Calculabilité, Complexité et évaluation de performances
Master 1 Informatique et mathématiques

10 janvier 2010
Université de Limoges
Faculté des Sciences et Techniques

Examen session de janvier 2011

Vous avez accés à tous les documents que vous voulez. Le barême est sur 28 alors que la note maximale est 20. Il est donc inutile d'essayer de faire tout le sujet. Soignez votre rédaction.

Exercice 1. (6 pts) On considère la fonction $\lambda xy[2(x+y)]$:

1. Décrire une machine à registre calculant cette fonction.
2. Décrire une machine de Turing calculant cette fonction.

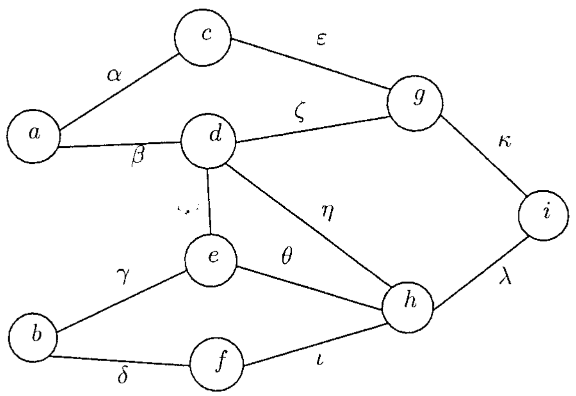
Exercice 2. (4 pts) On considère la fonction `sle`: $(x, y) \longrightarrow \begin{cases} 1 \text{ si } x < y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Donner une machine de Turing calculant cette fonction.
2. Cette fonction est-elle récursive (pourquoi ?) ?

Exercice 3. (10 pts) Soit $G = (S, A)$ un graphe (S est l'ensemble des sommets et A celui des arrêtes), un cycle hamiltonien dans un graphe est un sous-graphe qui est un chemin (chaque sommet est d'indice deux, il y a exactement de arêtes passant par ce sommet) cyclique (un seul sommet est atteind deux fois : le sommet de départ qui est celui de l'arrivée) passant par tous les sommets de G. Un cycle eulérien de G est un chemin cyclique passant par toutes les arêtes de G.

Soit $G = (S, A)$ un graphe. On défini son graphe dual $G^* = (S', A')$ comme le graphe dont l'ensemble des sommets S' est l'ensemble arrêtes de G, autrement dit $S' = A$, et tel que si $a_1 = (s_1, s_2)$ et $a_2 = (s_3, s_4) \in A = S'$ alors $(a_1, a_2) \in A'$ si on a ($s_1 = s_3$ ou $s_1 = s_4$) ou ($s_2 = s_3$ ou $s_2 = s_4$). Autrement dit, deux sommets du graphe dual portent une arrête du graphe dual si les arrêtes du graphe initial correspondant ont un sommet commun.

1. On considère le graphe suivant :



J'ai pris soin de donner des noms aux arrêtes. Dessiner le graphe dual de ce graphe.

2. Informatiquement, on représente un graphe par deux listes, la liste des sommet et la liste des arrêtes, les arrêtes étant un couple de sommets. Donner un algorithme **polynomial** calculant le dual d'un graphe (attention, il est très facile d'en donner un **exponentiel** en parcourant les sommets du graphe initial ; en partant des arrêtes du graphe initial on peut obtenir un algorithme polynomial).
3. Montrer que si un graphe contient un cycle eulérien, alors son dual contient un graphe Hamiltonien.
4. Si décider qu'un graphe contient un cycle hamiltonien est NP-complet, peut-on en déduire que décider qu'un graphe contien un cycle eulérien est NP-complet ?
5. Si décider qu'un graphe contient un cycle eulérien est NP-complet, peut-on en déduire que décider qu'un graphe contient un cycle hamiltonien est NP-complet ?

Exercice 4. (4 pts) L'ensemble des nombres qui sont une puissance de 4 est-il reconnaissable par une machine de Turing. Pourquoi ?

Exercice 5. (4 pts) On considère la fonction $\lambda n[3 * n]$.

I. Donner une machine à registre dont la fonction est $\lambda n[3 * n]$.

II. Décrivez sommairement la table des transitions d'une machine de Turing binaire $\mathcal{T}$ dont la fonction est $\lambda n[3 * n]$.

III. Sachant que $\lfloor \log_2(n) \rfloor = \tau$, donner la taille de $3 * n$.

IV. Donner en fonction de τ un équivalent asymptotique du nombre de transitions fait par $\mathcal{T}$ avec n en entrée.