte.

Les séries entières sont importantes pour plusieurs raisons.

- Les fonctions les plus simples à étudier et surtout à *évaluer* sont les fonctions polynomiales : il est donc naturel d'approcher des fonctions compliquées par des polynômes.

- L'étude des séries entières permet de préciser le domaine de validité des développements de Taylor, c'est à dire le passage à la limite des approximations polynomiales d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

- Elles permettent de trouver des solutions à des problèmes (par exemple des équations différentielles) pour lesquelles il n'y a pas de « formule explicite » donnant les solutions. Elles sont aux fonctions ce que les développements décimaux sont aux nombres réels.

I. Disque et rayon de convergence

Rappelons que si, pour z_0 fixé dans K, la série numérique $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors, nécessairement $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. En particulier, la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée.

Lemme 4.1. *On considère une série entière $\sum a_n z^n$. Soit $z_0 \in K$ non nul. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.*
De même, si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.

Dit autrement : Si la suite numérique $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, la série $\sum a_n z^n$ converge (absolument) sur tout le disque ouvert $\Delta(0, |z_0|)$ de centre 0 et de rayon $|z_0|$.

DÉMONSTRATION- Comme la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, il existe un réel A tel que, quel que soit l'entier naturel n, $|a_n z_0^n| \leq A$. Cela implique, pour $z_0 \neq 0$, que

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}| \leq A|\frac{z^n}{z_0^n}|.$$

Par conséquent, si $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument car elle est majorée par une série géométrique de raison inférieure strictement à 1. □

Exemples

1. Une fonction polynomiale est une série entière particulière. la suite $(a_n z^n)$ correspondante est évidemment bornée (pourquoi ?).
2. La suite (z^n) est bornée en $z_0 = 1$. Par conséquent, la série entière $\sum z^n$ est absolument convergente sur le disque unité ouvert centré en 0 (fait déjà connu).
3. La suite $(\frac{z^n}{n!})$ est bornée quel que soit z appartenant à $\mathbb{C}$ (à montrer). Par conséquent la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Théorème/Définition 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.*
Il existe un unique réel $R \in [0, +\infty]$ tel que :
- *la série diverge pour $|z| > R$.*
- *la série converge absolument pour $|z| < R$.*

Ce nombre R est appelé rayon de convergence *de la série.*
Le disque de convergence *de la série est $D(O, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.*

Le rayon de convergence d'une série entière peut être fini (éventuellement nul) ou infini. Le domaine de convergence d'une série entière est un disque ouvert auquel s'ajoutent éventuellemnt des points de sa « frontière » : une fois R connu, il faut étudier séparément le cas $|z| = R$.

Remarquons aussi que si pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors, nécessairement $|z_0| < r$.

Corollaire 2. *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est égal à la borne supérieure des modules $|z_0|$ tels que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.*

Le rayon de convergence d'une fonction polynomiale (considéré comme série entière) est égal à l'infini.

Les rayons de convergences des séries entières $\sum z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ sont respectivement égaux à 1 et $+\infty$.

Corollaire 3. *Soit $\sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence R. S'il existe z_0 tel que $\sum a_n\, z_0^n$ soit convergente mais pas absolument convergente, alors $R = z_0$.*

DÉMONSTRATION- En cours □

Théorème 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. La série converge normalement sur tout disque $\Delta(0,\rho)$ de rayon $\rho < R$.*

Ceci montre aussi que la série entière converge uniformément sur tout disque $\Delta(0,\rho)$ où $\rho < R$.

DÉMONSTRATION- En cours □

Exemples

1. Nous avons déjà vu que la série entière $\sum z^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$. En fait, elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[-\alpha,\alpha]$ où $\alpha \in [0,1[$.
2. La série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{\Delta(0,R)}$, mais n'est pas uniformément convergente sur tout $\mathbb{C}$.
   Réécrire cette phrase pour l'exponentielle réelle.

Remarque : Le domaine de convergence d'une série entière n'est jamais vide. puisqu'il contient au moins le nombre nul. Par contre, le disque de convergence (qui ne comprend pas sa frontière) peut être vide (voir, par exemple, la série entière $[n!z^n]$).

