Faculté des Sciences & Techniques de Limoges — mercredi 9 novembre 2011
MASTER 1^{re} année

ALGÈBRE
Examen partiel.

Étude du nombre agébrique $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$

Soient $\theta=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$, $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\theta'=\sqrt{2}+j\sqrt[3]{2}\in\mathbb{C}$; on note $K=\mathbb{Q}(\theta)$, $L=\mathbb{Q}(\theta')$ et $N=\mathbb{Q}(\theta,\theta')$.
1) Calculer $(\theta-\sqrt{2})^3$, exprimer $\sqrt{2}$ comme une fraction rationnelle en θ et montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{2}\in K$.
2) Montrer que $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2})$.
3) Sans calculer explicitement le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Q}$, donner son degré et le coefficient de son monôme en X^5.
4) Montrer que $\sqrt[3]{2}\notin L$; déterminer $K\cap L$ et $L\cap\mathbb{R}$.
5) Montrer que $N=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{2},j)$ et que c'est la clôture galoisienne de $K/\mathbb{Q}$; calculer $[N:\mathbb{Q}]$; pourquoi $N/\mathbb{Q}$ n'est-elle pas abélienne ?
6) Montrer que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},j)/\mathbb{Q}(j)$ est galoisienne de degré 3.
7) Montrer que l'extension $N/\mathbb{Q}(j)$ est cyclique de degré 6 ; expliciter un générateur de $\mathrm{Gal}(\,N/\mathbb{Q}(j)\,)$.
8) Montrer que $\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ est galoisienne et que son groupe de Galois permute les conjugués de $\sqrt[3]{2}$ sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(j,\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations d'un ensemble à 3 éléments.
9) Montrer que $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})\simeq\mathcal{S}_3\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.