



Découverte de la Complémentarité des Sciences (DCS)

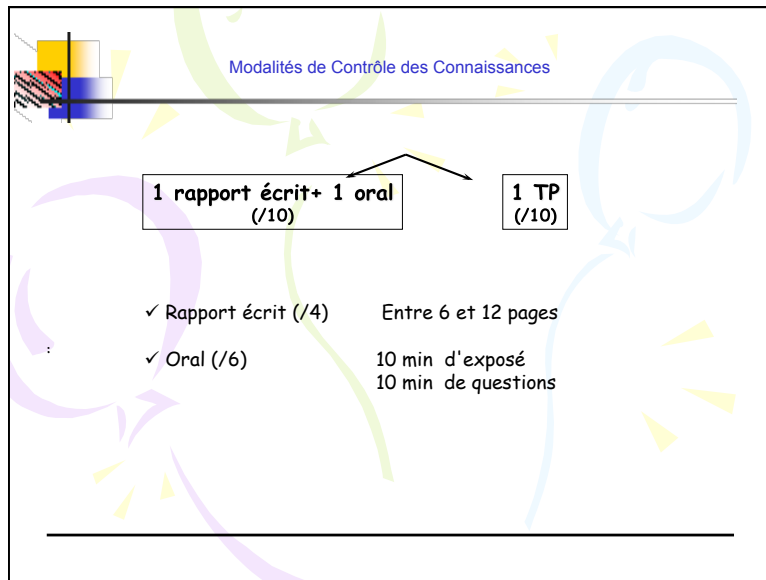
2015-2016

Présentation de l'UE

Un CTD pendant les 2 premières séances

Des TP et travail personnel (en binôme) pendant les
5 séances suivantes

Soutenance du projet la dernière séance



Projet

Les TP.

Écriture et exécution de programmes sur des thèmes choisis

Un écrit

Il s'agit de rédiger un texte de six à douze pages sur un thème choisi. Le texte comprendra une description du travail effectué en TP et un développement lié à ce thème.

Une attention particulière sera accordée à la rédaction, à la présentation de ces textes, à la rigueur dans les énoncés et au respect du travail d'autrui (Citer toutes les références et éviter **le plagiat***).

Un Oral

Présentation orale de dix minutes du travail accompli à la fois en TP et dans la recherche liée au thème

* <http://plagiat.ec-lille.fr>

*Charte des examens

Thèmes

Thème 1

- Une brève histoire des graphes et quelques applications connues.
- Description de l'Algorithme de Dijkstra et traitement de quelques exemples

Thème 2

- Relations binaires et graphes (définitions, exemples), relation de divisibilité dans \mathbf{N} .
- Description de l'Algorithme de Ford-Bellman et traitement de quelques exemples.

Thème 3

- Relations binaires et graphes (définitions, exemples), relation de divisibilité dans \mathbf{N} .
- Description de l'Algorithme de Welsh-Powell et traitement de quelques exemples.

Faculté des Sciences
& Techniques



Thèmes, suite et fin

Thème 4

- Définitions de graphes à l'aide des notions d'ensembles et d'applications. Ensemble des parties d'un ensemble.
- Description de l'Algorithme de Welsh-Powell et traitement de quelques exemples.

Thème 5

- Différentes représentations d'un graphe en particulier notion de matrice d'adjacence d'un graphe. Calcul du nombre de chemins (chaînes) de longueur donnée.
- Arbres couvrants (choisir entre méthode de Kruskal et Prim).

Thème 6

- Calcul matriciel et applications au calcul du nombre de chemins (chaînes) de longueur donnée.
- Description de l'algorithme de recherche de circuit dans un graphe ordonné ainsi que l'algorithme d'ordonnement par niveau d'un graphe ordonné sans circuit.

Faculté des Sciences
& Techniques



Introduction à la théorie des graphes

Leçon 1

Faculté des Sciences
& Techniques



Naissance de la théorie des graphes

Les ponts de départ

Est-il possible de trouver un circuit qui emprunte une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ?



Ville de Königsberg
(Prusse orientale en 1736)

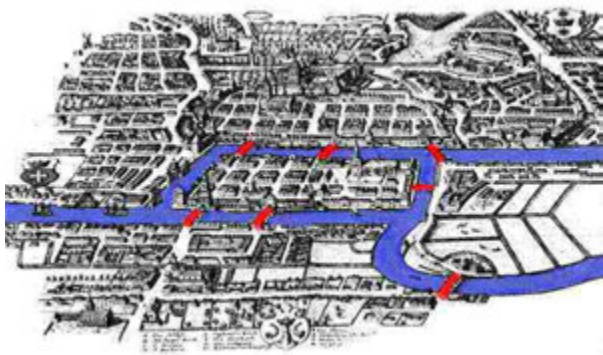
Voici ce que dit Euler dans «*Solutio problematis an Geometriam situs pertinentis*» (*)

- Récemment j'ai entendu parler d'un problème ... aussi ai-je résolu d'exposer ici, comme spécimen, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre ce problème.
- À Kœnigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras sur les quels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une fois ? Cela semble possible, disent les uns ; impossible, disent les autres ; cependant personne n'a la certitude de son sentiment.

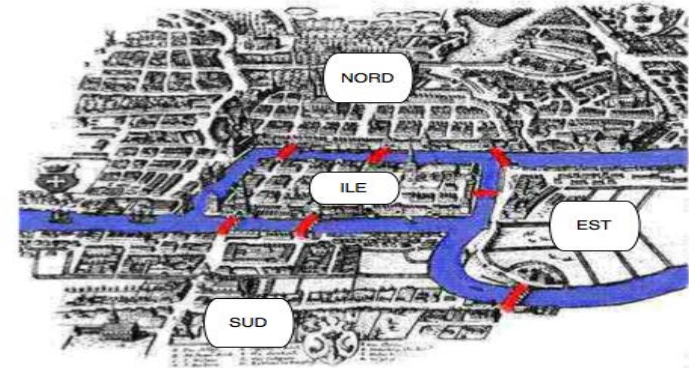


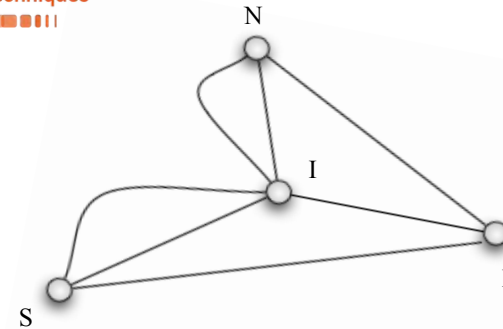
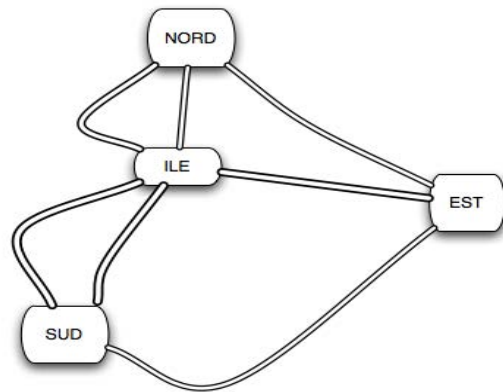
(*) In «*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin en 1759*»

Faculté des Sciences
& Techniques
Pons de
Königsberg (1736)



Faculté des Sciences
& Techniques





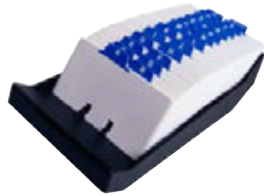
Peut-on parcourir toutes les branches (chacune une fois) et revenir à son point de départ ?

« Petits » problèmes, grande théorie

- Est-il possible d'organiser un tournoi de foot entre 7 équipes de telle façon que chaque équipe rencontre 3 et seulement 3 autres équipes ?
- Peut-on colorier la carte des régions de la France métropolitaine en utilisant au plus 4 couleurs avec la contrainte que deux régions qui ont une frontière commune ne soit pas de la même couleur ?
- Quel est le trajet le plus court (le moins coûteux) pour se rendre de la gare des Bénédictins à la FST ?
- Peut-on dessiner une enveloppe sans lever la main et sans passer deux fois par le même trait ?

Domaines d'applications

- Emploi du temps, répartition de salles,
- Mathématique, combinatoire et théorie des codes correcteurs d'erreurs,
- Informatique,
- Problèmes d'ordonnancement,
- Réseaux (routiers, électriques, informatiques,...)
- ...



Vocabulaire, définitions de base



Définition

Un **graphe G (non orienté)** est la donnée d'un triplet (S, A, φ) où S et A sont deux ensembles non vides et φ une application qui associe à tout élément de A une "paire" d'éléments de S .

Les éléments de A sont appelés les arêtes.

Les éléments de S sont appelés les sommets.

Exemples

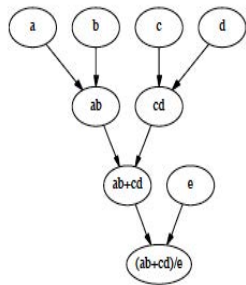


FIG. 3 - Calcul de $(ab + cd) / e$.

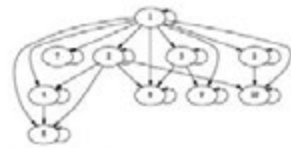
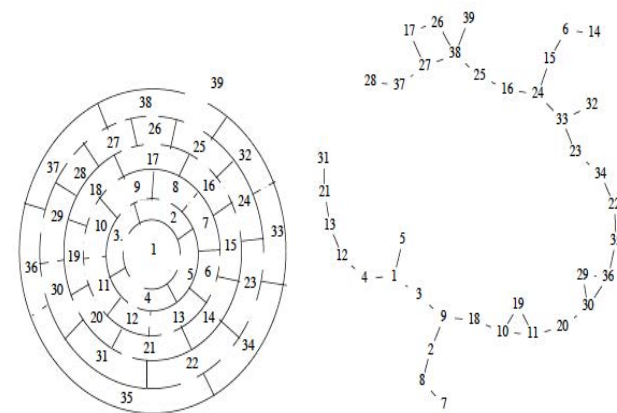


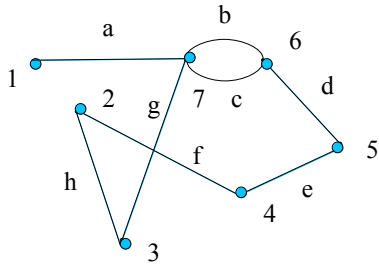
FIG. 1 - Graphe de la relation « est directeur de ».

Exemples



Exemple

- $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\varphi(a) = \{1, 7\}$, $\varphi(b) = \{7, 6\}$, $\varphi(c) = \{7, 6\}$, $\varphi(d) = \{5, 6\}$, $\varphi(e) = \{5, 4\}$, $\varphi(f) = \{4, 2\}$, $\varphi(g) = \{3, 7\}$, $\varphi(h) = \{3, 2\}$.



Définitions

- Un graphe est dit **fini** si S est fini. Le cardinal de S est appelé **ordre** du graphe.
- Soit a une arête et s_1 et s_2 deux sommets tels que $\varphi(a) = \{s_1, s_2\}$. On dit que s_1 et s_2 sont les **extrémités** de a .
- On dit que l'arête a est **incidente** aux sommets s_1 et s_2 qui sont alors **adjacents**.

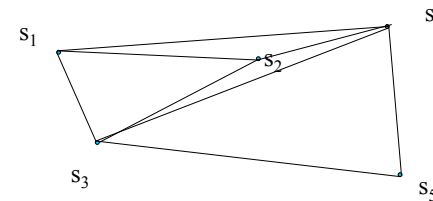
Exercice 1

Représenter (par un dessin) le graphe G défini par :

$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$ tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e , soient respectivement associées $[s_1, s_1]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_2]$, $[s_1, s_3]$, $[s_2, s_3]$.



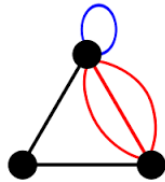
Exemple 2



Construire l'application φ

Remarques

- Les deux extrémités peuvent être confondues. On dit alors que l'arête est une boucle.
- Deux arêtes différentes peuvent avoir les mêmes extrémités (on dit qu'elles sont parallèles), si c'est le cas on parle de multigraphes.



Graphe non orienté simple

Un graphe non orienté est **simple** s'il n'a ni arêtes parallèles ni boucle.

Propriété

Si n est l'ordre d'un graphe non orienté simple G et m est son nombre d'arêtes alors :

$$m \leq \binom{n}{2}$$

Graphe partiel et sous-graphe

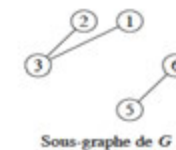
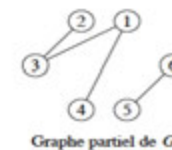
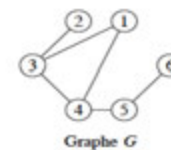
Soit $G = (S, A)$ un graphe.

1. Le graphe $G' = (S, A')$ est un **graphe partiel** de G , si A' est inclus dans A

Autrement dit, on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G .