Théorème 5 (critère de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ (pour n assez grand). Si la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite $L \in [0,+\infty[$, alors le rayon de convergence de $[a_n]$ est $R = \dfrac{1}{L}$.*

Nous employons ici la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

DÉMONSTRATION- En cours □

II. Opérations sur les séries entières

II.1 Somme et produit de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

Définition 4.2.
1. *On appelle* somme *des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.*
2. *On appelle* produit[1] *des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ définie par $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.*

Proposition 6. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. Les rayons de convergence r_s et r_p des somme et produit de deux séries sont supérieurs ou égaux au minimum des rayons R_1 et R_2 : $R_s \geq \min(R_1,R_2)$ et $R_p \geq \min(R_1,R_2)$.*

1. On parle parfois de « produit de Cauchy » des séries.

DÉMONSTRATION- La série somme converge absolument pour tout z tel que $|z| < \min(R_1, R_2)$, car elle est majorée par la série numérique $\sum(|a_n| + |b_n|)|z|^n$ qui converge.
Le cas de la série produit sera traité en cours. $\square$

Remarque : Pour la somme comme pour la produit, lorsque $|z| \geq \min(R_1, R_2)$, tout peut se produire.
Ainsi, les séries $\sum z^n$ et $\sum b_n z^n$ où $b_0 = 1, b_1 = -1, b_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ ont pour rayons de convergence respectivement 1 et $+\infty$; le rayon de convergence de leur série produit est égal à l'infini.

II.2 Série dérivée d'une série entière

Définition 4.3. *On appelle série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ la série $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$.*

Exemple
La série dérivée de la série entière $\sum z^n$ est $\sum(n+1)z^n$

Remarque : La série dérivée peut aussi s'écrire $\sum n a_n z^{n-1}$.

II.3 Série intégrale d'une série entière

Définition 4.4. *On appelle série intégrale de la série entière $\sum a_n z^n$ la série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.*

On l'écrit aussi $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

Exemple
La série intégrale de la série entière $\sum z^n$ est $\sum \frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

III. Propriétés de la fonction somme $S(z) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$

Désignons par $S(z) := \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de la série numérique $\sum a_n z^n$, quand elle converge.
Elle est définie pour $|z| < R$ (et éventuellement des points de la frontière du disque de convergence $\Delta(0, R)$).

III.1 Dérivation et intégration terme à terme

Théorème 7. *Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière, de rayon de convergence R, pour $|z| \leq r < R$. Alors la série dérivée $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ a aussi pour rayon de convergence R. La fonction S est dérivable sur le disque $\Delta(0, r)$ et la série dérivée a pour somme S' sur $\Delta(0, r)$:*
$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 8. *La fonction S est continue dans le disque* $\Delta(0,r)$.

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 9. *Dans le cas d'une série entière à coefficients réels, la fonction S est de classe* $\mathscr{C}^{\infty}$ *sur* $]-r,r[$ *et la dérivée* p*-ième de S est égale à la somme de la série dérivée* p*-ième de la série* $\sum a_n z^n$ *:*

$$S^{(p)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}.$$

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 10. *Pour tout* $p \geq 0, \quad S^{(p)}(0) = p! a_p$.

Corollaire 11. *Une série entière* $\sum_n a_n x^n$ *a pour somme la fonction* 0 *sur* $]-R,R[$ *si et seulement si tous les* a_n *sont nuls.*

Théorème 12 (Théorème d'intégration terme à terme)**.** *Dans le cas d'une série entière à coefficients réels La fonction S est intégrable et son intégrale est égale à la somme de la série intégrale :*

$$\forall\, t \in]-r,r[, \quad \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}.$$

Exemples

1. Pour tout nombre z tel que $|z| < 1$, la série entière $[n a_n z^{n-1}]$ (série dérivée de $[a_n z^n]$) a pour somme la dérivée de la somme $\frac{1}{1-x}$, c'est-à-dire $\frac{1}{(1-x)^2}$.
2. D'après le théorème précédent, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

IV. Applications

IV.1 Développements en série entières usuels

Définition 4.5. *Soit* $R \in \mathbb{R}_+$ *et* $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est* développable en série entière *sur* $]-R,R[$ *s'il existe une série* $\sum a_n x^n$ *telle que*

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit que f *est développable en série entière en 0 s'il existe* $R > 0$ *tel que la condition ci-dessus soit satisfaite.*

