

# Des fractales en *Crocodile BASIC* (III)

## 1. Introduction

Après avoir vu dans l'article précédent les ensembles de Mandelbrot et de Julia générés par la fonction  $f(z) = z^p + c$ , nous allons maintenant « mélanger » deux ensembles au moyen de la fonction :

$$f(z) = (1 - t) z^p + t z^q + c$$

où  $t$  est un nombre réel compris entre 0 et 1.

Les images illustrant cet article ont été tracées par le programme **mandelmix**.

## 2. Aspects théoriques

### 2.1. Les points critiques

La notion de point critique, déjà rencontrée dans l'article précédent, est fondamentale ici.

Les points critiques sont les solutions de l'équation :

$$f'(z) = (1 - t) p z^{p-1} + t q z^{q-1} = 0$$

Supposons  $1 < p < q$ . On a deux possibilités :

1.  $z = 0$
2.  $z = a^{1/n}$  avec  $a = (p / q) (1 - 1 / t) < 0$  et  $n = q - p > 0$

La deuxième relation définit une famille de points. En effet, nous avons vu dans l'article précédent que la fonction puissance est, dans l'ensemble des nombres complexes, une fonction à valeurs multiples.

Le nombre  $a$  étant un nombre réel négatif, son module est égal à sa valeur absolue et son argument est égal à  $\pi$ , On a donc :

$$a = |a| \exp(i \pi) = |a| \exp[i (\pi + 2k\pi)] = |a| \exp[i (2k + 1) \pi] \quad 0 \leq k < n$$
$$a^{1/n} = |a|^{1/n} \exp[i (2k + 1) \pi / n] = |a|^{1/n} \{ \cos[(2k + 1) \pi / n] + i \sin [(2k + 1) \pi / n] \}$$

Nous avons donc plusieurs points critiques, en plus de zéro. Chacun d'eux peut servir de valeur initiale  $z_0$  pour définir un nouvel ensemble de Mandelbrot.

### 2.2. Itérations, estimateur de distance et *continuous dwell*

Les diverses formules se déduisent facilement de celles que nous avons vues pour le cas  $z^p + c$ . On obtient :

- pour les itérations :

$$z_n = (1 - t) (z_{n-1})^p + t (z_{n-1})^q + c \quad z_0 = (\text{un point critique}) \text{ pour Mandelbrot}$$

$$z_0 = z_{\text{pixel}} \text{ pour Julia}$$

- pour l'estimateur de distance :

$$z'_n = [ (1-t) p (z_{n-1})^{p-1} + t q (z_{n-1})^{q-1} ] z'_{n-1} + 1 \quad z'_0 = 0 \text{ pour Mandelbrot}$$

$$z'_n = [ (1-t) p (z_{n-1})^{p-1} + t q (z_{n-1})^{q-1} ] z'_{n-1} \quad z'_0 = 1 \text{ pour Julia}$$

$$D = ( p |z_n| \ln |z_n| ) / |z'_n|$$

- pour le *continuous dwell* :

$$\text{Dwell} = \text{Iter} + \log_p ( \ln \text{Esc} / \ln |z_n| )$$

### **3. Influence des points critiques**

Nous prendrons comme exemple l'ensemble classique de Mandelbrot ( $p = 2$ ) perturbé par une petite fraction (10 %) d'un ensemble de plus haut degré ( $q > 2$ ).

