II- La théorie des cycles réels

La théorie des cycles réels a pour objectif de rendre compte des fluctuations de l'activité économique en considérant la réponse optimale des agents à un (ou une succession) de choc(s) réel(s).

Le cadre d'analyse

Il s'agit d'un problème d'optimisation dynamique très proche des modèles de croissance optimale. Cela dit il existe deux différences majeures avec les modèles de croissance :

1- La fonction d'utilité incorpore le loisir de façon a déterminer également le temps de travail optimal de façon à rendre compte des variations de l'emploi.

2- On introduit dans la technologie ou (et) dans les dépenses publiques un terme aléatoire qui écarte temporairement la technologie ou (et) les dépenses publiques de leur tendance de long terme.

Les hypothèses du modèle canonique :

Hypothèse #1 : à chaque période un agent représentatif dispose d'un revenu issue de son travail de façon à consommer. De plus il dispose à chaque période d'une unité de temps qu'il partage entre temps de travail (l_t) et temps de loisir (1-l_t).

$$u_t = u(c_t; 1 - l_t)$$

Ainsi, sa fonction d'utilité intertemporelle est :

$$U = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_t\left(c_t; 1 - l_t\right)$$

Où β représente la préférence pour le présent

Hypothèse #2 : La production est déterminée par les facteurs de production qui sont au nombre de 3 :

Le capital K_t
Le travail L_t
La technologie A_t

La fonction de production est une fonction néoclassique de type COBB DOUGLAS

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} \left(L_t\right)^{1-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

Où : $$L_t = \sum l_t$$

Hypothèse #3 : La production sert à la consommation, à l'investissement et aux dépenses publiques

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Hypothèse #4 : La population augmente au taux *n*,

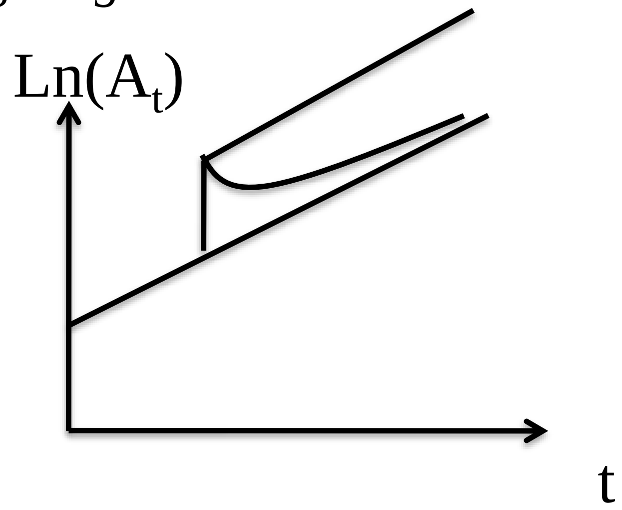
$$\ln\left(N_t\right) = \overline{N} + n.t$$

Les individus sont tous identiques et la fonction d'utilité sociale est une fonction d'utilité utilitariste . Ainsi la fonction d'utilité sociale est :

$$U_s = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_t\left(c_t ; 1 - l_t\right) N_t$$

Hypothèse #5 : la technologie croît à un rythme exogène *g* mais est "perturbée" par des chocs à chaque période.

$$\ln\left(A_t\right) = \overline{A} + g.t + \tilde{A}_t$$



$\tilde{A}_t$ Traduit l'effet des chocs.

On suppose que les chocs suivent un processus auto régressif d'ordre 1:

$$\tilde{A}_t = \rho_A . \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad 0 < \rho_A < 1$$

Choc aléatoire suivant une loi normale

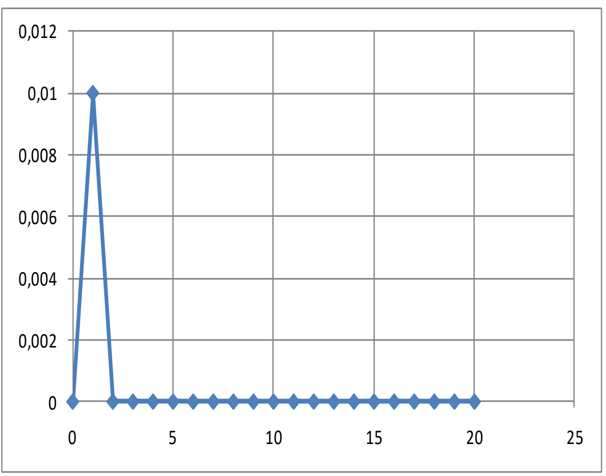
L'intérêt de faire l'hypothèse d'un tel processus est que selon la valeur de ρ_A