Il découle du paragraphe précédent que si f est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ (i.e indéfiniment dérivable). De plus, si c'est le cas, alors la série entière $\sum a_n x^n$ coïncide avec le développement de Taylor de f : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Les développements en série entière des fonctions usuelles apparaissent comme étant leurs développements limités « infinis » (la limite de leur développement limité quand l'ordre tend vers l'infini). Ils se déduisent presque tous des trois développements que vous connaissez déjà par coeur :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \exp(x), \quad (1+x)^\alpha.$$

En voici quelques-uns :

$$\begin{array}{rclclclc}
 & & \dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n & ,R=1 \\
\dfrac{1}{(1-x)^2} & = & (\dfrac{1}{1-x})' & = & 1+2\,x+3\,x^2+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=1 \\
\ln(1-x) & = & \displaystyle\int \dfrac{1}{1-x} & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=1 \\
\arctan(x) & = & \displaystyle\int \dfrac{1}{1+x^2} & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=1 \\
 & & \exp(x) & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} & ,R=+\infty \\
\cos(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{i\,x}+e^{-i\,x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=+\infty \\
\sin(x) & = & \dfrac{1}{2i}(e^{i\,x}-e^{-i\,x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=+\infty \\
\cosh(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=+\infty \\
\sinh(x) & = & \dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=+\infty \\
 & & (1+x)^\alpha & = & 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n & ,R=1 & & \\
 & = & & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R= \\
 & = & & = & & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & ,R=
\end{array}$$

IV.2 Résolution d'équation différentielle

On considère l'équation différentielle linéaire

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{IV.1}$$

où P, Q, R sont trois fonctions polynomiales.
On admet le théorème d'existence de solutions de l'équation différentielle linéaire (IV.1) suivant.

Théorème 13 (de Cauchy)**.** *Pour tout point a qui n'annule pas la fonction polynomiale P, il existe une solution développable en série entière $\sum a_n(x-a)^n$ de rayon de convergence $\rho_a > 0$.*

Se mettant dans le cadre de ce théorème, résoudre une équation différentielle linéaire (IV.1) revient à trouver les coefficients de son développement en série entière.

Remarque : Les coefficients de la série entière $\sum a_n(x-a)^n$, solution de l'équation différentielle linéaire (IV.1), vérifient une (double) relation de récurrence.

Exemple : Résolvons l'équation $(x^2-2x)y'' + 6(x-1)y' + 6y = 0$ dans $\mathbb{R}$, sachant que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$.
Cherchons y sous forme d'une série entière en $(x-1)$. Posons $X = x-1$. L'équation devient

$$(X^2-1)y'' + 6Xy' + 6y = 0$$

Après les substitutions

$$\begin{array}{rcl} y & = & X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots \\ y' & = & 1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} + \cdots \\ y'' & = & 2a_2 + 6a_3X + \cdots + n(n-1)a_n X^{n-2}. \end{array}$$

l'équation devient

$$-2a_2 + X(-6a_3+12) + X^2(20a_2 - 12a_4) + \cdots + X^n(n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}$$

$$+6na_n + 6a_n) + \cdots = 0.$$

D'où $a_2 = 0$; $a_3 = 2; \cdots; a_{n+2} = \dfrac{n+3}{n+1}a_n$, pour $n \geq 2$.
On en déduit $a_{2n} = 0$ et $a_{2n-1} = n$, c'est-à-dire

$$y = \sum_{n\geq 1} n(x-1)^{2n-1}.$$

Le rayon de convergence de cette série est égal à 1. L'intervalle de convergence est $]0,2[$.
On pouvait considérer cette équation différentielle dans $\mathbb{C}$. Les mêmes calculs nous conduiront au disque de convergence de centre 1 et de rayon 1.

IV.3 Calcul d'intégrales

Les primitives de certaines fonctions sont difficiles à exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Pour les évaluer, il existe de nombreuses méthodes et parmi elles, la méthode du develppement en série entière.
On veut, par exemple, calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. on ne peut pas exprimer une primitive de e^{-t^2} à l'aide des fonctions usuelles (c'est un beau théorème de Liouville). Mais nous savons que pour tout nombre réel t

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}.$$

D'après le théorème de l'intégration des séries entières (cette série converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné),