On a donc :  $p = 2$ ,  $t = 0,1$  et  $a = -18 / q$

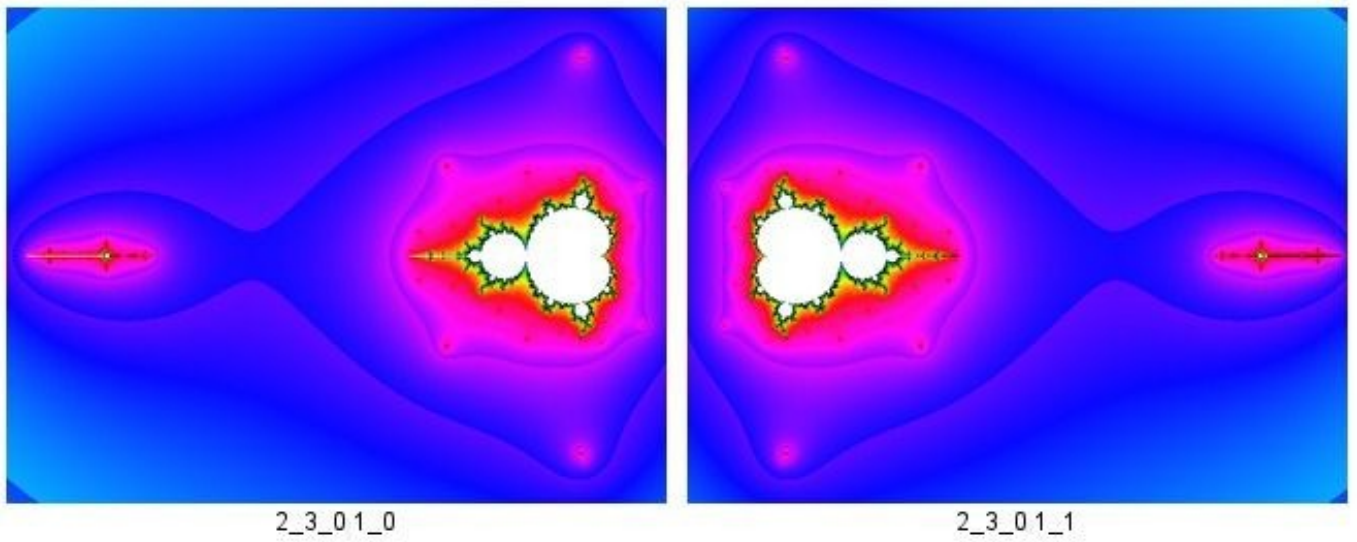
D'où les différents points critiques, en plus de  $z_0 = 0$  :

- pour  $q = 3$  :  $z_1 = -6$
- pour  $q = 4$  :  $z_1 = 3 i / \sqrt{2}$   
 $z_2 = -3 i / \sqrt{2}$
- pour  $q = 5$  :  $z_1 = (18 / 5)^{1/3} (1 + i \sqrt{3}) / 2$   
 $z_2 = - (18 / 5)^{1/3}$   
 $z_3 = (18 / 5)^{1/3} (1 - i \sqrt{3}) / 2$
- pour  $q = 6$  :  $z_1 = 3^{1/4} (1 + i) / \sqrt{2}$   
 $z_2 = 3^{1/4} (-1 + i) / \sqrt{2}$   
 $z_3 = 3^{1/4} (-1 - i) / \sqrt{2}$   
 $z_4 = 3^{1/4} (1 - i) / \sqrt{2}$

Nous présentons ici les images obtenues avec ces différents points critiques. Les noms des images sont générés à partir des valeurs de  $p$ ,  $q$  et  $t$  suivies par l'indice du point critique. Par exemple, l'image **2\_4\_01\_1** correspond à  $p = 2$ ,  $q = 4$ ,  $t = 0,1$  avec le point critique  $z_1$