Si $\rho_A = 0$ le choc disparait dès la période suivante

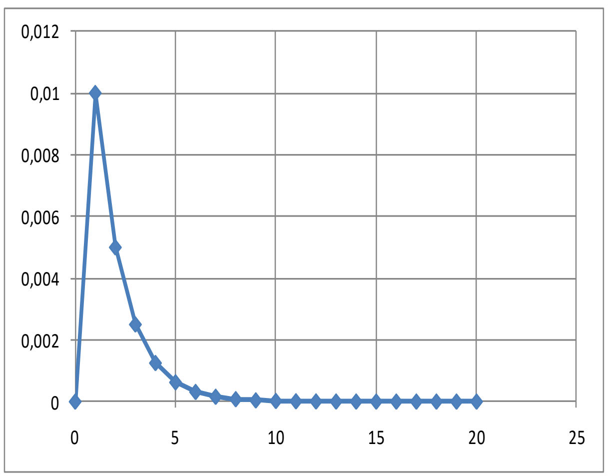
Si $\rho_A < 1$ le choc et un certain temps à disparaître

Si $\rho_A = 1$ le choc est persistant.

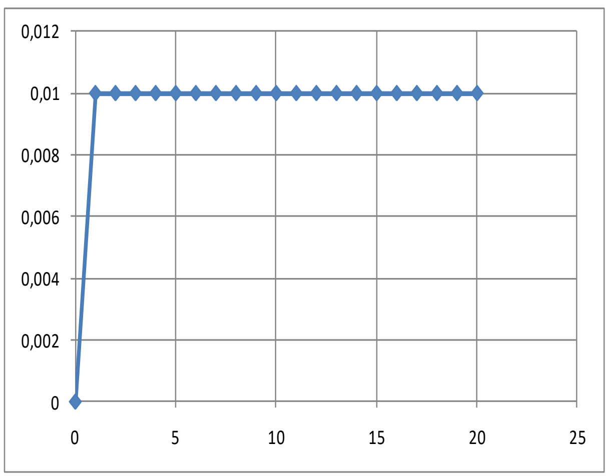
$$\rho_A = 0$$



$$\rho_A = 0,5$$



$$\rho_A = 1$$



Hypothèse #6 : Les dépenses publiques croissent à un rythme exogène $n+g$ mais sont "perturbées" par des chocs à chaque période.

$$\ln(G_t) = \overline{G} + (n+g).t + \tilde{G}_t$$

$$\tilde{G}_t = \rho_G.\tilde{G}_{t-1} + \mu_t \qquad 0 < \rho_G < 1$$

Choc aléatoire suivant une loi normale

Le problème de l'agent représentatif est de résoudre :

$$\text{Max} \quad U_s = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_t(c_t;1-l_t)N_t$$

Sous la contrainte : $I_t = Y_t - C_t - G_t$

$$DK_t = A_t K_t^{\alpha}(N_t l_t)^{1-\alpha} - c_t N_t - G_t$$

En choisissant le niveau de consommation c_t et le temps de travail l_t.

Résolution du problème

Ce type de modèle ne peut pas être résolu analytiquement comme l'a montré cambell [1994]. La raison est double :

D'une part il conduit à un système d'équations de récurrence qui ne permet que de faire des simulations numériques,

D'autre part parce qu'il mêle des éléments linéaires comme l'égalité emplois-ressources et des éléments non linéaires comme la fonction de production ou d'utilité.

Le comportement des ménages

Il est important de bien comprendre le comportement des ménages pour comprendre les propriétés générales d'un modèle de cycles réels.

