Faculté des Sciences et Techniques de Limoges 2007-2008

Examen d'Algèbre de Master 2008 deuxième session

Soient les nombres réels $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt[4]{2}$.
1) Montrer que α et β sont des nombres algébriques.
2) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-corps du corps $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)$.
3) Montrer que $\alpha,\ \beta \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
4) Soit $\alpha' = i\sqrt{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{C}$. Calculer $\alpha\alpha'$; α' est-il un conjugué de α sur $\mathbb{Q}$?
5) Soient K_α et K_β les corps des racines respectifs des polynômes $f(X) = X^4 - 2X^2 - 1$ et $g(X)) = X^4 - 2$. Montrer que $K_\alpha = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ et que $K_\beta = \mathbb{Q}(\beta, i)$.
6) Soit G_β le groupe de Galois de $K_\beta/\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe exactement deux éléments d'ordre 4 dans G_β et que l'un d'eux, noté σ applique β sur $i\beta$; quel est le corps de ses invariants ?
7) Soit G_α le groupe de Galois de $K_\alpha/\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe exactement deux éléments d'ordre 4 dans G_α et que l'un d'eux, noté τ applique α sur α' ; quel est le corps de ses invariants ?
8) En déduire que $K_\alpha \neq K_\beta$.

9) Calculer le noyau de l'homomorphisme d'anneaux $P(X) \mapsto P(\alpha)$ de $\mathbb{Z}[X]$ sur $\mathbb{Z}[\alpha]$;
Quels sont les polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{F}_3$?
Est-il vrai que $3\mathbb{Z}[\alpha]$ est un idéal premier de l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$?

10) Soit $\bar{f}(X) = X^4 - \bar{2}X^2 - \bar{1} \in \mathbb{F}_3[X]$ et soit θ une racine de $\bar{f}(X)$ dans une extension E de $\mathbb{F}_3$. Calculer θ^8 et l'ordre de θ dans le groupe multiplicatif $E^\times$, (en justifiant bien que $\theta^n \neq 1$, pour tout $n = 1, 2, \ldots, 8$).
Retrouver de cette façon que $\bar{f}(X) = X^4 - \bar{2}X^2 - \bar{1}$ est irréductible, mais pas primitif, dans $\mathbb{F}_3[X]$, puis que $f(X) = X^4 - 2X^2 - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.