Faculté des Sciences & Techniques de Limoges — jeudi 6 janvier 2011

MASTER 1^{re} année

ALGÈBRE
Examen.

Étude du nombre agébrique $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

Soient $\theta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$ et $\theta' = i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \in \mathbb{C}$; on note $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $L = \mathbb{Q}(\theta')$ et $N = \mathbb{Q}(\theta, \theta')$.

1) Montrer que $L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = K \cap L$.

2) Calculer $\theta\theta'$, en déduire que $N = \mathbb{Q}(\theta, i)$ et donner une base de N sur $\mathbb{Q}$ contenant θ et i.

3) Donner un polynôme unitaire, de degré 4, à coefficients entiers, dont θ est racine et montrer qu'il est irréductible.

4) Montrer que θ est une unité algébrique et donner une liste infinie d'unités algébriques du corps $\mathbb{Q}(\theta)$.

5) Soit $\eta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}}$. Donner un polynôme unitaire, de degré 4, à coefficients entiers, dont η est racine et montrer qu'il n'est pas irréductible; quel est le polynôme minimal de η sur $\mathbb{Q}$? Commentez le résultat.

6) Calculer $(\theta + \theta')^2$ et $[\mathbb{Q}(\theta + \theta') : \mathbb{Q}]$; [vérifier que $\theta = \sqrt[4]{5}\cos(\dfrac{\arctan 2}{2})$ et $\theta' = i\sqrt[4]{5}\sin(\dfrac{\arctan 2}{2})$].

7) Montrer qu'il existe un unique automorphisme σ de N qui applique θ sur θ' et θ' sur $-\theta$; calculer $\sigma(i\sqrt{5})$; en déduire le corps des invariants de σ ?

8) Après avoir justifié que l'extension $N/\mathbb{Q}$ est galoisienne, décrire tous les éléments du groupe de Galois de $N/\mathbb{Q}$ en fonction de σ et de la conjugaison complexe.

9) Quels sont les sous-corps de N ? Décrire $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q}(\theta + \theta'))$.

10) Considérons le nombre complexe $\theta + i$,

a) est-il un entier algébrique ?

b) est-il un élément primitif de l'extension $N/\mathbb{Q}$?

c) existe-t-il un élément de $\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ dont la restriction à l'ensemble des conjugués de $\theta + i$ sur $\mathbb{Q}$ soit une permutation circulaire ?

d) si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de l'anneau $\mathcal{A}$ des entiers de N, pourquoi $\mathfrak{P}$ contient-il un nombre premier p et un seul ?

e) le polynôme minimal de $\theta + i$ sur $\mathbb{Q}$ réduit modulo p peut-il être irréductible sur $\mathbb{F}_p$?

Les questions 4) et 5) n'ont pas d'influence sur la suite du problème.