1 période, et pas d'incertitude

Supposons un ménage qui ne vit qu'une période, qui n'a pas de richesse initiale, et ne comprend qu'une seule personne. On suppose que sa fonction objectif est simplement :

$$u = \ln(c) + b.\ln(1 - l)$$

Par ailleurs, son salaire est déterminé par le taux de rémunération et le temps de travail. Il dépense l'intégralité de son salaire pour consommer des biens de consommation dont le prix est unitaire. Ainsi sa contrainte budgétaire est :

$$w.l = c$$

La solution

Le programme de l'agent consiste à maximiser sa fonction d'utilité en respectant sa contrainte budgétaire. Le lagrangien est :

$$L = \ln(c) + b.\ln(1-l) - \lambda(c - w.l)$$

Les conditions d'optimalité sont : $\frac{\partial L}{\partial c} = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial l} = 0$

La solution est : $$\boxed{l^* = \frac{1}{1+b} \quad \text{et} \quad c^* = \frac{w}{1+b}}$$

Le temps de travail ne dépend pas du taux de salaire.

Ainsi dans ce cas particulier, le taux de salaire n'a pas d'influence sur l'offre de travail.

2 périodes et pas d'incertitude

Supposons un ménage qui ne vit 2 périodes, qui n'a pas de richesse initiale, et ne comprend qu'une seule personne. On suppose que sa fonction objectif est simplement :

$$u = \ln(c_0) + b.\ln(1 - l_0) + \beta\left(\ln(c_1) + b.\ln(1 - l_1)\right)$$

Par ailleurs, son salaire est déterminé par le taux de rémunération et le temps de travail. A la date 0 il peut consommer ou épargner. A la date 1, il consomme tout son revenu. Ainsi sa contrainte budgétaire actualisée est :

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0.l_0 + \frac{w_1.l_1}{1+r}$$

La somme des consommations actualisées
est égale à
la somme des revenus actualisés

La solution

Le programme de l'agent consiste à maximiser sa fonction d'utilité en respectant sa contrainte budgétaire.

Les conditions d'optimalité sont : $\dfrac{\partial L}{\partial c_i} = 0$ et $\dfrac{\partial L}{\partial l_i} = 0 \quad \forall\, i = 0{,}1$

La solution donne :

$$\boxed{\frac{1-l_0}{1-l_1} = \frac{1}{\beta\left(1+r\right)}\frac{w_1}{w_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{c_0}{c_1} = \frac{1}{\beta\left(1+r\right)}}$$

Commentaires

<u>Effet d'une augmentation de salaire à une date :</u>

Le temps de travail dépend du taux de salaire relatif entre la date 0 et la date 1. Ainsi, si le salaire augmente à une date t, alors le temps de travail augmente également.

<u>Effet d'une augmentation du taux d'intérêt à une date :</u>

Si le taux d'intérêt augmente à une date, l'offre de travail augmente. Un taux d'intérêt élevé rend le travail immédiat plus interessant que le travail futur.

Les réactions de l'offre de travail à une variation du taux de salaire et à une variation du taux d'intérêt sont connus sous le nom de ***substitution inter-temporelle de l'offre de travail*** (Lucas et Rapping [1969])

Optimisation des ménages sous incertitude

Maintenant, l'agent ne connaît plus avec certitude ni le taux d'intérêt futur ni le salaire futur à cause des chocs possibles sur la technologie et sur les dépenses publiques.

Il ne peut plus décider d'un sentier déterministe à chaque date *t*. Il doit donc décider de sa consommation et de son travail à chaque date sachant qu'il peut intervenir des chocs.

Cela complique considérablement le problème d'optimisation. Or on sait d'un point de vue théorique qu'il existe une équation reliant la consommation présente aux ***anticipations*** concernant le taux d'intérêt et la consommation de la période suivante.

Supposons que la fonction d'utilité intertemporelle soit :

$$U_s = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u_t\left(c_t;1-l_t\right)N_t = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t\left(\ln\left(c_t\right)+b\ln\left(1-l_t\right)\right)N_t$$

