Dans la suite K désignera le corps $\mathbb{F}_2(\alpha)$ où α est une racine (dans $\overline{\mathbb{F}_2}$) de $f(x) = x^4 + x^3 + 1$.

1. Donner une base de K sur $\mathbb{F}_2$ et donner la représentation « vectorielle » de $\alpha^3 + \alpha$ et $\alpha^2 + \alpha + 1$.
2. Donner une représentation matricielle des éléments de K. On donnera en particulier les matrices correspondantes aux éléments $\alpha^3 + \alpha$ et $\alpha^2 + \alpha + 1$.
3. Montrer que $K^\times = < \alpha >$ et donner le diagramme des inclusions des sous groupes de $K^\times$.
4. Donner le polynôme minimal sur $\mathbb{F}_2$ de $\alpha^3 + \alpha + 1$ et $\alpha^2 + \alpha + 1$.
5. Soit $\beta = \alpha^5$ et $L = \mathbb{F}_2(\beta)$.
   a. Montrer que β est de degré 2 sur $\mathbb{F}_2$ ($[L : K] = 2$).
   b. Donner les éléments de L (les écrire en fonction de β).
   c. Justifier l'isomorphisme entre L et $\mathbb{F}_4$.
   d. Soit $g(x) = x^2 + \beta x + \beta \in L[x]$. Montrer que g est irréductible sur L. L'est-il sur K ?
   e. Montrer que α est de degré 2 sur L et donner son polynôme minimal sur L.
   f. Le polynôme f est-il réductible sur L ? Si oui donner sa décomposition sur L.
6. Donner un polynôme de degré minimal dans $\mathbb{F}_2[x]$ dont α^3 et α^7 sont des racines.

On note $\mathbb{F}_3$ le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (muni des opérations usuelles). Soit

$$f(x) = x^5 + x^4 + 1, \quad g(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 + 1 \quad \text{dans} \quad \mathbb{F}_3[x].$$

1. Montrer que le polynôme g est réductible sur $\mathbb{F}_3$ et donner sa décomposition en éléments irréductibles.
2. Donner une expression polynomiale simple de : $f \pmod g$.
3. Montrer que le polynôme h est irréductible sur $\mathbb{F}_3$.
4. Déterminer le pgcd de f et g ainsi que les coefficients de BÉZOUT de f et g.
5. Soit $\mathcal{K} = \mathbb{F}_3[x]/(h(x))$ et θ la classe de x dans $\mathcal{K}$.
   - Montrer que $\mathcal{K}$ est un corps.
   - Donner la représentation polynomiale des éléments de $\mathcal{K}$.
   - Montrer que $\bar{f}$ est dans $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ et écrire l'inverse de $\bar{f}$ comme polynôme en θ.
6. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{F}_3[x]/(g(x))$ et α la classe de x dans $\mathcal{A}$.
   - Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas un corps.
   - Déterminer le cardinal de $\mathcal{A}$.
   - Écrire α^3, α^9, α^{27}, α^{81} comme polynôme en α de degré ≤ 2.