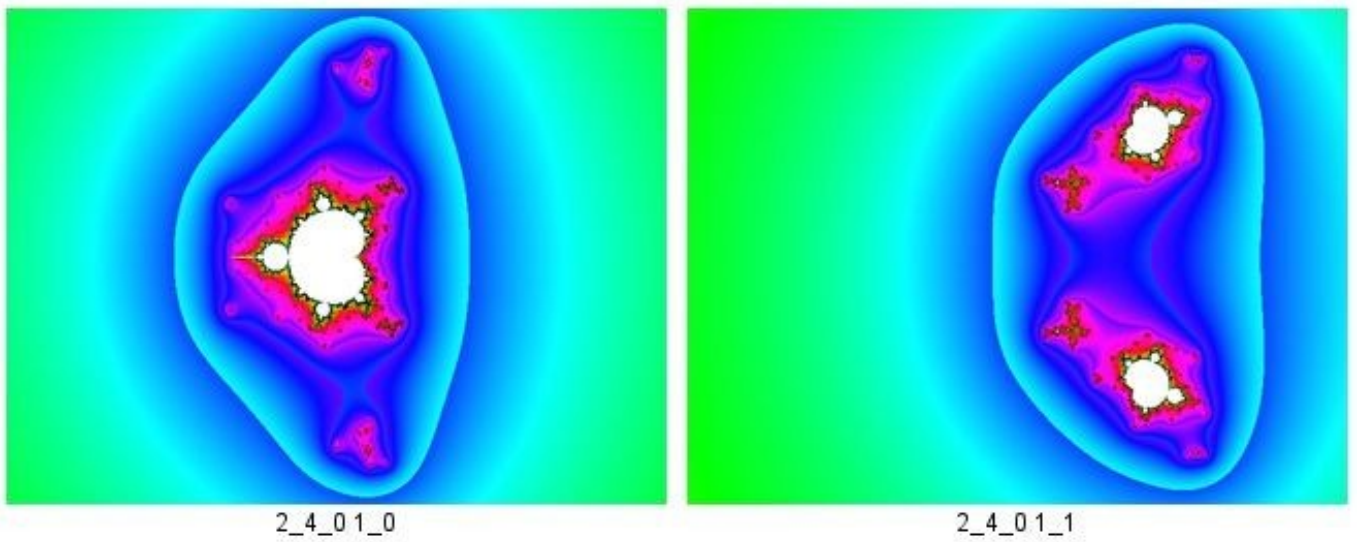
- $q = 3$

Les deux points critiques ( $z_0 = 0$  et  $z_1 = -6$ ) donnent des images qui semblent symétriques, bien que les échelles horizontales diffèrent :