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

est la « valeur » cherchée.
C'est une série alternée dont il est facile de calculer une valeur approchée avec une précision donnée.
Calculons les trois premières termes de $I(1)$.
Si $I_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$, on a

$$I_4 = 0,747486.., \; I_5 = 0,746729.., \; I_6 = 0,746836..$$

Comme $I_5 < I < I_6$, on peut écrire $I \simeq 0,746...$

IV.4 Constantes classique

Le développement en série entière donne une méthode d'approximation de constantes classiques. Par exemple, nous savons que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Nous savons que

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cette série a pour rayon de convergence 1 (facile). De plus, elle converge pour $x = 1$ (c'est une série alternée satisfaisant le critère des séries alternées). On en déduit que

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour en déduire une valeur approchée de π, il nous faut donc majorer le reste de cette suite (ou bien remarquer que la valeur de la somme est toujours comprise entre deux valeurs consécutives.

On peut se demander si ce procédé est « efficace ». Pour cela, regardons combien de termes de la somme il faut pour avoir une précision de 10^{-2}. Nous savons (revoir le chapitre sur les séries alternées) que $|R_N(1)| < |a_{N+1}| = \dfrac{1}{2N+1}$. Nous voyons donc qu'il faudra 50 termes pour avoir une précision de 10^{-2}, 500 termes pour avoir une précision de 10^{-3}, etc. Ce procédé n'est donc pas très très efficace.
On peut néanmoins, avec ce genre de technique, construire des procédés efficaces de sommation.

Prenons un autre exemple, plus efficace. L'exponentielle a pour développement en série entière

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Comme son rayon de convergence est infini, on a donc $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$. Ceci nous donne une série pour calculer une approximation de e. La formule de Taylor-Lagrange permet de majorer le reste. Par exemple, $|R_N(1)| \leq \dfrac{3}{(N+1)!}$. Pour avoir $|R_N(1)| \leq 10^{-5}$, il suffit que $N = 8$; pour avoir 10 chiffres corrects (c'est à dire $|R_N(1)| \leq 10^{-10}$), il suffit que $N = 13$. On voit que cette approximation est *beaucoup* plus efficace que la précédente !
Pour calculer en pratique, on pose $f_1 = 1$, $e_1 = 1$ puis $f_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} f_n$ et $e_{n+1} = e_n + f_n$. Pour avoir une approximation de e à 10^{-10} près, il suffit donc de 13 multiplications et 13 additions.

Chapitre 5

Séries trigonométriques

I. Introduction et définitions

Dans ce chapitre, nous verrons une autre classe importante de séries de fonctions, les séries trigonométriques. La propriété essentielle de ces séries est la prise en compte, dans la décomposition d'une fonction périodique en “somme infinie” de fonctions simples, du caractère de périodicité . Prenons par exemple la fonction $x \mapsto \sin x$. Son développement en série entière est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et ses approximations à n'importe quel ordre n qui sont des fonctions polynomiales ne sont pas périodiques et encore moins 2π-périodiques.
Dans un premier temps, nous étudierons le cas de fonctions 2π-périodiques. Parmi ces fonctions, les plus simples sont évidemment de la forme $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les premières sont paires et les secondes, impaires. Ensuite, nous passerons au cas des fonctions T-périodiques où T est un nombre réel positif quelconque.

Définition 5.1. *On appelle* série trigonométrique *une série de fonctions* $\sum u_n(x)$ *dont le terme général* $u_n(x)$ *est de la forme*

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \tag{I.1}$$

Convention
On conviendra d'écrire les sommes partielles d'une série trigonométrique (I.1) sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

où l'on pose $b_0 = 0$.

Définition 5.2. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, est développable en série trigonométrique si elle est limite simple (ou somme) d'une série trigonométrique.*

Exemples

1. Les fonctions sin et cos sont développables en séries trigonométriques (déterminer les coefficients a_n et b_n correspondants).
2. La série de terme général $\dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ est trigonométrique.
3. Représenter les graphes des fonctions 2π-périodiques $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0[, \\ x & \text{si} \quad x \in [0, \pi[, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0[, \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0, \pi[, \end{cases}$$

Autre écriture des séries trigonométriques

Après substitution

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

le terme général (I.1) devient $\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}$ où $\alpha_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $\beta_n = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$. La somme partielle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s'écrit aussi (écriture exponentielle complexe)

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n e^{inx},$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients c_n sont égaux à α_n et les coefficients c_{-n} à β_n.
Il s'ensuit que $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$.
Comme dans le cas général des séries de fonctions, on rencontre la notation (limite)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \text{ou} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

pour désigner les séries trigonométriques.
Convention : convenons de noter ces derniers objets $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$. Il s'agit de suites de fonctions de la forme $p \mapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{inx}$ où $p \in \mathbb{N}$.