2. Pour un sous-ensemble de sommets S' inclus dans S , le sous-graphe de G induit par S' est le graphe $G = (S', E(S'))$ où $E(S')$ est l'ensemble formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A . Autrement dit, on obtient G' en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G , ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

Graphe partiel, sous-graphe Exemples



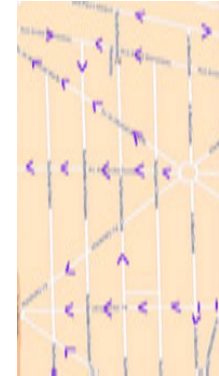
Remarques

- Un sous-graphe peut être vide.
- Un graphe partiel peut également avoir un ensemble vide d'arêtes (sous-graphe stable)

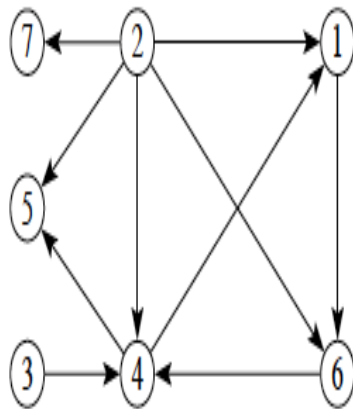
Définition, graphes orientés

Un **graphe orienté (ou digraphe)** G est la donnée d'un triplet (S, A, φ) où S et A sont deux ensembles non vides et φ une application qui associe à tout élément de A un couple d'éléments de S .

Les éléments de A sont appelés **arcs**
Les éléments de S sont appelés **sommets**.



Graphe orienté

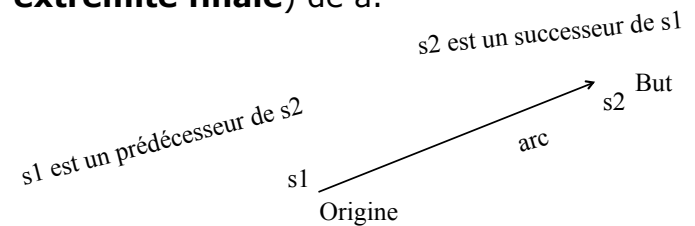


Sommets : 1, 2, ..., 7
Arcs : (2,1), (2,7), ...

Définitions, vocabulaire

Soit G un **graphe orienté**.

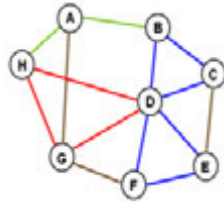
Soient s_1 et s_2 deux sommets et a un arc tels que : $\varphi(a) = (s_1, s_2)$. On dit que s_1 est **l'origine** de a et s_2 est **le but** (ou **extrémité finale**) de a .



Définitions

Définition

Soit u un sommet d'un graphe (non orienté). Le **degré** $d(u)$ de u est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Une boucle contribue pour 2 dans le degré.



Donner $d(u)$ pour $u=A$, $u=D$,
 $u=G$

Exercice

En utilisant les notions d'ensemble et d'application (re-)définir (de manière plus précise) la notion de graphe



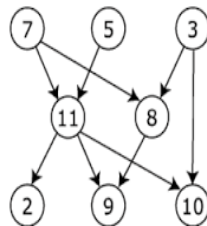
Degré d'un sommet (cas orienté)

Soit u un sommet d'un graphe **orienté** G . Le **demi-degré** supérieur $d^+(u)$ de u est le nombre d'arcs entrants en u .

Le **demi-degré** inférieur $d^-(u)$ de u est le nombre d'arcs sortants de u .

Le **degré de u** est alors

$$d(u) = d^+(u) + d^-(u)$$



Calculer $d(2)$, $d(11)$ dans le graphe donné par le dessin ci-contre

Théorème 1 Lemme des poignées de mains

1. La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe, c'est donc un nombre pair. Si $G=(S,A)$ alors :

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2 \times |A|$$

Ici $|A|$ désigne le cardinal de A

2. Un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice



Est-il possible d'organiser un tournoi de football entre 7 équipes de telle façon que chaque équipe rencontre 3 et seulement 3 autres équipes ?

Exercice



Peut-on tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

Exercice



Montrer que dans tout groupe de 6 personnes ou bien il y a trois personnes qui se connaissent entre elles ou bien il y a trois personnes dont chacune ne connaît pas les deux autres.

Exercice

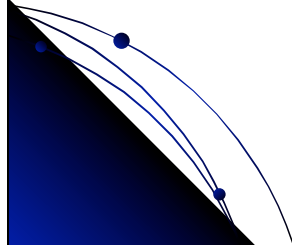


Montrer que dans tout groupe de au moins 2 personnes, il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis.




Leçon 2


Chaînes eulériennes , chemins eulériens



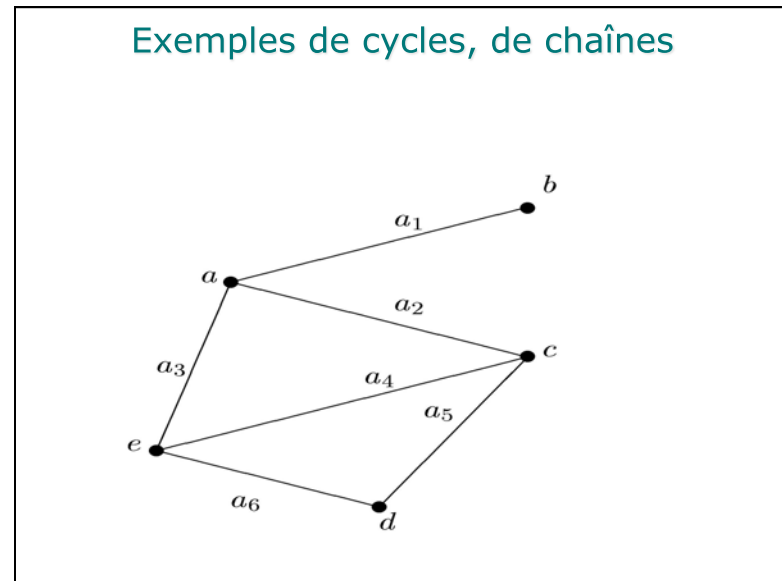
Définitions

Une **chaîne** (dans un GNO) est une séquence :
 $s_0; a_1; s_2; a_2; \dots; a_n; s_n,$

 débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses extrémités. La **longueur** de la chaîne est égale au nombre des arêtes qui la constituent.

 Une chaîne est dite **fermée** si $s_0 = s_n$. Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont distinctes.

Dans le cas orienté chaîne est remplacée par chemin, cycle par circuit et arêtes par arcs.

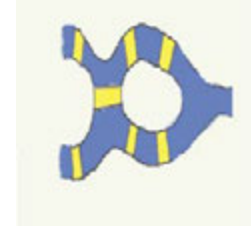


Connexité

- Un graphe simple est dit connexe si pour tout couple de sommets (i,j) , il existe une chaîne joignant i à j .
- On appelle composante connexe du graphe G un sous-graphe connexe de G .

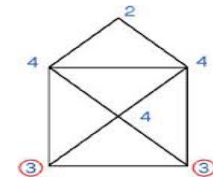
Chaîne eulérienne

Une **chaîne** dans un graphe est dite **eulérienne** si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle, on l'appelle **cycle eulérien**.



Exemple

Peut-on dessiner une enveloppe sans lever la main et sans passer deux fois par le même trait ?



Chaîne eulérienne



Théorème (Euler)

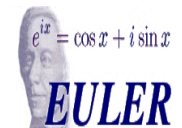
Un graphe sans boucle connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si soit il ne possède pas de sommets de degré impair soit il en possède exactement 2.

Corollaire

Un graphe sans boucle connexe admet un cycle eulérien ssi tous les degrés des sommets sont pairs.

Cas orienté : chemin eulérien

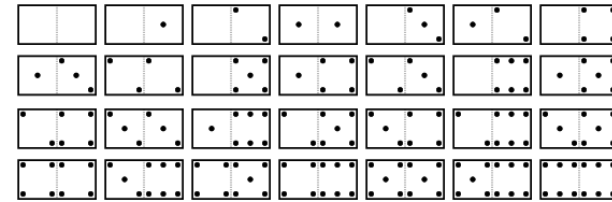
Théorème. Un graphe sans boucle orienté connexe admet un circuit (cycle orienté) eulérien si et seulement si de chaque sommet il part autant d'arêtes qu'il en arrive.



Preuve du théorème d'Euler

Exercice

Un jeu de domino est formé de pions portant les numéros de 0 à 6. On supposera que ce jeu ne comporte pas de double. Peut-on en suivant la règle du jeu de dominos, les aligner pour former un cycle eulérien ? Quelle est la longueur de ce cycle ?



Graphe fortement connexe

- Un graphe orienté est dit **fortement** connexe si pour tout couple (u,v) de sommets distincts, il existe un chemin reliant le sommet u au sommet v (et donc un chemin de v à u)
- Graphe orienté sans circuit : pas de chemin d'un sommet à lui-même

Exercice

Donner des exemples de graphes fortement connexe et de graphes non fortement connexe

Différence entre graphe fortement connexe et graphe connexe ?

Exemples de graphes avec (resp. sans) circuit.

EXERCICE

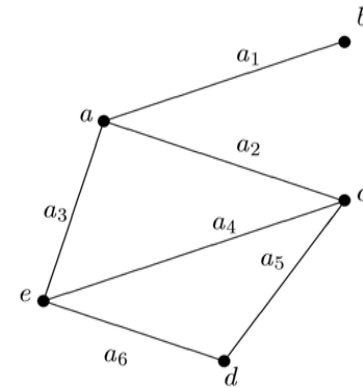
Soit E l'ensemble des sommets d'un graphe orienté
La relation R la relation binaire définie dans E par

« $x R y$ si et seulement si il existe un chemin de x vers y ET de y vers x »

est une relation d'équivalence. Quelles sont ses classes d'équivalence ?

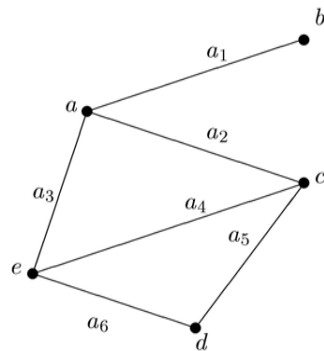
Représentation de graphes, comptage de chaînes

Représentation



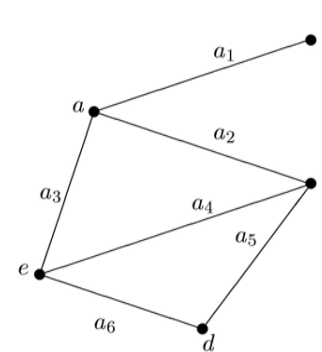
Représentation

- Liste d'adjacence



Représentation

- Liste d'adjacence



a	b,c,e
b	a
c	a,e,d
d	c,e
e	a,c,d

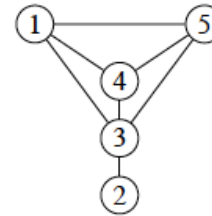
Représentation

- Dessiner un graphe à partir de la liste d'adjacence.

1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

Représentation

Dessiner un graphe à partir de la liste d'adjacences.



1 : 3, 4, 5
2 : 3
3 : 1, 2, 4, 5
4 : 1, 3, 5
5 : 1, 3, 4

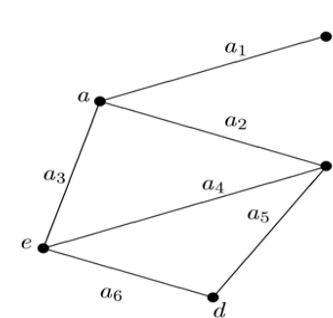
Matrice d'adjacence

Définition

Soit n dans \mathbf{N} et soit G un graphe ayant n sommets numérotés de 1 à n . On appelle matrice d'adjacence de G la matrice (d'ordre n) $M=(a_{i,j})$ où $a_{i,j} = 1$ si l'arête (resp arc) i,j existe et $a_{i,j} = 0$ sinon.

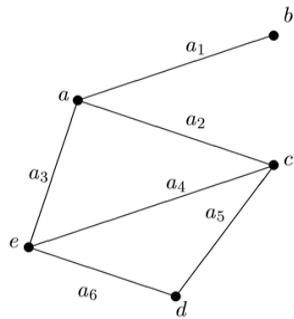
Exercice

Donner la matrice d'adjacence du graphe défini par le dessin :



Solution

Matrice d'adjacence



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Représentation

Dans le cas de graphes orientés : liste des précurseurs et des successeurs.

Application Successeur, application Précurseur
(En exercices)

Nombre de chaînes (chemins) de longueur donnée

Théorème

Soit G un graphe de matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$.
Soit p un entier naturel non nul. Le nombre de chaînes (chemins) de longueur p joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j dans la matrice M^p .