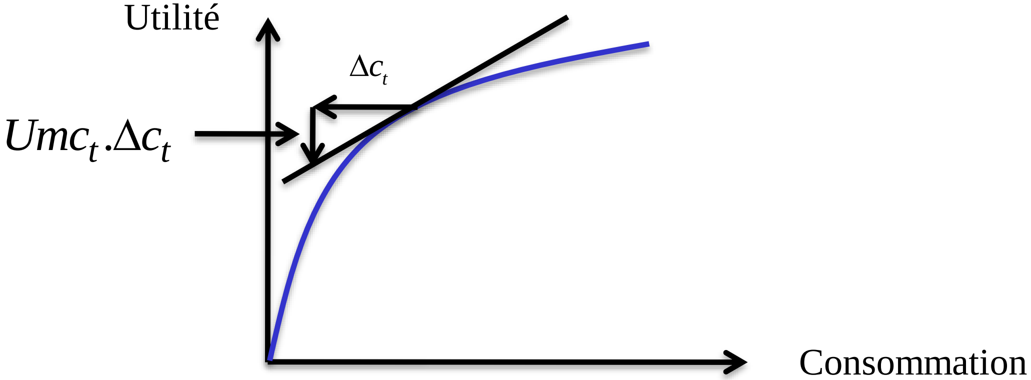
Si l'agent renonce à de très faibles unités de consommation aujourd'hui pour augmenter la consommation de demain, il a une perte d'utilité aujourd'hui qui doit être compensée par l'augmentation de la consommation à la période suivante.

Calcul de la perte d'utilité à la date t :

La perte d'utilité est égale à : $Umc_t.\Delta c_t$

Soit en dérivant par rapport à c_t:

$$\boxed{\text{perte} = \underbrace{\beta^t.N_t \frac{1}{c_t}}_{Umc_t} \Delta c_t}$$



Calcul du gain potentiel à la date t+1 :

À la date t+1, il y a eu une augmentation du nombre d'agents au taux *n*. On retrouve donc :

$$N_{t+1} = N_t.(1+n)$$

Par ailleurs le fait d'avoir renoncé à de la consommation à la date *t* procure une épargne disponible en t+1 égale à l’épargne supplémentaire augmentée du rendement :

$$(1+r_{t+1})\Delta c_t$$

où Δc_t est l'épargne supplémentaire (renonciation à la consommation à la date t)

r_{t+1} est le rendement de l'épargne

Mais socialement comme il y a N_{t+1} agents à la date $t+1$ vont « se partager » l'épargne faite en t . Ils auront chacun un supplément de consommation égal à :

$$\Delta c_{t+1} = \frac{N_t\left(1+r_{t+1}\right)\Delta c_t}{N_{t+1}} = \frac{\left(1+r_{t+1}\right)}{\left(1+n\right)}\Delta c_t$$

L'utilité totale en t+1 augmente de :

$$Umc_{t+1}\Delta c_{t+1} = \beta^{t+1}N_{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}\Delta c_{t+1} = \beta^{t+1}N_{t+1}\frac{\left(1+r_{t+1}\right)}{\left(1+n\right)}\frac{\Delta c_t}{c_{t+1}}$$

Mais comme il y a incertitude sur le rendement de l'épargne à la date t+1, le gain en terme d'utilité est :

$$\boxed{\text{Espérance de gain d'utilité en t+1} = E_t\left[\beta^{t+1}N_{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}\frac{1+r_{t+1}}{1+n}\right]\Delta c_t}$$

Egalisons la perte et le gain d'utilité :

$$\text{perte} = \beta^t.N_t \frac{1}{c_t}\Delta c_t = E_t\left[\beta^{t+1}N_{t+1}\frac{1}{c_{t+1}}\frac{1+r_{t+1}}{1+n}\right]\Delta c_t = \text{gain}$$

En simplifiant et en réarrangeant cette égalité peut s'écrire :

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}(1+r_{t+1})\right] \quad \Leftrightarrow \quad Umc_t = \beta E_t\left[Umc_{t+1}(1+r_{t+1})\right]$$

En utilisant le fait que l'espérance du produit de deux variables aléatoires est égal au produit de l'espérance des deux variables aléatoires plus la covariance entre les deux variables aléatoires, on obtient :

$$E(X.Y) = E(X).E(Y) + Cov(X;Y)$$

Soit : $$\frac{1}{c_t} = \beta\left(E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}\right] E_t\left[1+r_{t+1}\right] + Cov\left(\frac{1}{c_{t+1}};\left(1+r_{t+1}\right)\right)\right)$$

Comme on a utilisé une fonction d'utilité logarithmique : $\frac{1}{c_t} = Umc_t$

On peut écrire le résultat suivant :

Um C_t = Espérance Um C_{t+1} . Espérance du taux d'intérêt
+ covariance entre Um C_{t+1} et le taux d'intérêt

L'arbitrage entre la consommation présente et future ne dépend pas seulement des anticipations de l'utilité marginale future ($1/c_{t+1}$) et du taux d'intérêt futur ($1+r_{t+1}$), mais aussi de leur interaction (covariance).