Exercices

1. Écrire les coefficients c_n des séries trigonométriques $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ et $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$
2. Inversement, écrire les coefficients a_n et b_n des séries trigonométriques : $\displaystyle\sum_{n=-p}^{p} \frac{ne^{inx}}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=-p}^{p} \frac{e^{inx}}{n+1}$.

II. Convergence des séries trigonométriques

La notion de convergence peut, bien-sûr, s'appliquer aux séries trigonométriques écrites selon la définition. Elle correspond, sous l'écriture exponentielle complexe, à la définition suivante :

Définition 5.3. *Une série trigonométrique* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *est convergente sur une partie* D *de* $\mathbb{R}$ *s'il existe une fonction* $f : D \to \mathbb{C}$ *qui vérifie l'assertion :*

$$\forall\, x \in D, \quad , \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}; \quad p > N(\varepsilon, x) \Longrightarrow \left| \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{inx} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

On posera $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

Exercice. Écrire de façon analogue les définitions de convergence uniforme, absolue et normale d'une série trigonométrique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

Une série trigonométrique est une série de fonctions particulières définies sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, tous les théorèmes et propositions vus dans le chapitre des séries de fonctions restent vrais. Il en résulte la proposition suivante.

Proposition 1. *Si les séries numériques* $[|a_n|]$ *et* $[|b_n|]$ *convergent, alors la série trigonométrique* $[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ *converge normalement (donc uniformément) et sa somme est une fonction continue.*

DÉMONSTRATION- Exercice. □

Exemple

La "somme" de la série $[\frac{\cos(nx) + \sin(nx)}{n^2}]$ existe et est continue.

En fait, grâce au théorème d'Abel (appliqué à la série trigonométrique en écriture complexe) et à la majoration du reste, nous avons respectivement les théorèmes suivants.

Théorème 2. *Si les suites de nombres réelles* (a_n) *et* (b_n) *sont positives, décroissantes et convergentes vers* 0, *alors la série trigonométrique de terme général* $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *converge sur l'ensemble* $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}\}$.

DÉMONSTRATION- Appliquer le corollaire du théorème d'Abel. □

Théorème 3. *Si les suites de nombres réels positifs* (a_n) *et* (b_n) *sont décroissantes et convergent vers* 0, *alors, la série trigonométrique de terme général* $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *converge uniformément sur tout intervalle de type* $[2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION- Admis □

II.1 Propriétés de la fonction “somme”

De la convergence uniforme établie dans le théorème précédent, on déduit le théorème suivant.

Théorème 4. *La “somme” d'une série trigonométrique est 2π- périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\,; k \in \mathbb{Z}\}$.*

DÉMONSTRATION- Admis □

Théorème 5. *Si la série $[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ converge vers une fonction f sur un intervalle I et si la série dérivée $[na_n \cos(nx) - nb_n \sin(nx)]$ est uniformément convergente sur I, alors cette dernière converge vers une fonction g telle que $f' = g$.*

DÉMONSTRATION- Admis □

Exercice

Trouver la somme de la série trigonométrique de terme général $\dfrac{n\cos(nx)}{2^n}$ (utiliser l'écriture exponentielle complexe)

II.2 Dérivation et intégration d'une série trigonométrique

Théorème 6. *Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n(|c_n|+|c_{-n}|)$ est convergente, alors la série $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ est convergente. Sa somme $f(x)$ est continument dérivable et sa dérivée f' s'obtient par dérivation terme à terme :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})' = \sum_{n=1}^{+\infty} in(c_n e^{inx} - c_{-n}e^{-inx}).$$

DÉMONSTRATION- En cours □

Corollaire 7. *Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(|c_n| + |c_{-n}|)$ est convergente, alors la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ est continue, et la série*

$$c_0 x + (-c_1 i\, e^{ix} + c_{-1} i\, e^{-ix}) + \ldots + (-\frac{c_n}{n} i\, e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i\, e^{-inx}) + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{c_n}{n} i\, e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i\, e^{-inx})$$

est une primitive de $f(x)$.