Existence de chaînes (chemins) entre deux sommets

Théorème. Soit G un graphe de matrice d'adjacence $M = (m_{ij})$.
On considère cette dernière comme matrice booléenne.
Soit pour p un nombre naturel,
 M^p la puissance (p -ième) de M pour le produit de Boole. Posons

$$M^p = (m_{ij}^p)$$

On a $m_{ij}^p = 1$ si et seulement si il existe un chemin de longueur p du sommet i vers le sommet j

Rappels – addition et produit de Boole

- **Addition (Disjonction)**

+ (OU)	0 (F)	1 (V)
0 (F)	0 (F)	1 (V)
1 (V)	1 (V)	1 (V)

Rappels – addition et produit de Boole

- **Produit (Conjonction)**

x (et)	0 (F)	1 (V)
0 (F)	0 (F)	0 (F)
1 (V)	0 (F)	1 (V)

Calcul matriciel Booléen Exemple

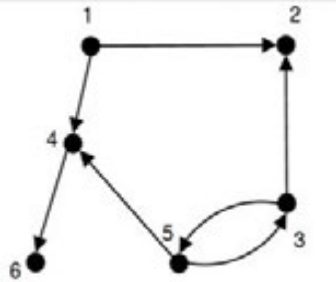
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel Booléen Exemple

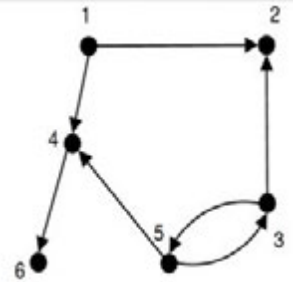
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

Retour au theoreme, existence de chemin, exemple



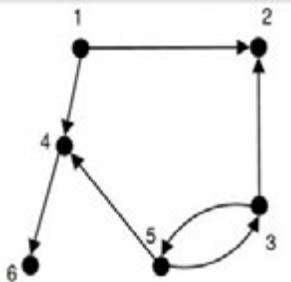
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1



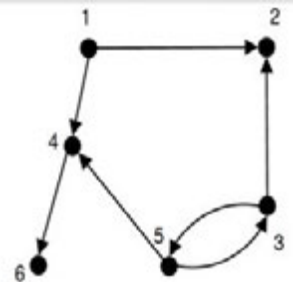
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple



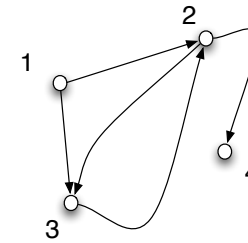
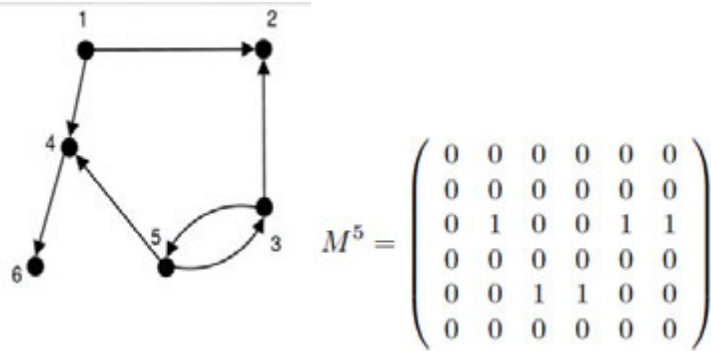
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple



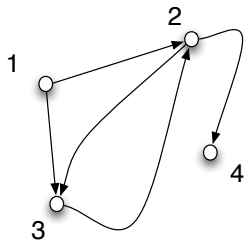
$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple



Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



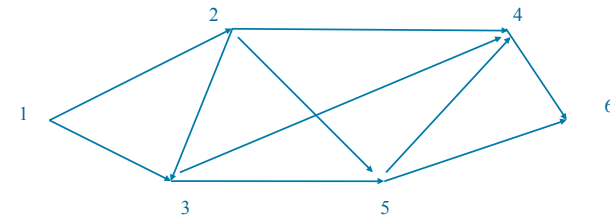
Exemple 2

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

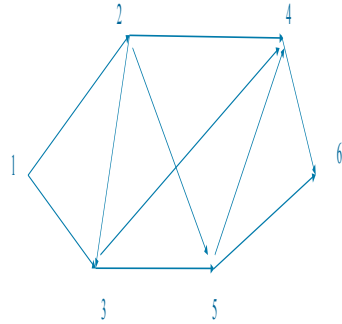
Nombre de chaînes (chemins) de longueur donnée

Exercice

Écrire la matrice M d'adjacence du graphe ci-dessous. Calculer, pour n entier naturel non nul M^n . Combien possède-t-il de chemins de longueur 4, 5 et 6 ?

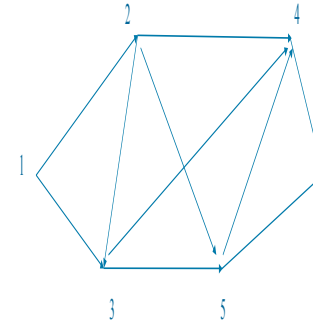


Nombre de chemins de longueur donnée



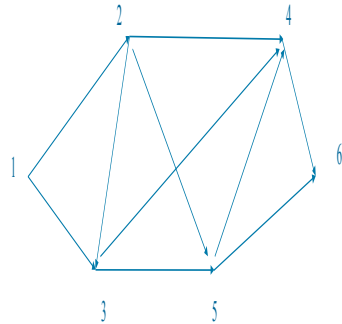
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombre de chemins de longueur donnée



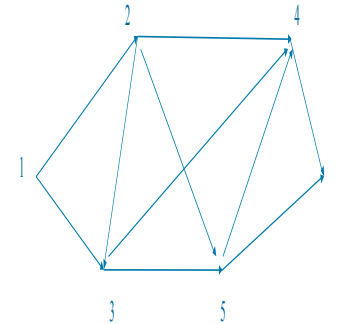
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombre de chemins de longueur donnée



$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

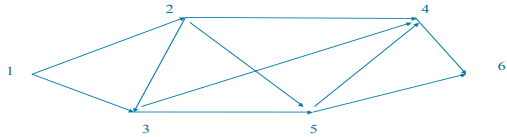
Nombre de chemins de longueur donnée



$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 6 chemins de longueurs 6

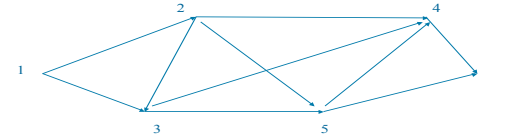
Nombre de chemins de longueur donnée



$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 6, M^n = 0.$$

Il y a 2 chemins de longueur 5 :
entre les sommets 1 et 4 et entre 1 et 6

Nombre de chemins de longueur donnée

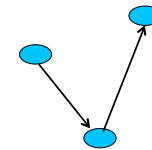


$$M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 6, M^n = 0.$$

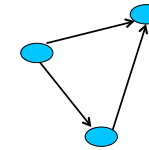
Il n'y a pas de chemin de longueur 6.

Fermeture transitive d'un GO

Fermeture transitive d'un GO Exemple



G



Fermeture transitive de G

Fermeture transitive d'un GO

Définition

Soit G un GO. La fermeture transitive de G est le graphe G' obtenu de la façon suivante :

1. Les sommets de G' sont les sommets de G
2. Chaque sommet de G' a une boucle
3. Pour deux sommets de G , il existe un arc entre x et y ssi il existe un chemin de x vers y .

Algèbre de Boole

Théorème

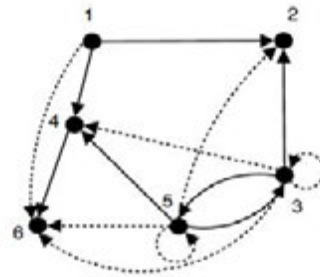
- Si M est la matrice d'adjacence de G (d'ordre n), celle de la fermeture transitive de G est :

$$M + M^2 + \dots + M^{n-1}.$$

On s'arrête quand les puissances sont toutes égales

Exemple

- Voir ci-dessus



$$M \vee M^2 \vee M^3 \vee M^4 \vee M^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\vee = addition booléenne

Remarque

Un graphe G est fortement connexe si les coefficients de la matrice de G' sont tous égaux à 1.

Matrice d'incidence

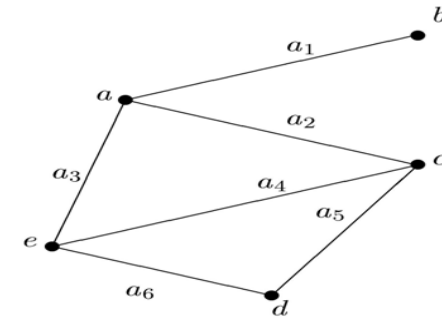
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple comportant n sommets et p arêtes. La matrice d'incidence $M = (m_{ij})$ de G est la matrice $n \times p$ définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \text{ est incident à } s_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

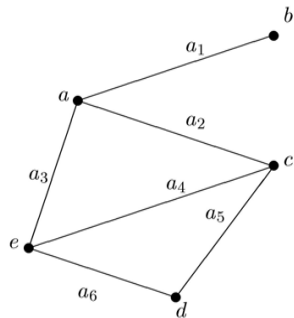
Matrice d'incidence

- Donner la matrice d'incidence du graphe défini par le dessin :



Solution

- Matrice d'incidence



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leçon 3

Problèmes de coloriage, coloration d'un graphe

Définitions

- Colorier un graphe c'est affecter à chaque sommet une « couleur » de telle manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.
- Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires à son coloriage (noté $\chi(G)$).
- On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est stable s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents

Propriétés

- 1. Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G , on a $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- 2. Pour tout $n > 0$, $\chi(K_n) = n$
- 3. Soit $n > 0$ et C_n le cycle de longueur n . Si n est pair alors $\chi(C_n) = 2$ et si n est impair alors :
 - $\chi(C_n) = 3$.
- 4. L'existence d'un coloriage donne une majoration du nombre chromatique !

Compléments

- ✓ Soit r le maximum des degrés de G .
Alors $\chi(G) \leq r + 1$.
- ✓ Si G est connexe et ne contient pas de cycle de longueur impaire alors $\chi(G) \leq r$ (Brooks, 1941).
- ✓ Toute carte de géographie peut être coloriée avec 4 couleurs (Appel et Haken, 1976).



Problème

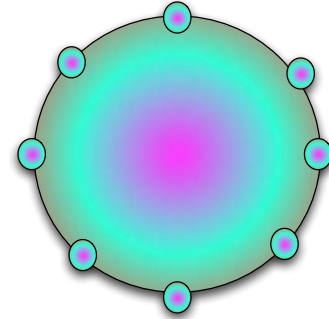
Un groupe de 8 personnes doit participer à 2 réunions. À la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, décide non seulement de ne se mettre à côté de ses voisins immédiats mais aussi de ne pas s'asseoir à la même table qu'eux !

Combien de tables au minimum sont nécessaires pour la seconde réunion ? Combien de personnes peuvent s'asseoir à une même table.

Faire le même exercice avec 9 au lieu de 8 participants.

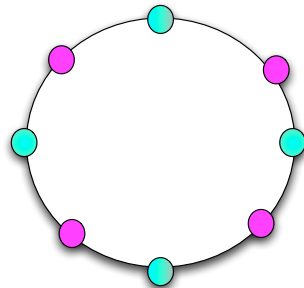
Cas de 8 participants

Situation modélisable par un cycle d'ordre 8



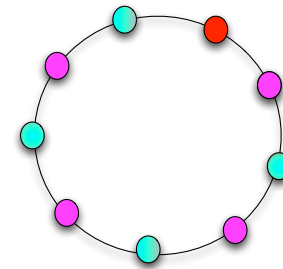
Cas de 8 participants

- Nombre chromatique = 2,
- 2 tables sont nécessaires



Cas des 9 participants

Nombre chromatique = 3



Remarques

- ✓ Dans un graphe colorié, l'ensemble des sommets de même couleur est un sous-ensemble stable.
- ✓ C'est donc la même chose que de se donner une k-coloration ou une partition en k sous-ensembles stables.
- ✓ Pas de formule magique pour calculer $\chi(G)$!

Algorithme de Welch et Powell

1. On classe les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient une liste a, b, c, ... telle que : $\deg(a) \geq \deg(b) \geq \dots$
2. On choisit une couleur c1 pour a, et en parcourant la liste, le premier sommet non colorié et non adjacent à un sommet déjà colorié avec c1 (couleur d'usage) se verra attribuer la couleur c1.
3. On reprend la démarche en attribuant à chaque fois une nouvelle couleur d'usage au premier sommet de la liste non encore colorié.
4. On s'arrête dès que tous les sommets sont coloriés.

Exercice

Une entreprise fabrique 8 produits différents appelés A, B, ..., H.
On sait que pour des raisons de sécurité :

- Le produit A ne peut pas être stocké avec B, C et G
- Le produit B ne peut pas être stocké avec A, C, D, G et H
- Le produit C ne peut pas être stocké avec A, B, E et F
- Le produit D ne peut pas être stocké avec B, E et F
- Le produit E ne peut pas être stocké avec C et D
- Le produit F ne peut pas être stocké avec C, D et G
- Le produit G ne peut pas être stocké avec A, B et F
- Le produit H ne peut pas être stocké avec B.

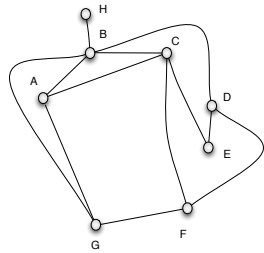
Quel est le nombre minimal de hangars différents que cette entreprise doit posséder pour répondre aux normes de sécurité ?