Intuition de ce résultat 1/4

Premier cas :
Supposons que le taux d'intérêt réel soit élevé. Cela *a priori* rend l'épargne rentable.

- **Premier sous cas :**

Mais si la consommation à la date t+1 est très élevée cela entraîne une utilité marginale faible ($1/c_{t+1}$).

Cela entraîne que la **covariance** entre ($1/c_{t+1}$) et ($1+r_{t+1}$) est **négative** réduisant ainsi l'intérêt de l'épargne (à quoi bon épargner encore plus puisque cette épargne me fournira un faible utilité supplémentaire !). Donc l'utilité marginale de la consommation à la date t est réduite donc la consommation présente augmente.

Par exemple, si les agents anticipent le paiement d'une retraite confortable, cela réduit leur intérêt pour l'épargne alors que le taux d'intérêt est élevé.

$$Umc_t = \beta E_t\left[Umc_{t+1}\right]E_t\left[1+r_{t+1}\right]+\operatorname{cov}\left[Umc_{t+1};\left(1+r_{t+1}\right)\right]$$

Intuition de ce résultat…suite 2/4

▪ **Deuxième sous cas :**

Si maintenant la consommation à la date t+1 est faible cela entraîne une utilité marginale plutôt élevée ($1/c_{t+1}$).

La **covariance** entre ($1/c_{t+1}$) et ($1+r_{t+1}$) est **positive** augmentant encore plus l'intérêt de l'épargne. L'utilité marginale de la consommation présente doit augmenter donc la consommation présente se réduit. Ainsi l'épargne augmente.

Si les agents n'ont pas de retraite mais que le taux d'intérêt est élevé, cela les incite encore plus à épargner.

Intuition de ce résultat…suite 3/4

Deuxième cas :
Supposons maintenant que le taux d'intérêt réel soit faible. Cela rend l'épargne peu rentable (dans les années 70-80 le taux d'intérêt réel était négatif !).

▪ **Premier sous cas :**

Si la consommation à la date t+1 est élevée cela entraîne une utilité marginale faible ($1/c_{t+1}$).

Donc la **covariance** entre ($1/c_{t+1}$) et ($1+r_{t+1}$) est **positive** augmentant l'intérêt de l'épargne. Mais attention : $E(1/c_{t+1})$ est faible ainsi que $E(1+r_{t+1})$. Son produit est faible, la covariance le rend un peu moins faible.

Au total l'utilité marginale de la consommation présente doit être faible. Donc la consommation présente reste quand même élevée.

.

Si les agents ont l'assurance du paiement d'une retraite et qu'en plus le taux d'intérêt est faible, il ont globalement une incitation à consommer à la date présente.

Intuition de ce résultat…suite 4/4

- **Deuxième sous cas :**

Si la consommation à la date t+1 est faible cela entraîne une utilité marginale élevée ($1/c_{t+1}$).

Cela entraîne que la **covariance** entre ($1/c_{t+1}$) et ($1+r_{t+1}$) est **négative** réduisant l'intérêt de l'épargne.

Si les agents n'ont pas de retraite, ils ont une incitation à épargner bien que le taux d'intérêt soit faible. Mais la covariance entre ($1/c_{t+1}$) et ($1+r_{t+1}$) tend à réduire cette incitation.

Arbitrage entre consommation et offre de travail

Imaginons maintenant qu'en t l'agent augmente son temps de travail d'un faible montant Δl et qu'il utilise le revenu supplémentaire pour augmenter sa consommation durant cette période.

La désutilité engendrée par un temps de travail plus important doit être exactement compensée par l'augmentation de l'utilité via l'augmentation de la consommation.

$$\underbrace{-Uml_t . \Delta l_t}_{\text{désutilité du travail}} = \underbrace{Umc_t . w_t \Delta l_t}_{\text{utilité de la consommation}}$$

$$\frac{b}{1-l_t}\Delta l_t = \frac{1}{c_t} w_t \Delta l_t$$

$$\boxed{\frac{c_t}{1-l_t} = \frac{w_t}{b}}$$

La consommation et le loisir à la date *t* sont liés au taux de salaire

Le temps de Loisir

Ainsi on peut exprimer le temps de loisir en fonction de la consommation présente c_t et du taux de salaire w_t :

$$1 - l_t = b \frac{c_t}{w_t}$$

Le temps de loisir est d'autant plus élevé que la consommation est élevée et que le taux de salaire est faible.