DÉMONSTRATION- Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{c_n}{n} i\, e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n} i\, e^{-inx}). \quad \square$$

III. Coefficients et série de Fourier

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à l'étude des séries trigonométriques dont on connait au départ leurs coefficients.
Dans ce paragraphe, nous nous interesserons au problème inverse.
On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π- périodique. Sous quelles conditions supplémentaires admet-elle, dans un domaine D de $\mathbb{R}$ (à préciser), un développement en série trigonométrique et dans le cas où un tel développement existe, comment déterminer D ainsi que les coefficients a_n et b_n correspondants ?

III.1 Cas des séries trigonométrique

L'origine des séries trigonométriques est la résolution de ce problème inverse (voir la note historique) et, plus précisémment, dans la décomposition d'une solution de l'équation des cordes vibrantes en "somme infinie" de fonctions périodiques.
Plusieurs réponses ont été données. La plus complète (dans le cadre de notre unité d'enseignement) est celle qui est contenue dans le théorème de Dirichlet-Jordan.
Avant d'énoncer ce théorème, nous avons besoin de quelques définitions et notations.

Définition 5.4. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est* continue par morceaux *si, sur tout intervalle borné, elle ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité (et elle est continue ailleurs).*

Définition 5.5. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est* continûment dérivable par morceaux *si sur tout intervalle borné, à l'exception d'un nombre fini de points, elle est dérivable et sa dérivée est continue.*

Exemple
La fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est continûment dérivable par morceaux puisqu'elle l'est sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que l'intersection de $\mathbb{Z}$ avec tout intervalle borné est fini.

Notations

1. On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel (à vérifier) des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, continûment dérivables par morceaux et possédant en tout point de discontinuité a, des limites à gauche et à droite.
2. On note $f(a^+)$ et $f(a^-)$ les limites à droite et à gauche de f en a. Il est clair qu'une fonction est continue si, et seulement si, ses limites à gauche et à droite en tout point sont égales.

Exemples

1. La fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi[$ par $v(x) = |x|$ est un élément de $\mathscr{E}$.
2. La fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \in]0, 2\pi[$ est continûment dérivable par morceaux, mais n'appartient pas a $\mathscr{E}$.

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, posons $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ (c'est le *symbole de Kronecker*).
Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, un petit calcul montre que l'on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(ix)\,\sin(jx)\,dx = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(ix)\cos(jx)\,dx = \delta_{i,j}, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(ix)\,\sin(jx)\,dx = \delta_{i,j}.$$

Si l'on avait une relation du type

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

alors les relations ci-dessus donnent une idée de comment calculer les coefficients a_n et b_n (« sous de bonnes hypothèses »).

Définition 5.6. *On appelle coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{E}$, les nombres réels a_n et b_n définis par*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx.$$

La série trigonométrique définie par les sommes partielles

$$S_p(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est appelée série de Fourier de f.

Exercices

1. Soit u un élément de $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout nombre réel α, on a :

$$\int_0^{2\pi} u(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} u(x)\,dx$$

   et en particulier,

$$\int_0^{2\pi} u(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx.$$

2. Montrer que les coefficients c_n de la série de Fourier (deuxième écriture $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$) associée à la fonction 2π-périodique f ont pour expressions :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$$

Le lien entre la fonction f et sa série de Fourier est établi par le théorème suivant.

Théorème 8. (théorème de Dirichlet-Jordan) *Soit $f \in \mathscr{E}$. Alors, la série de Fourier associée à f converge ponctuellement vers la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

DÉMONSTRATION- Admis □

Corollaire 9. *Si la fonction $f \in \mathscr{E}$ est continue en a, sa série de Fourier converge ponctuellement en a vers $f(a)$.*

Grâce à ce théorème, on peut voir que si f est paire, tous les coefficients b_n sont nuls et si f est impaire, les coefficients a_n, à sont nuls (la fonction de départ f peut ne pas s'annuler en 0).