Tableau des incompatibilités

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X				X	
B	X		X	X			X	X
C	X	X			X	X		
D		X			X	X		
E		X	X					
F		X	X				X	
G	X	X				X		
H		X						

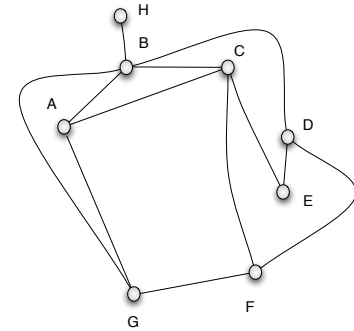
Tableau des incompatibilités

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X				X	
B	X		X	X			X	X
C	X	X			X	X		
D		X			X	X		
E		X	X					
F		X	X				X	
G	X	X				X		
H		X						

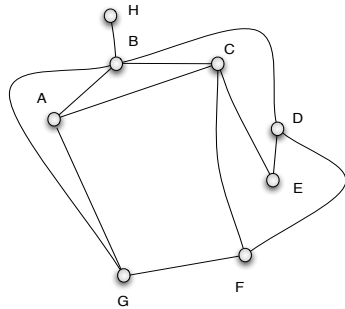


Degrés

Sommet	Degré
A	3
B	5
C	4
D	3
E	2
F	3
G	3
H	1

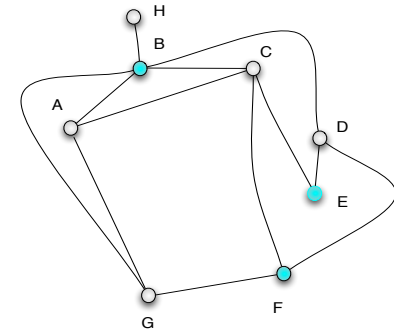


Sommet	Degré
A	3
B	5
C	4
D	3
E	2
F	3
G	3
H	1



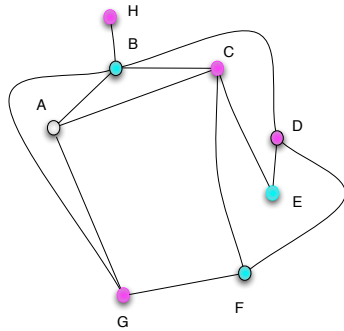
$$\text{deg}(B) \geq \text{deg}(C) \geq \text{deg}(A) \geq \text{deg}(D) \\ \geq \text{deg}(F) \geq \text{deg}(G) \geq \text{deg}(E) \geq \text{deg}(H)$$

ÉTAPE 1: B, E, F
ont même couleur



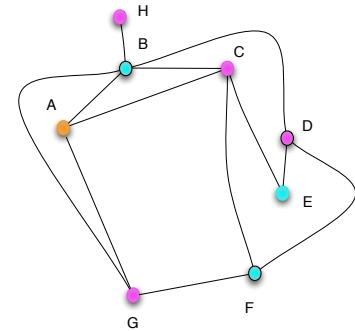
$$\text{deg}(B) \geq \text{deg}(C) \geq \text{deg}(A) \geq \text{deg}(D) \\ \geq \text{deg}(F) \geq \text{deg}(G) \geq \text{deg}(E) \geq \text{deg}(H)$$

ÉTAPE 1: B, E, F
ont même couleur
ÉTAPE 2 : C, D, G et
H ont une 2e
couleur



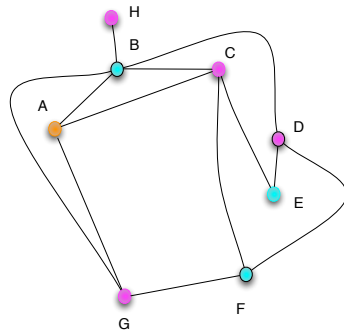
$$\text{deg}(B) \geq \text{deg}(C) \geq \text{deg}(A) \geq \text{deg}(D) \\ \geq \text{deg}(F) \geq \text{deg}(G) \geq \text{deg}(E) \geq \text{deg}(H)$$

ÉTAPE 1: B, E, F
ont même couleur
ÉTAPE 2 : C, D, G et
H ont une 2e
couleur
ÉTAPE 3: A a une 3e
couleur



$$\text{deg}(B) \geq \text{deg}(C) \geq \text{deg}(A) \geq \text{deg}(D) \\ \geq \text{deg}(F) \geq \text{deg}(G) \geq \text{deg}(E) \geq \text{deg}(H)$$

ÉTAPE 1: B, E, F ont
même couleur
ÉTAPE 2 : C, D, G et H
ont une 2e couleur
ÉTAPE 3: A a une 3e
couleur



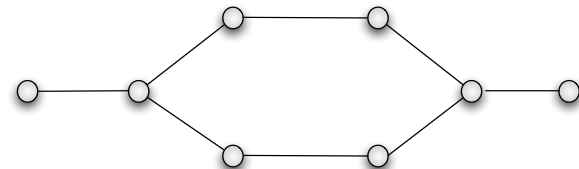
Le nombre chromatique est inférieur ou égal à 3.

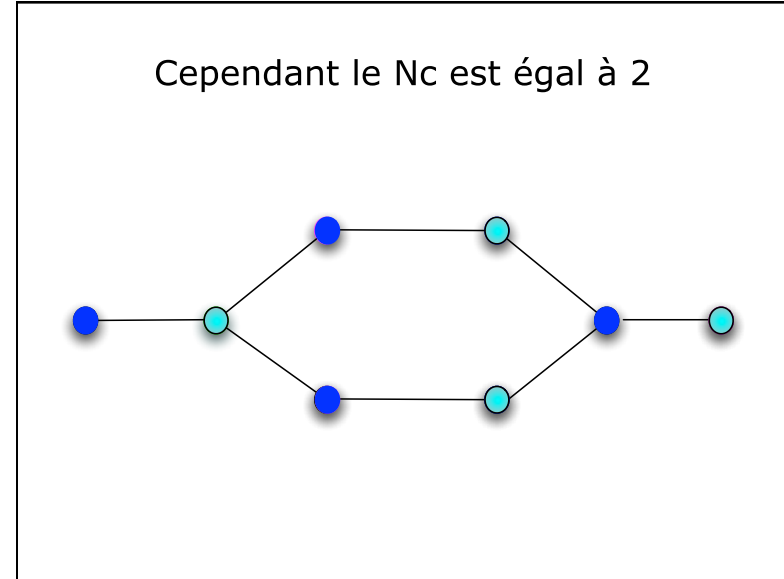
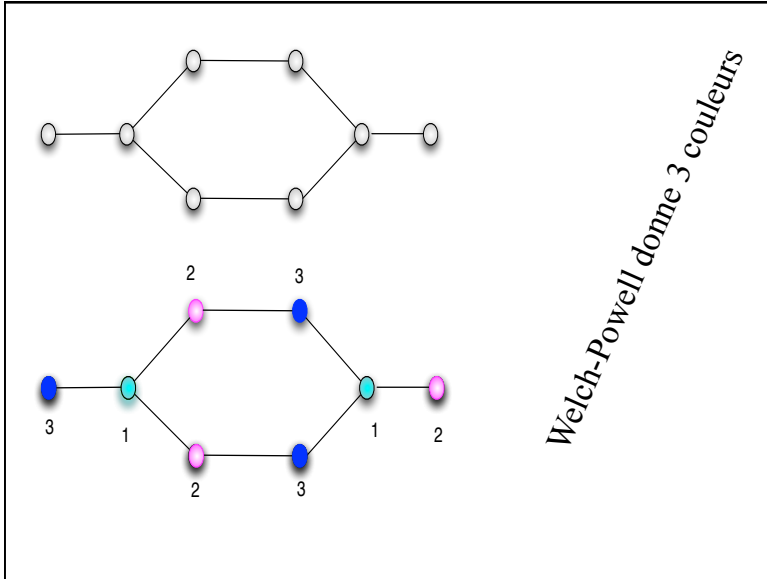
En fait il est égal à 3. Le nombre minimal de hangars différents =3.

Remarques

En entrée de l'algorithme de Welch et Powell il y a un graphe simple non orienté, en sortie une coloration donc une majoration du nombre chromatique.

Colorier par l'algorithme de Welch et Powell le graphe donné par le dessin suivant :





Exercice

Le directeur d'un petit zoo veut réorganiser l'habitat de telle sorte que les animaux cohabitent dans des enclos plus vastes.

Malheureusement, il n'est pas possible de laisser tous les animaux ensemble dans un seul enclos, car certains sont les prédateurs des autres !

Le tableau ci-contre indique, parmi les dix races d'animaux que possède le zoo, lesquelles sont les prédateurs ou les proies des autres.

Combien d'enclos le directeur du zoo doit-il prévoir ?

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a		X			X					X
b	X			X			X			
c								X	X	
d	X				X					
e	X								X	
f				X						X
g	X	X								
h			X						X	
i					X			X	X	X
j	X	X	X		X			X		X

Exercice

Une école d'ingénieurs doit organiser les examens des enseignements optionnels de ses élèves de troisième année. Les différentes options sont : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Sport (S), Internet (I) et Dessin industriel (D).

Certains étudiants ont choisi plusieurs options, et les regroupements existants sont : (F,A,M) ; (D,S) ; (I,S) ; (I,M).

Combien de demi-journées seront-elles nécessaires à cette organisation sachant que la durée de chaque épreuve est d'une demi-journée ?

Exercice

5 Dans une université les étudiants sont désignés par une lettre majuscule. Six matières représentées par une lettre minuscule font l'objet d'un examen oral de rattrapage que doivent passer à chaque fois 3 étudiants suivant le tableau suivant :

Matières	Candidats		
Anglais a	A	B	C
Physique p	A	D	E
Mathématiques m	F	D	G
Chimie c	H	I	J
Histoire h	I	E	A
Français f	H	B	C

Plusieurs candidats peuvent passer une même matière dans la même demi-journée, mais chaque candidat ne doit avoir qu'un examen par demi-journée.

Quel est le nombre de demi-journées nécessaires à l'organisation de ces oraux ?

Plus court chemin

Plus court chemin

Définition

- Soit G un graphe pondéré. Le plus court chemin (pcc) (la plus courte chaîne) entre deux sommets de G est le chemin (la chaîne) constitué(e) des arcs (arêtes) dont la somme des poids est la plus petite.
- Par commodité on appelle donc plus court chemin, celui de poids minimum.

Pour déterminer un pcc, on a souvent besoin de tester l'absence de circuit

Graphes orientés sans circuit

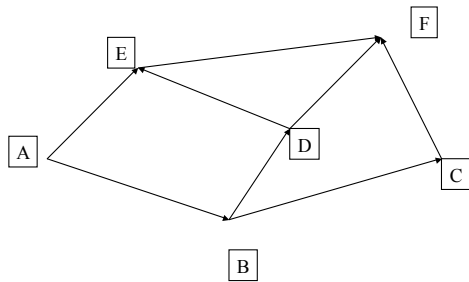
Algorithme permettant de tester l'absence de circuit

1. Dresser la table des successeurs du graphe
2. Chercher un sommet sans suivant
3. Barrer ce sommet partout où il apparaît dans la table
4. Répéter le processus en considérant comme vide toute ligne ne contenant que des sommets barrés

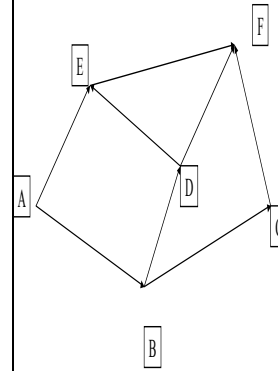
Si tous les sommets peuvent être barrés, le graphe est sans circuit

Exemple

Dresser la table des successeurs du graphe suivant.
Possède-t-il un circuit ?

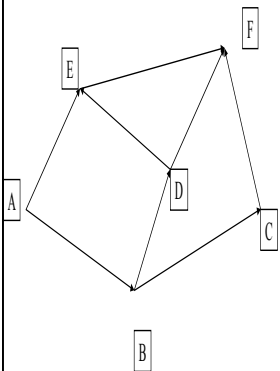


Exemple



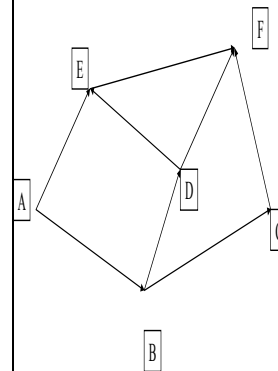
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 1



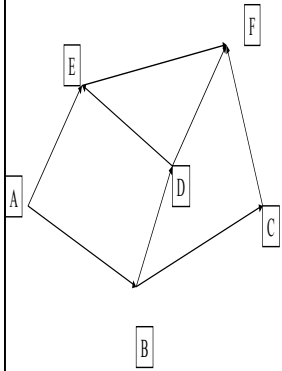
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 2, C SANS SUIVANT



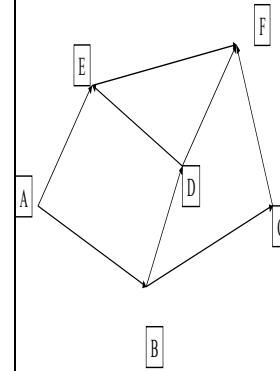
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 3, E SANS SUIVANT



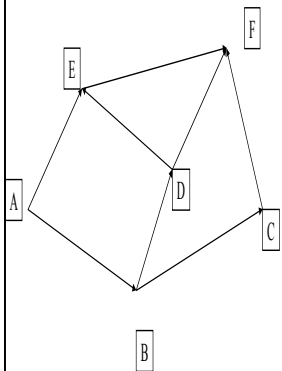
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 3, D SANS SUIVANT



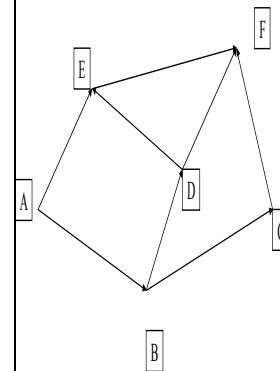
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 4, B SANS SUIVANT



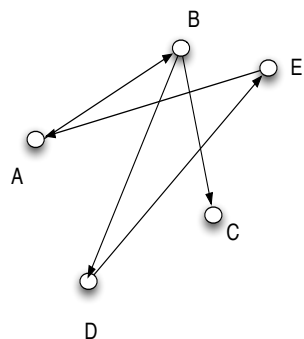
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	

ÉTAPE 5, A SANS SUIVANT, FIN



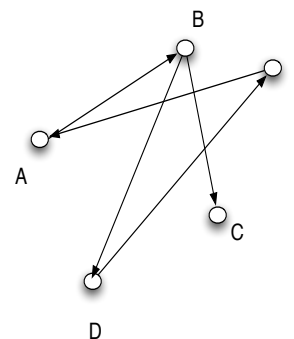
A	E,B
B	D,C
C	F
D	E
E	F
F	PAS DE CIRCUIT

Autre exemple



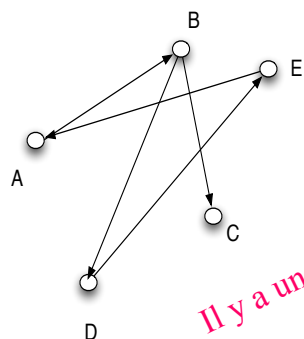
A	B
B	D,C
C	
D	E
E	A

Autre exemple, étape 1



A	B
B	D,C
C	
D	E
E	A

Autre exemple, étape 2 TOUT SOMMET A UN SUCCESSUEUR



Il y a un circuit

A	B
B	D,C
C	
D	E
E	A

Ordonnement par niveaux

Théorème

1. Un graphe simple orienté sans circuit possède une origine.
2. Un graphe orienté sans circuit peut être ordonné par niveaux.