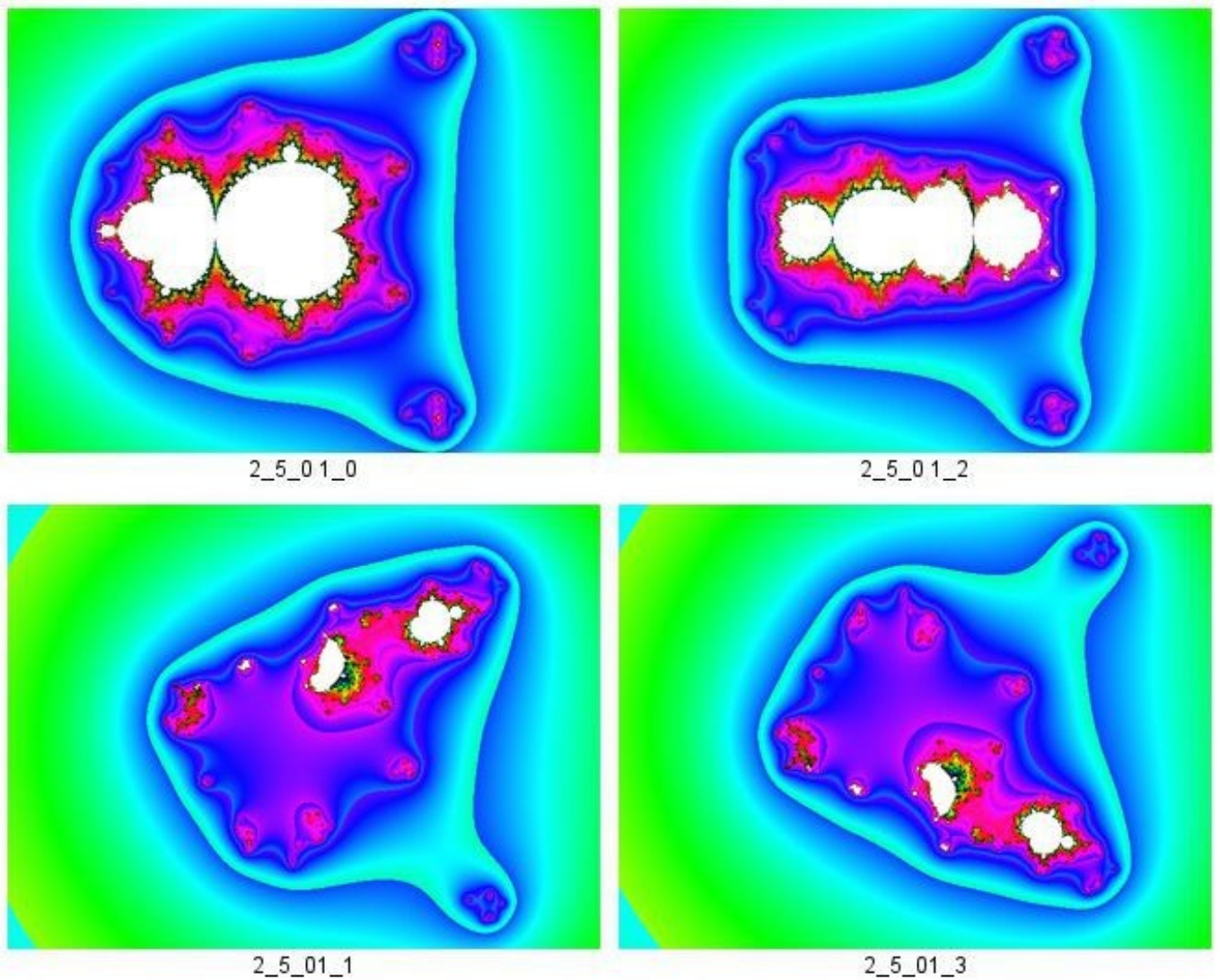
- $q = 4$

Le point critique  $z_0 = 0$  donne une image particulière. Les points  $z_1$  et  $z_2$  ne diffèrent que par leurs signes et donnent donc la même image puisqu'il n'y a que des puissances paires dans la formule.



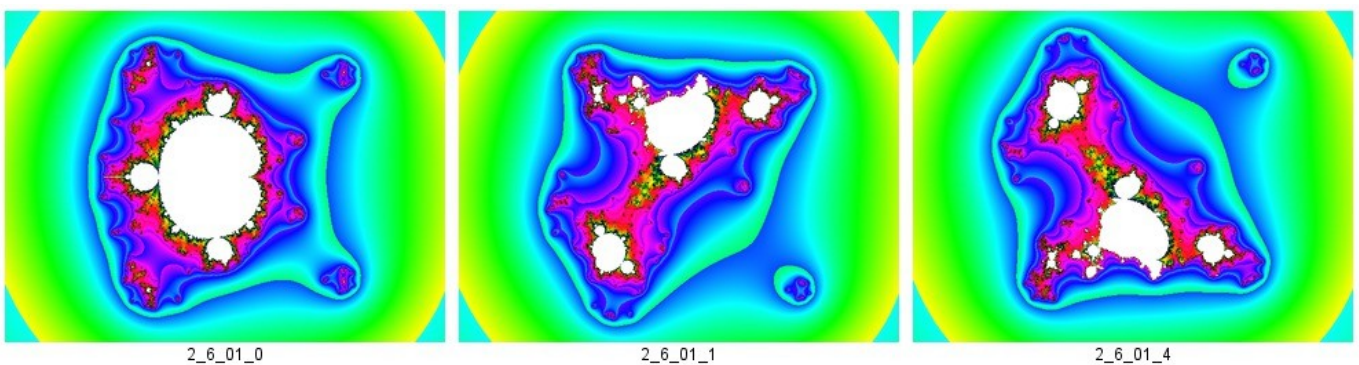
- $q = 5$

Les deux points critiques  $z_0$  et  $z_2$  ont des valeurs réelles et donnent deux figures différentes ; les deux autres points sont conjugués complexes et donnent des figures symétriques par rapport à un axe horizontal