Exemples

1. Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \alpha$ si $x \in [0,\pi[$ et $f(x) = \beta$ si $x \in [-\pi,0[$. La série de Fourier $[u_n]$ associée à f est définie par
$$a_0 = \alpha + \beta, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \quad b_{2n} = 0, \quad b_{2n+1} = 2\,\frac{\alpha - \beta}{(2n+1)\pi}.$$
Que devient cette série lorsque $\alpha = -\beta$?
2. Soit g la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \alpha x$ si $x \in [0,\pi[$ et $f(x) = \beta x$ si $x \in [-\pi,0[$. La série de Fourier $[v_n]$ associée à g est définie par
$$a_0 = \frac{\alpha - \beta}{2}\pi + 2\,\frac{\beta - \alpha}{(2n+1)^2\pi},$$
et
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = 2\,\frac{\beta - \alpha}{(2n+1)^2\pi}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(\alpha + \beta)}{n}.$$

III.2 Le cas complexe

Théorème 10. *Soit f une fonction complexe, périodique de période 2π. Si*
$$f(x) = c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$
*est la somme d'une série trigonométrique, et si cette série converge **uniformément**, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*
$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$
On note parfois $\hat{f}(k) = c_k$ ce k-ième coefficient de Fourier.

DÉMONSTRATION- Admis □

On a la correspondance suivante pour les coefficients de Fourier dans l'écriture réelle ou complexe :
$$\begin{cases} a_0 = c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\[2ex] a_n = c_n + c_{-n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,(e^{-inx} + e^{inx})\, dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx \\[2ex] b_n = i(c_n - c_{-n}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,(e^{-inx} - e^{inx})\, dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx. \end{cases}$$

III.3 Cas des fonctions T-périodiques

Comme pour les fonctions 2π-périodiques, les fonctions T-périodiques de base sont $x \mapsto \cos(\frac{2\pi x}{T})$ et $x \mapsto \sin(\frac{2\pi x}{T})$. Elles sont indéfiniment dérivables. La première est paire et la seconde est impaire.
Tous les résultats et propriétés établis jusqu'ici peuvent s'appliquer aux fonctions T-périodiques.

Les coefficients de Fourier deviennent dans ce cas :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\,dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\,dx,$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{\frac{-2n\pi i}{T}x}\,dx.$$

Exercice Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor; \qquad x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

sont périodiques, de périodes respectivement égales à 1 et 2. Calculer leurs coefficients de Fourier.

Exemple : Considérons la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pour} \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; \\ -\frac{\pi}{4} & \text{pour} \quad x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[; \\ 0 & \text{pour} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Etudions la série de Fourier de f. Cette fonction vérifie les condition du théorème et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Donc, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}).$$

Calculons les coefficients de Fourier de f. On a

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-inx}\,dx - \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-inx}\,dx.$$

Pour $n = 0$, on a $c_0 = 0$. Pour $n \neq 0$, on a par intégration

$$c_n = \frac{1}{8}\frac{e^{-in\frac{\pi}{2}} - e^{in\frac{\pi}{2}}}{-in} - \frac{1}{8}\frac{e^{-in\frac{3\pi}{2}} - e^{in\frac{-\pi}{2}}}{-in}$$

et donc

$$-8inc_n = 2e^{-in\frac{\pi}{2}} - 2e^{in\frac{\pi}{2}} = -2(2i\sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Il s'ensuit que

$$c_n = \frac{1}{2n}\sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Si n est pair, on a $c_n = 0$ et si $n = 2k+1$ est impair, on a $c_n = \dfrac{1}{2n}(-1)^k$.
Comme f est paire , on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}.$$

En posant $x = 0$, on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

IV. Interprétation géométrique

IV.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel $\mathscr{E}$

On sait que dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la notion de produit scalaire sert à définir l'orthogonalité de deux vecteurs et à établir des relations métriques dans l'espace comme

- le théorème de Pythagore,
- et l'expression des coordonnées d'un vecteur v par rapport à une base (e_1, e_2, e_3) comme produits scalaires de v et des éléments e_i.

En fait, ces relations métriques peuvent se retrouver dans n'importe quel espace vectoriel (même de dimension infinie) pourvu que l'on puisse y définir "un produit scalaire".
Rappelons qu'une application $\varphi : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathbb{C}$ définit un produit scalaire dans le $\mathbb{C}$- espace vectoriel E si c'est est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive :

1. $\forall\, x_1,\, x_2,\, y \in E, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \mu\varphi(x_2, y)$;
   $\forall\, x,\, y_1,\, y_2 \in E, \quad x\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2)$,
2. $\forall\, x,\, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
3. $\forall\, x, \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x, x) > 0$.

On note souvent le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Le nombre $\sqrt{\langle x, x\rangle} = ||x||$ est la longueur (norme) de x.

Exercice
Montrer que si le produit scalaire de deux vecteurs u et v est nul, alors $||u + v|| = ||u|| + ||v||$ (théorème de Pythagore).