Ordonnement par niveaux

Algorithme

Donnée : graphe (S,A) simple orienté sans circuit avec une origine (sommet sans prédécesseur)

Sortie : le rang (niveau) de chaque sommet

Ordonnement par niveaux

Algorithme

Début

Rang courant = 0
Tant que S non vide faire
-- Tous les sommets sans prédécesseur ont le rang courant,
-- Retirer de S tous les sommets sans prédécesseur
-- Incrémenter le rang courant
FinTant

Fin

Ordonnement par niveaux, exemple

- Ordonner par niveaux le graphe

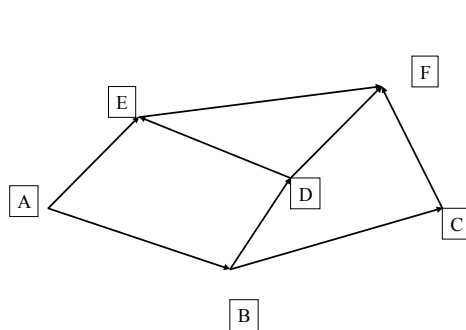
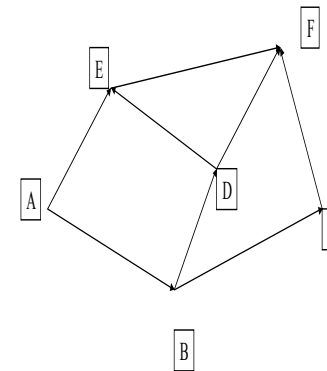


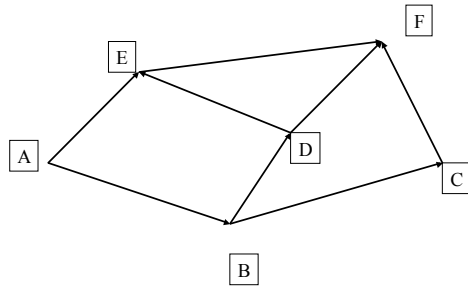
Table des prédécesseurs



Som met	Prédécesseur
A	néant
B	A
C	B
D	B
E	D
F	E

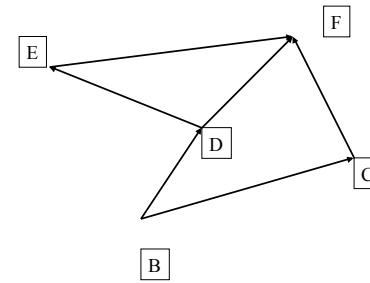
Ordonnancement par niveaux

- Niveau 0 : A (n'a pas de prédécesseur)



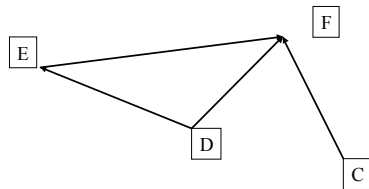
Ordonnancement par niveaux

- Niveau 1 : B (n'a plus de prédécesseur)



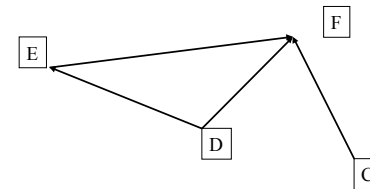
Ordonnancement par niveaux

- Niveau 1 : B (n'a plus de prédécesseur)



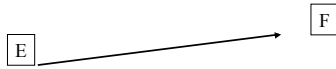
Ordonnancement par niveaux

- Niveau 2 : C et D (n'ont plus de prédécesseur)



Ordonnancement par niveaux

- Niveau 3 : E (plus de prédécesseur)

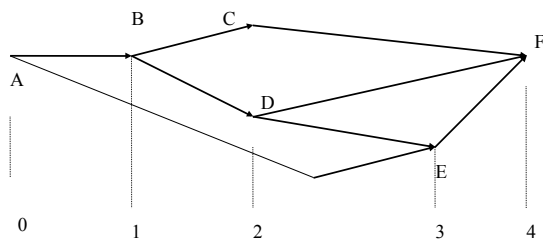


Ordonnancement par niveaux

- Niveau 4 : F (plus de prédécesseur)



Graphe ordonné par niveaux

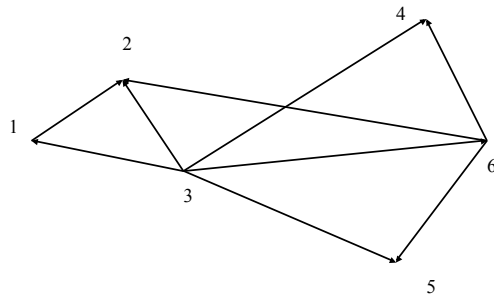


Remarque

Le niveau d'un sommet est la longueur maximale d'un chemin d'une origine à ce sommet.

Exercice

Ordonner par niveaux le graphe suivant



Pcc, algorithme de Bellman-Ford

- **Donnée** : graphe orienté simple pondéré sans cycle (circuit) (donc ayant un sommet origine D) et une extrémité finale F.
- **Sortie** : plus court chemin entre l'origine D et F.

PCC

Algorithme Bellman-Ford

Donnée : graphe (S,A) simple orienté pondéré sans circuit avec une origine O et une extrémité S

Sortie : Plus court chemin entre O et S

Algorithme Bellman-Ford

1. Affecter le poids 0 au sommet O
2. Pour chaque niveau (j) , considérer pour chaque sommet X_{ij} , l'ensemble de ses prédécesseurs

$$\Gamma^-(X_{ij}) = \{X_{ij}^1, \dots, X_{ij}^{l_{ij}}\}$$

3. Pour chaque X_{ij}^k calculer

$$w_{ijk} = \text{poids } X_{ij}^k + \text{poids de l'arc } (X_{ij}^k - X_{ij})$$

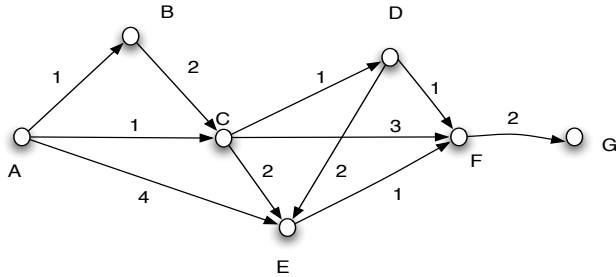
4. Pondérer X_{ij} par

$$\text{poids}(X_{ij}) = \inf_k (w_{ijk})$$

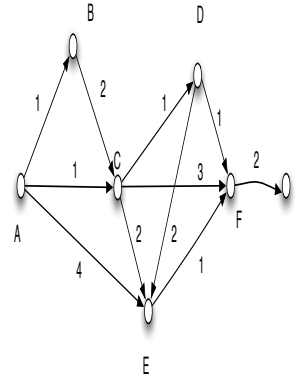
Et ceci jusqu'au dernier niveau

Exercice

Utiliser Ford-Bellman pour déterminer le plus « court » chemin entre l'origine et l'extrémité finale

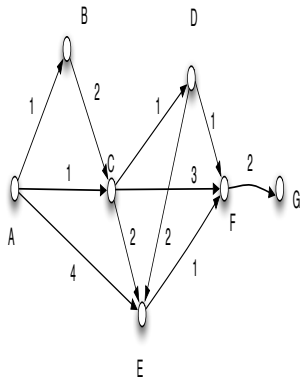


1. Ordonner par niveau



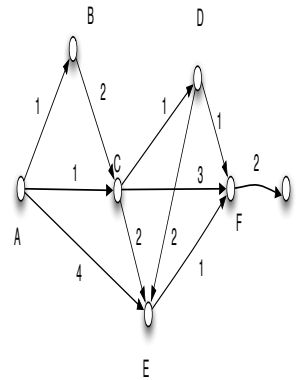
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	
C	B, A	
D	C	
E	A, C, D	
F	C, D, E	
G	F	

1. Ordonner par niveau



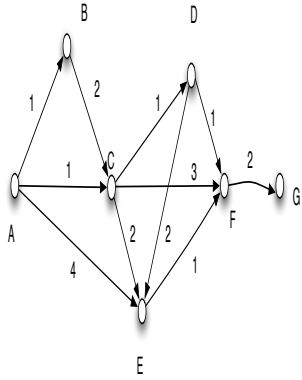
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	
D	C	
E	A, C, D	
F	C, D, E	
G	F	

1. Ordonner par niveau



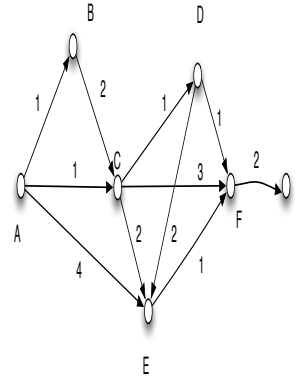
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	2
D	C	
E	A, C, D	
F	C, D, E	
G	F	

1. Ordonner par niveau



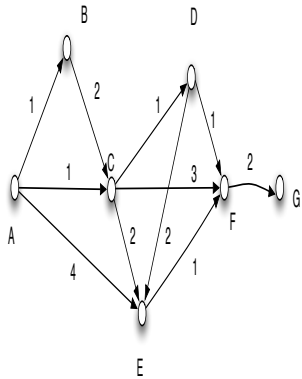
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	2
D	C	3
E	A, C, D	
F	C, D, E	
G	F	

1. Ordonner par niveau



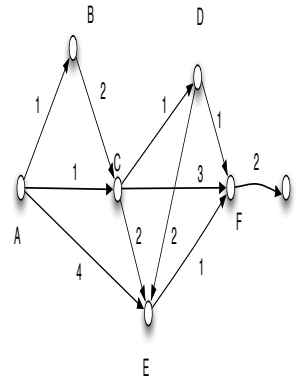
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	2
D	C	3
E	A, C, D	4
F	C, D, E	
G	F	

1. Ordonner par niveau

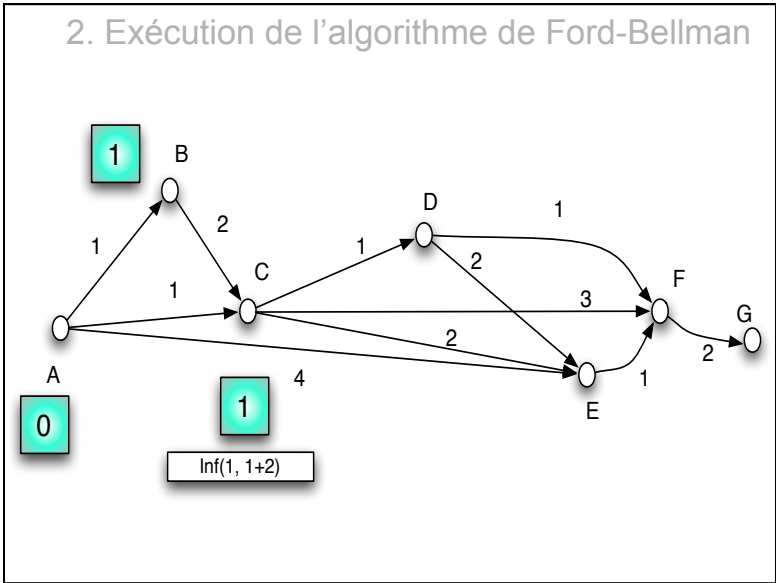
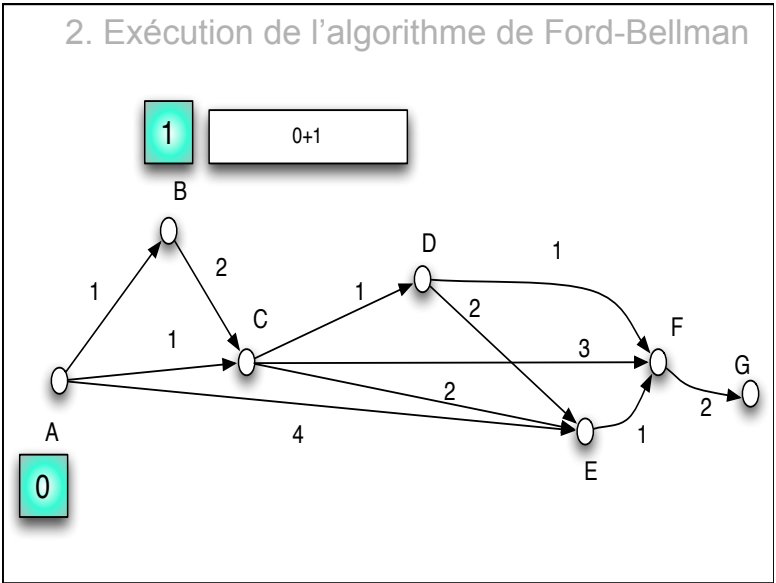
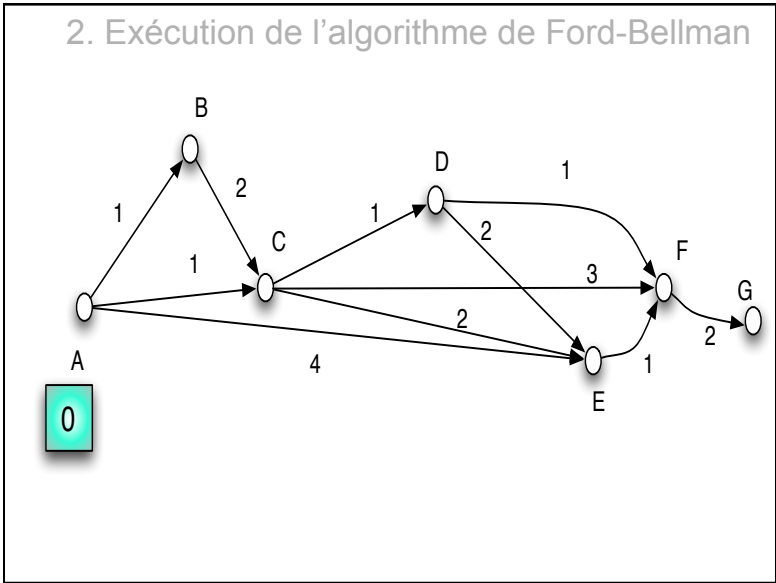
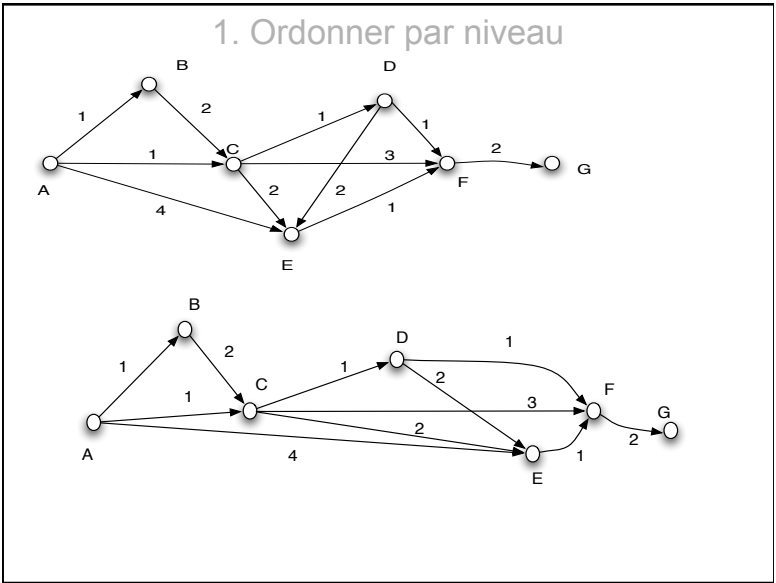


Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	2
D	C	3
E	A, C, D	4
F	C, D, E	5
G	F	

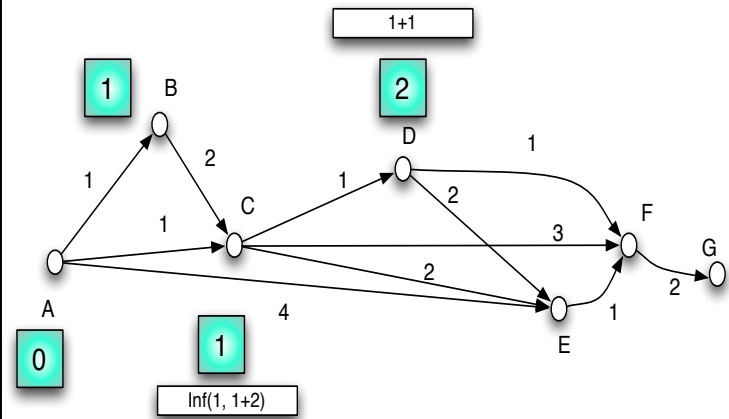
1. Ordonner par niveau



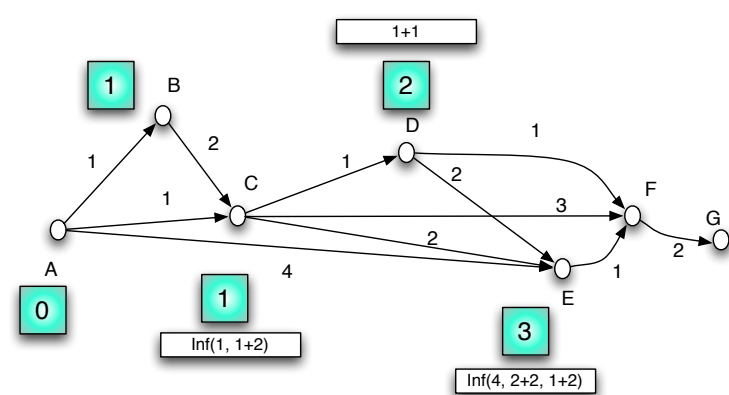
Sommet	Prédéces-seurs	niveau
A	néant	0
B	A	1
C	B, A	2
D	C	3
E	A, C, D	4
F	C, D, E	5
G	F	6



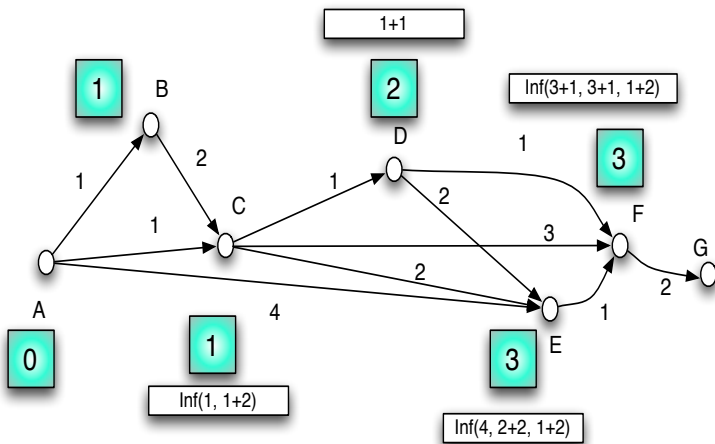
2. Exécution de l'algorithme de Ford-Bellman



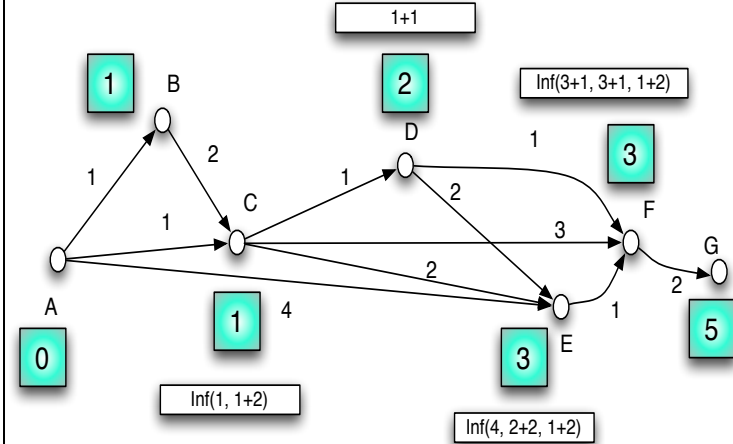
2. Exécution de l'algorithme de Ford-Bellman



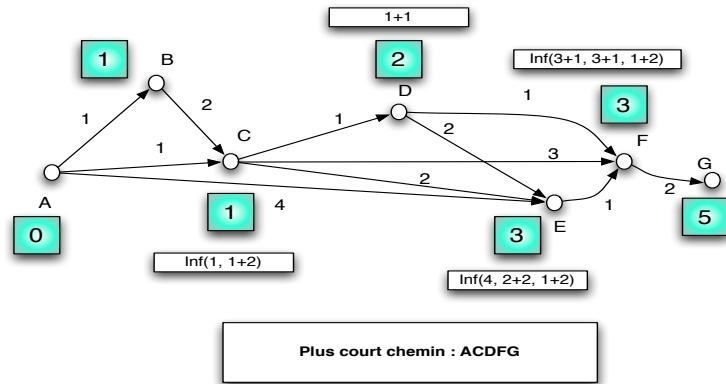
2. Exécution de l'algorithme de Ford-Bellman



2. Exécution de l'algorithme de Ford-Bellman



2. Exécution de l'algorithme de Ford-Bellman



Plus court chemin, algorithme de Dijkstra (cas orienté)

- **Entrée** : graphe (E,A) pondéré (valué positivement) connexe, un sommet initial D et un sommet final F.
- **Sortie** : un plus court chemin entre D et F.
- **Principe**. Si p est un plus court chemin (pcc) entre deux sommets, c'est également (ou du moins sa trace) un pcc entre tous les sommets qui sont sur ce chemin : si $p=(s,\dots,t)$ et x est dans p alors (s,\dots,x) est un pcc de s à t .
- Il s'appuie sur le fait que si x et y sont deux sommets d'un graphe G alors, pour tout sommet s ,
- $\text{poids}[pcc(s,y)] = \min\{\text{poids}[pcc(s,x)] + \text{poidsArc}(xy)\}$

Algorithme de Dijkstra. Mise en œuvre

Donnée Graphe $G=(S,A)$, v_{ij} =évaluation de l'arc entre x_i et x_j

1. Initialisation

$T=\{x_1\}$ et $p_1=0$

$p_i = v_{1i}$ si x_i est dans $\Gamma(x_1)$ et $p_i = \infty$ sinon

2. Tant que T différent de S faire

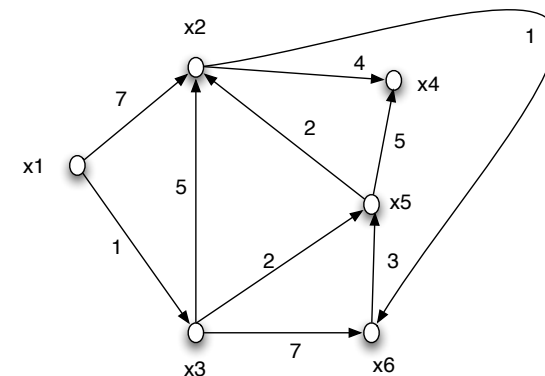
-- a) Sélectionner le sommet x_j dans $S \setminus T$ tel que $p_j = \min(p_i)$ pour x_i dans $S \setminus T$. Enlever le sommet sélectionné de S et le mettre dans T (phase de sélection).

-- b) Calculer pour tous les sommets i suivant du sommet x_j de $S \setminus T$: $p_i = \min(p_i, p_j + v_{ji})$ et retour en a) (phase d'ajustement).

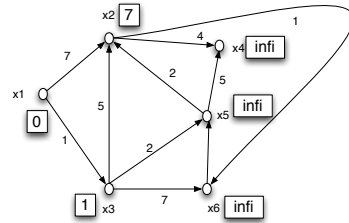
Fin Tant que

Exemple

Soit à déterminer le plus court chemin entre x_1 et tous ses descendants



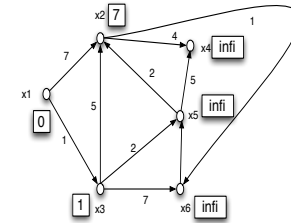
Étape 1 : $T = \{x1\}$, $p1=0$, $p2=7$, $p3=1$,
 $p4=p5=p6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x2, x3, x4, x5, x6\}$



Poids $(x6-x5)=3$

Étape 1 : $T = \{x1\}$, $p1=0$, $p2=7$, $p3=1$,
 $p4=p5=p6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x2, x3, x4, x5, x6\}$

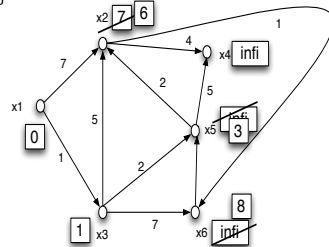
Étape 2: $j=3$, $T = \{x1, x3\}$ et $\Gamma(x3) = \{x2, x5, x6\}$
 $p2 = \min(7, 1+5) = 6$
 $p5 = \min(\text{infi}, 1+2) = 3$
 $p6 = \min(\text{infi}, 1+7) = 8$



Poids $(x6-x5) = 3$

Étape 1 : $T = \{x1\}$, $p1=0$, $p2=7$, $p3=1$,
 $p4=p5=p6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x2, x3, x4, x5, x6\}$

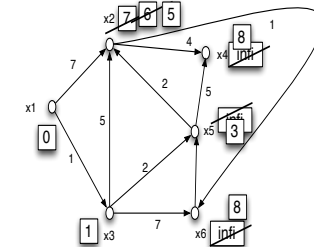
Étape 2: $j=3$, $T = \{x1, x3\}$ et $\Gamma(x3) = \{x2, x5, x6\}$
 $p2 = \min(7, 1+5) = 6$
 $p5 = \min(\text{infi}, 1+2) = 3$
 $p6 = \min(\text{infi}, 1+7) = 8$



Poids $(x6-x5) = 3$

Étape 1 : $T = \{x1\}$, $p1=0$, $p2=7$, $p3=1$,
 $p4=p5=p6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x2, x3, x4, x5, x6\}$

Étape 2: $j=3$, $T = \{x1, x3\}$ et $\Gamma(x3) = \{x2, x5, x6\}$
 $p2 = \min(7, 1+5) = 6$
 $p5 = \min(\text{infi}, 1+2) = 3$
 $p6 = \min(\text{infi}, 1+7) = 8$
 $j=5$, $T = \{x1, x3, x5\}$, $S \setminus T = \{x2, x4, x6\}$
 $\Gamma(x5) \text{ inter } S \setminus T = \{x2, x4\}$
 $p2 = \min(6, 3+2) = 5$
 $p4 = \min(\text{infi}, 2+4) = 6$
 $p6 = 8$