Interaction avec la consommation future et le taux d'intérêt

Comme nous l'avons vu, les valeurs anticipées du taux d'intérêt et du niveau de consommation à la date t+1 déterminent la consommation à la date t.

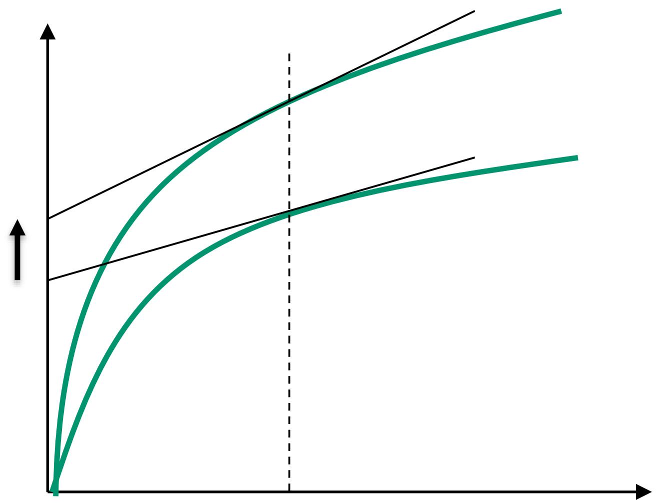
Le temps de loisir dépend donc du taux d'intérêt anticipé, de la consommation anticipée et du taux de salaire présent.

Les diverses configurations possibles sont trop nombreuses à étudier mais on peut illustrer quelques résultats.

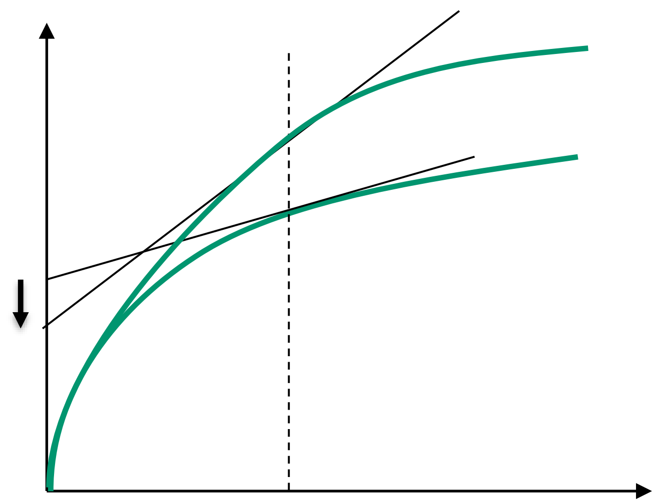
Effet de revenu et effet de substitution

Lorsqu'il y a un **choc positif sur la technologie** l'agent en adoptant un comportement optimisateur change sa consommation et son temps de travail ce qui affecte la production, et les autres variables.

De façon générale le choc de technologie fait augmenter le taux d’intérêt. Le taux de salaire lui peut augmenter ou diminuer. (déplacement vers le haut de la fonction de production).



Hausse du taux d’intérêt et hausse de w



Hausse du taux d’intérêt et baisse de w

Effet de revenu et effet de substitution

Dans le cas de la hausse du taux d’intérêt :

Un effet de revenu : L’agent se sent plus riche (une même épargne rapportera plus), il veut consommer plus et prendre plus de loisir.

Un effet de substitution : Comme le taux d’intérêt est plus élevé il rend la consommation future moins chère, et l’investissement plus rentable. Il cherche donc à diminuer sa consommation pour investir plus et a augmenter son loisir pour compenser la baisse de la consommation.

Effet de revenu et effet de substitution…suite

Dans le cas de la hausse du taux de salaire :

Un effet de revenu : L'agent se sent plus riche, il veut consommer plus et prendre plus de loisir.

Un effet de substitution : Comme le taux de salaire est plus élevé (plus faible) momentanément, il cherche à travailler plus (moins), et a augmenter (baisser) sa consommation pour compenser la baisse (hausse)du loisir.