Produits scalaires

1. La forme bilinéaire dans $\mathbb{R}^3$, définie par $(x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ définit le produit scalaire euclidien classique.
2. la forme bilinéaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ définit un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{E}$.

Ce deuxième exemple est fondamental pour la suite.

IV.2 Égalité de Parseval

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, posons $\delta_{p,q} = 0$ si $p \neq q$ et $\delta_{p,p} = 1$ (c'est le *symbole de Kronecker*).
Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, rappelons les *relations d'orthogonalité* vues plus haut :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\,\sin(qx)\,dx = 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,dx = \delta_{p,q}, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(px)\,\sin(qx)\,dx = \delta_{p,q}.$$

Ces relations montrent que la famille de fonctions $\{\sin(px), \cos(px);\ p \in \mathbb{N}\}$ est orthonormale. Est-elle une base de $\mathscr{E}$? Nous détaillerons la réponse en cours.
Au sens du produit scalaire défini sur $\mathscr{E}$, la norme (ou longueur) d'un élément f de $\mathscr{E}$ est égale à

$$||f|| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{f(x)}\,dx}.$$

Théorème 11 (Égalité de Parseval)**.** *Soit $f \in \mathscr{E}$. Notons $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier (en exponentielle) :*

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-ikx}.$$

1. *La suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f, c'est à dire :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n f(t)|^2 dt = 0.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = ||f||^2.$

Si le développement en série de Fourier vient de la décomposition d'un signal, les coefficients c_k sont les contributions des *harmoniques*. L'égalité de Parseval s'interprète donc en disant que l'énergie totale du signal s'obtient en sommant les contributions des différentes harmoniques.
Dans le cas d'un développement réel, l'égalité de Parseval devient

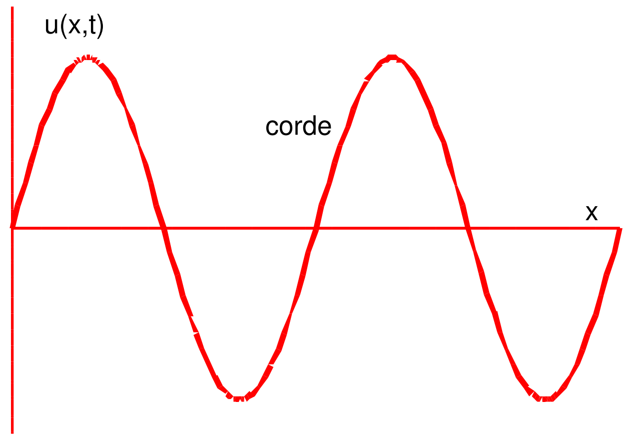
$$||f||^2 = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

V. Note historique

Le point de départ était l'équation aux cordes vibrantes (cas idéal)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pour laquelle D'Alembert (1717-1783) trouva des solutions (en 1747) de la forme $u(x,t) = f(ct + x) - f(ct - x)$ où f est une fonction quelconque périodique, de période $2l$ (l est la longueur de la corde et c, la vitesse de la la propagation de l'onde).



La courbe ci-dessus représente graphiquement la position initiale de la corde à l'instant $t = 0$. Pour un x donné, $u(x,.)$ est une fonction périodique en temps t.
En 1753, Daniel Bernouilli (1700-1782) entreprit de considérer des fonctions f de la forme

$$2\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

ou encore

$$\sin\left(\frac{n\pi(ct+x)}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi(ct-x)}{l}\right).$$

Sachant que les fonctions sin et cos sont les fonctions périodiques les plus simples, il eut l'idée d'exprimer la fonction f de la solution de D'Alembert sous forme d'une série trigonométrique

$$f(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi u}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi u}{l}\right)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi(u-\beta)}{l}.$$

Les termes de cette denière série désignent les harmoniques.
En prenant cette fonction comme solution de D'Alembert et ensuite en substituant $t = 0$, on obtient la condition initiale qui doit être une fonction périodique en x. Se pose alors la question : comment écrire une fonction quelconque comme “somme infinie” de fonctions sinus d'arcs multiples ?
Cette question fut résolue par J. Fourier (1772-1837) en 1807, en étudiant l'équation de la chaleur.

Les séries trigonométriques sont aussi utilisées en astronomie, acoustique, optique et bien d'autres domaines.