Poids $(x6-x5) = 3$

Étape 1 : $T = \{x_1\}$, $p_1=0$, $p_2=7$, $p_3=1$,
 $p_4=p_5=p_6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

Étape 2: $j=3$, $T = \{x_1, x_3\}$ et $\Gamma(x_3) = \{x_2, x_5, x_6\}$

$$p_2 = \min(7, 1+5) = 6$$

$$p_5 = \min(\infty, 1+2) = 3$$

$$p_6 = \min(\infty, 1+7) = 8$$

$j=5$, $T = \{x_1, x_3, x_5\}$, $S \setminus T = \{x_2, x_4, x_6\}$

$\Gamma(x_5) \text{ inter } S \setminus T = \{x_2, x_4\}$

$$p_2 = \min(6, 3+2) = 5$$

$$p_4 = \min(\infty, 2+4) = 6$$

$$p_6 = 8$$

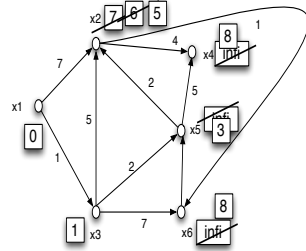
$j=2$ (le poids le plus petit dans $S \setminus T$)

$T = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ et $S \setminus T = \{x_4, x_6\}$

$\Gamma(x_2) \text{ inter } S \setminus T = \{x_4, x_6\}$

$$p_4 = \min(5+4, 8) = 8$$

$$p_6 = \min(5+1, 8) = 6$$



Poids $(x_6 - x_5) = 3$

Étape 1 : $T = \{x_1\}$, $p_1=0$, $p_2=7$, $p_3=1$,
 $p_4=p_5=p_6 = \infty$
 $S \setminus T = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

Étape 2: $j=3$, $T = \{x_1, x_3\}$ et $\Gamma(x_3) = \{x_2, x_5, x_6\}$

$$p_2 = \min(7, 1+5) = 6$$

$$p_5 = \min(\infty, 1+2) = 3$$

$$p_6 = \min(\infty, 1+7) = 8$$

$j=5$, $T = \{x_1, x_3, x_5\}$, $S \setminus T = \{x_2, x_4, x_6\}$

$\Gamma(x_5) \text{ inter } S \setminus T = \{x_2, x_4\}$

$$p_2 = \min(6, 3+2) = 5$$

$$p_4 = \min(\infty, 2+4) = 6$$

$$p_6 = 8$$

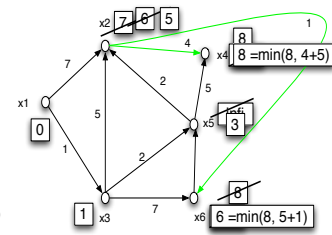
$j=2$ (le poids le plus petit dans $S \setminus T$)

$T = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ et $S \setminus T = \{x_4, x_6\}$

$\Gamma(x_2) \text{ inter } S \setminus T = \{x_4, x_6\}$

$$p_4 = \min(5+4, 8) = 8$$

$$p_6 = \min(5+1, 8) = 6$$



Poids $(x_6 - x_5) = 3$

Étape 2: le plus petit poids dans $S \setminus T$

$$j=6$$

$T = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$ et $S \setminus T = \{x_4\}$

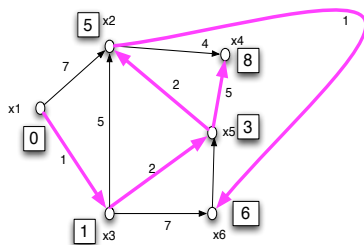
$\Gamma(x_6) \text{ inter } S \setminus T$ est vide on n'ajuste pas

$$j=4$$

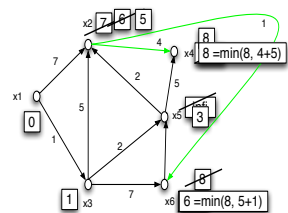
$T = S$ on arrête.

Vecteur des "distances minimales" de x_1 aux différents x_j

$(0, 5, 1, 8, 3, 6)$

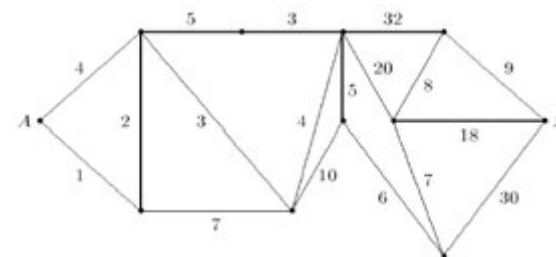


Poids $(x_6 - x_5) = 3$



Exercice

- Plus courte chaîne

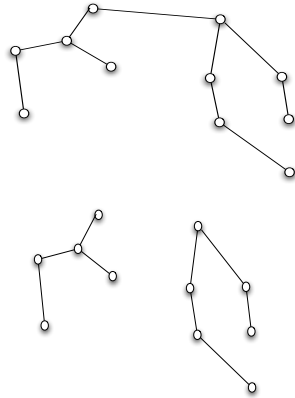


Arbres et arborescences

Définitions

Un arbre est un graphe connexe sans cycle

Un graphe sans cycle (non nécessairement connexe) est dit forêt

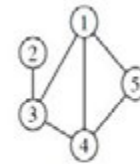


Arbres couvrants

Définition

Un arbre couvrant d'un graphe G est un graphe partiel (ayant les mêmes sommets que G) qui est aussi un arbre.

L'arbre couvrant est aussi dit arbre maximal



Graphe G



Un arbre couvrant

Arbres couvrants de poids minimum

Soit $G=(S,A)$ un graphe pondéré.
On veut déterminer dans G un arbre couvrant de poids total (somme des poids des arêtes) minimum

Algorithme de Kruskal (1956)

Donnée : Un graphe pondéré (chaque arête a un poids $w(a)$)

Résultat : Arbre (ou forêt) couvrant de poids minimum

Mise en œuvre de Kruskal

Soit $G=(S, A)$, avec $\text{card}(S) = n$ et $\text{card}(A)=m$. On trie et on renumérote les arêtes de G de telle façon que :

$$w(a_1) \leq w(a_2) \leq \dots \leq w(a_m)$$

Algorithme de Kruskal (1956)

Poser $T :=$ ens. vide et $I := 0$

Tant que $I < m$ et $\text{card}(T) < n-1$ faire

 Début

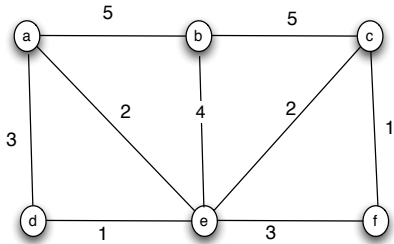
 si a_{i+1} ne forme pas de cycle avec T alors

$T := T \cup \{a_{i+1}\}$

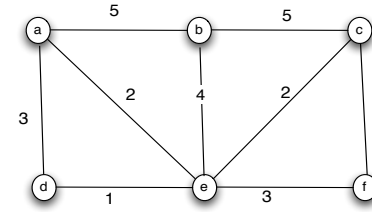
$i := i+1$

 Fin

Exemple - Kruskal



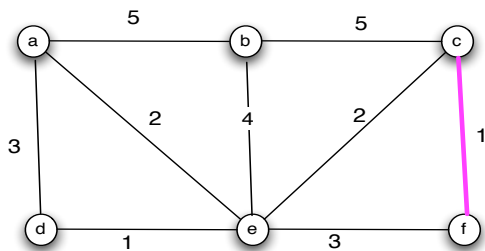
Exemple - Kruskal



On trie les arêtes suivant les poids

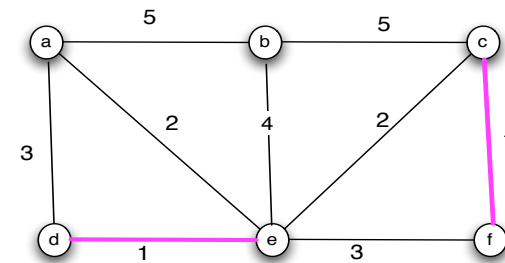
$$w(cf) \leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc)$$

Exemple - Kruskal



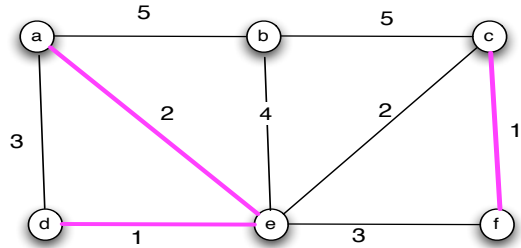
$$w(cf) \leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc)$$

Exemple - Kruskal



$$w(cf) \leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc)$$

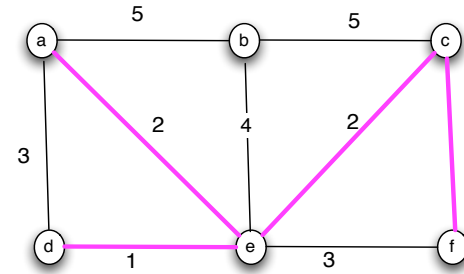
Exemple - Kruskal



$$w(cf) \leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc)$$

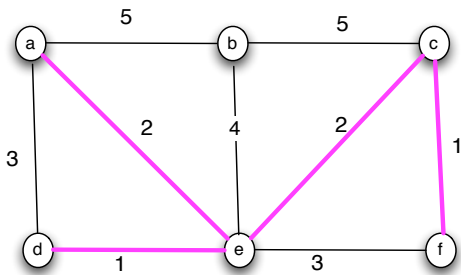
Exemple - Kruskal

$$\begin{aligned} w(cf) &\leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq \\ &\leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc) \end{aligned}$$



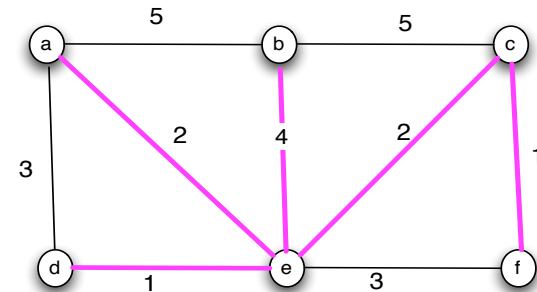
Exemple - Kruskal

$$\begin{aligned} w(cf) &\leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq \\ &\leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc) \end{aligned}$$



L'ajout d'une arête de poids 3 entraînerait la constitution d'un cycle.

Exemple - Kruskal



$$w(cf) \leq w(de) \leq w(ae) \leq w(ce) \leq w(ef) \leq w(ad) \leq w(ab) \leq w(bc)$$

Quelques références

- D. Muller, *Introduction à la théorie des graphes*, Cahier n°6 de la CRM, 2011
- J.-P. Davalan, *Graphes*, Cours BTS Informatique de Gestion, photocopié
- Groupe iREM de Luminy, *Graphes*, version provisoire n°1, juillet 2002

Sur la toile

https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_graphes

<http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes>

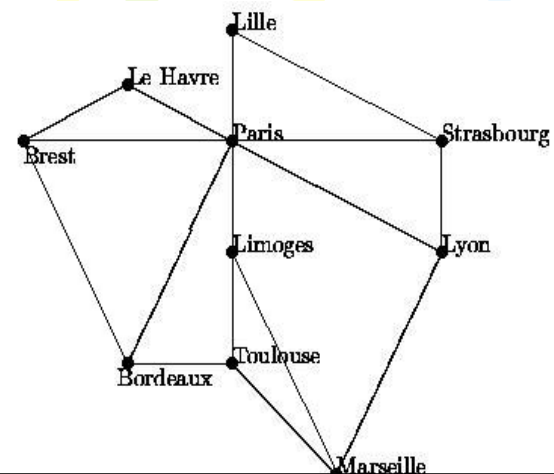
<http://www.graphes.fr>

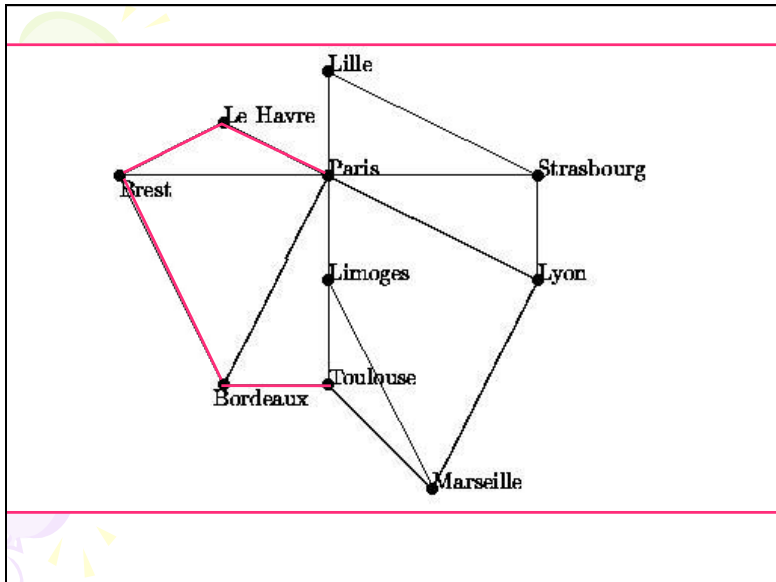
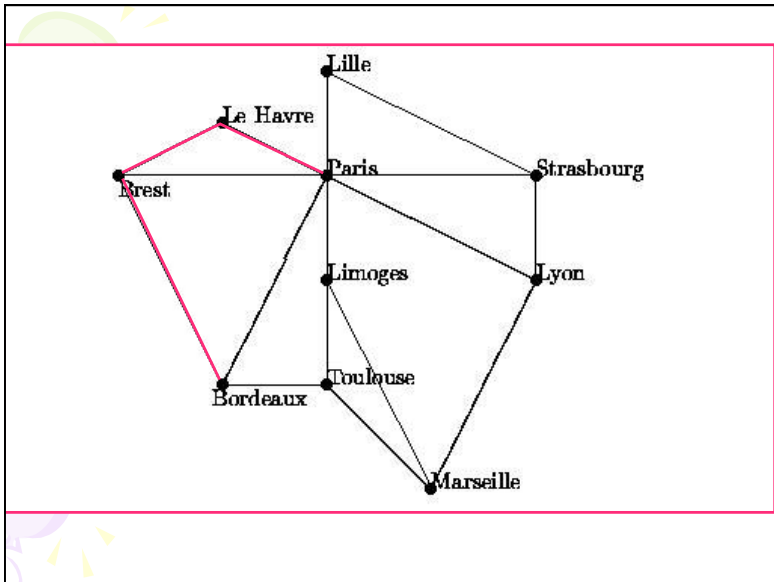
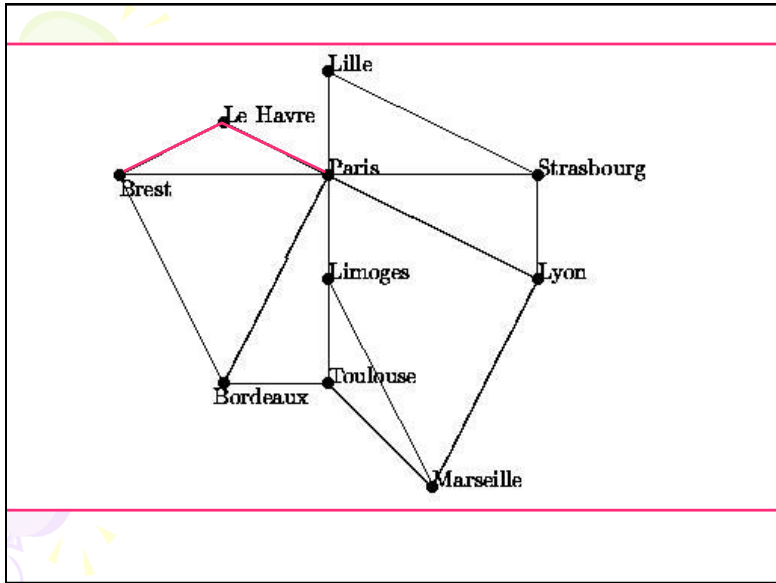
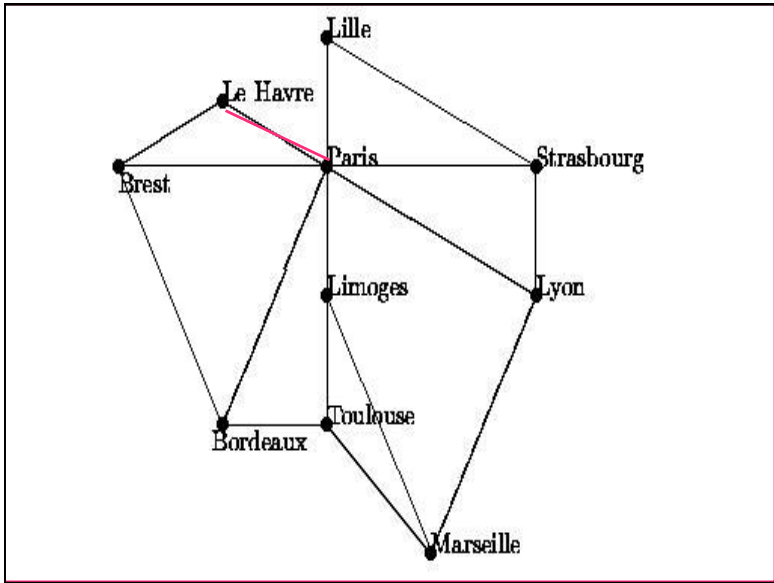
Chemins hamiltoniens

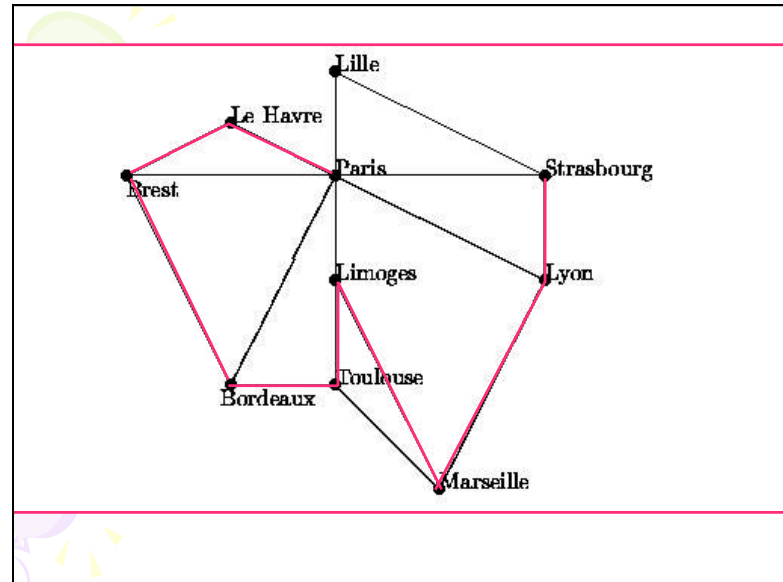
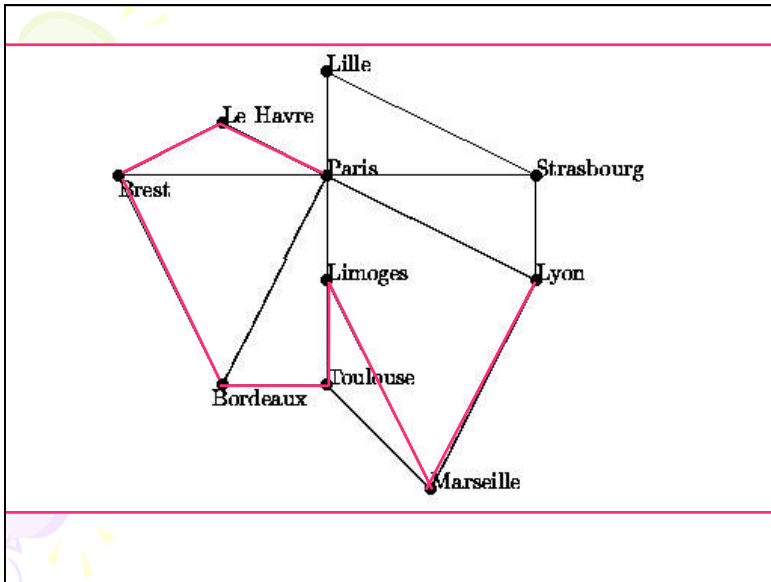
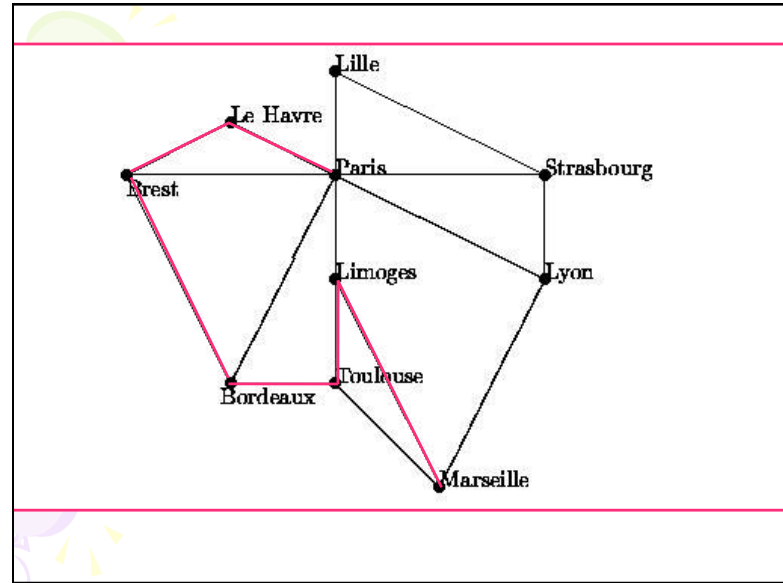
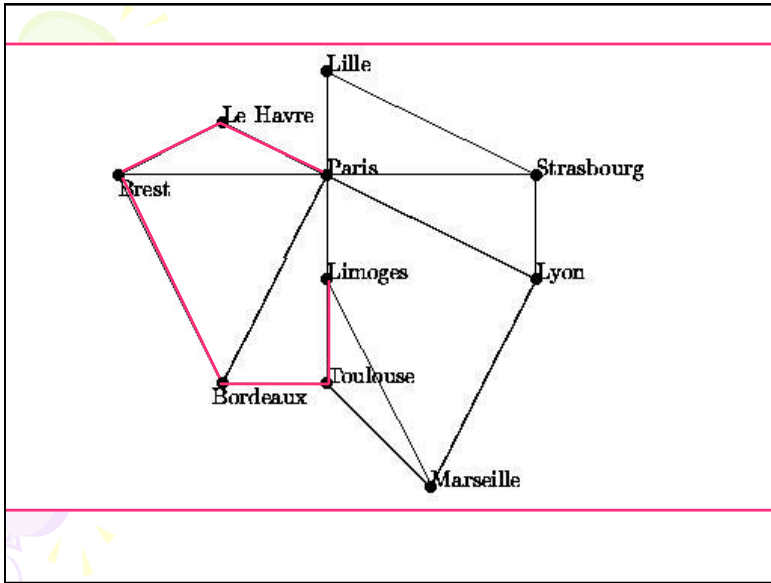
Définitions

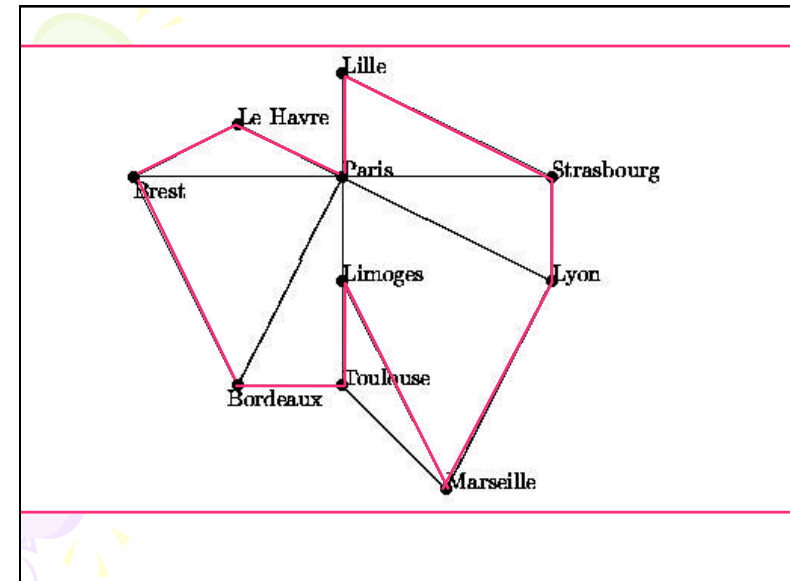
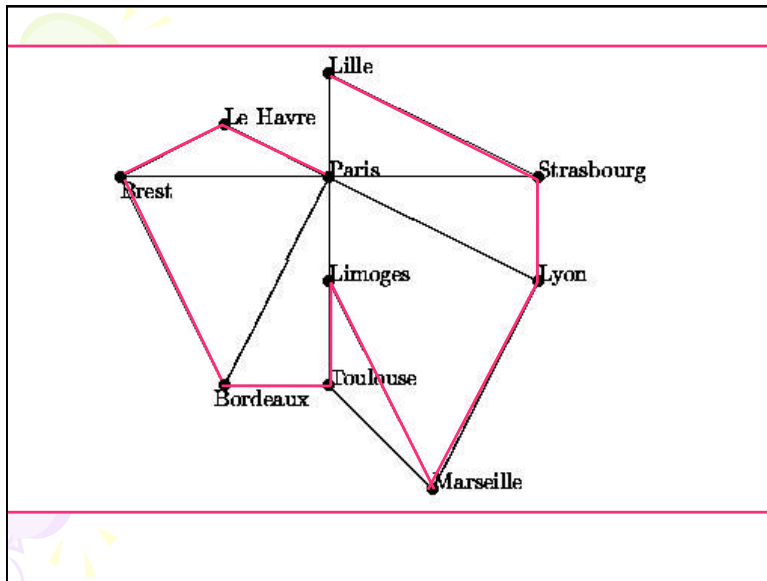
- Un chemin (une chaîne) $\{x_0, \dots, x_n\}$ dans un graphe $G=(S, A)$ est dit (e) **hamiltonien(ne)** si $S=\{x_0, \dots, x_n\}$ et si x_i différent de x_j pour $0 < i < j < n$.
- Un circuit (cycle) est dit **hamiltonien** si c'est un chemin (chaîne) **hamiltonien(ne)** dont les extrémités coïncident.

Exemple









Chemins Hamiltoniens

Théorème de Dirac

Soit $(n \geq 3)$ et soit G est un graphe simple connexe à n sommets. Si le degré de chaque sommet est au moins $n/2$ (i.e., pour tout sommet s , $\text{deg}(s) \geq n/2$) alors G admet un circuit hamiltonien