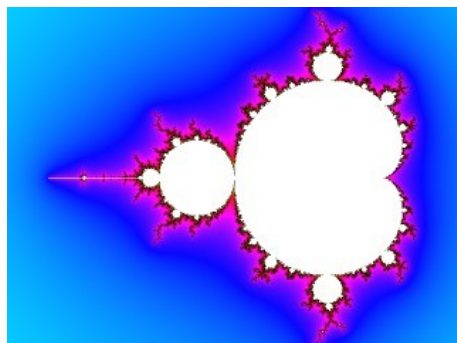
- $q = 6$

Le point critique  $z_0 = 0$  donne une image particulière. Les points  $z_1$  et  $z_4$  sont conjugués complexes et donnent des figures symétriques. Les points  $z_2$  et  $z_3$  sont les opposés des précédents : ils donnent les mêmes images que leurs opposés puisqu'il n'y a que des puissances paires dans la formule.

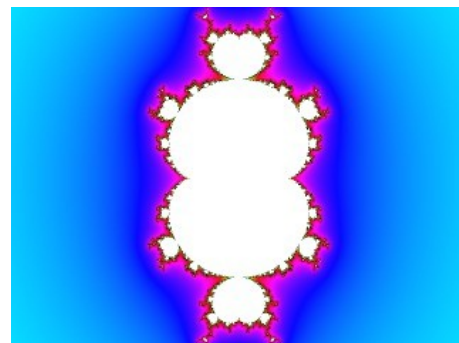


#### 4. Evolution des ensembles

La transformation d'un ensemble d'exposant  $p$  en un ensemble d'exposant  $q$  peut être visualisée en faisant varier le paramètre  $t$  de 0 à 1. Nous prendrons comme exemple la transformation progressive de l'ensemble de Mandelbrot classique ( $p = 2$ ) dans l'ensemble d'exposant 3 ( $q = 3$ ) :



$t = 0$

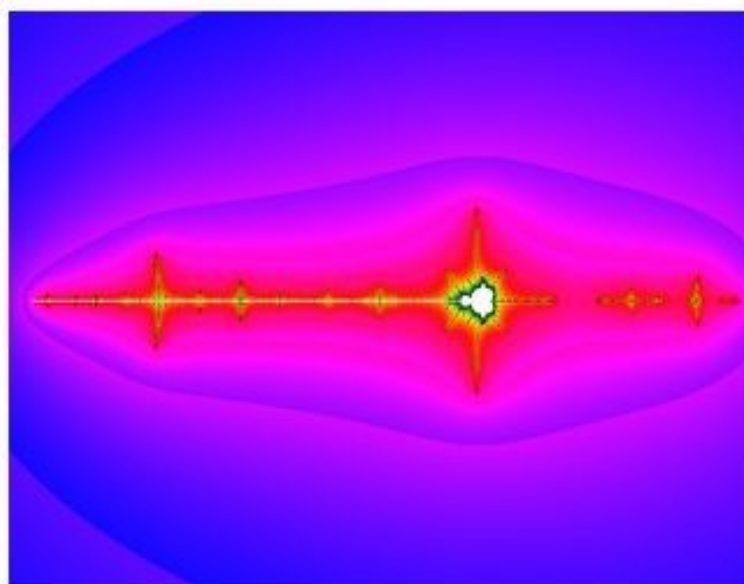


$t = 1$

Cette transformation a été étudiée par Rollo Silver dans le magazine *Amygdala*. Nous reproduisons ici la suite des images publiées (en noir et blanc) dans le magazine.

- $t = 0,1$

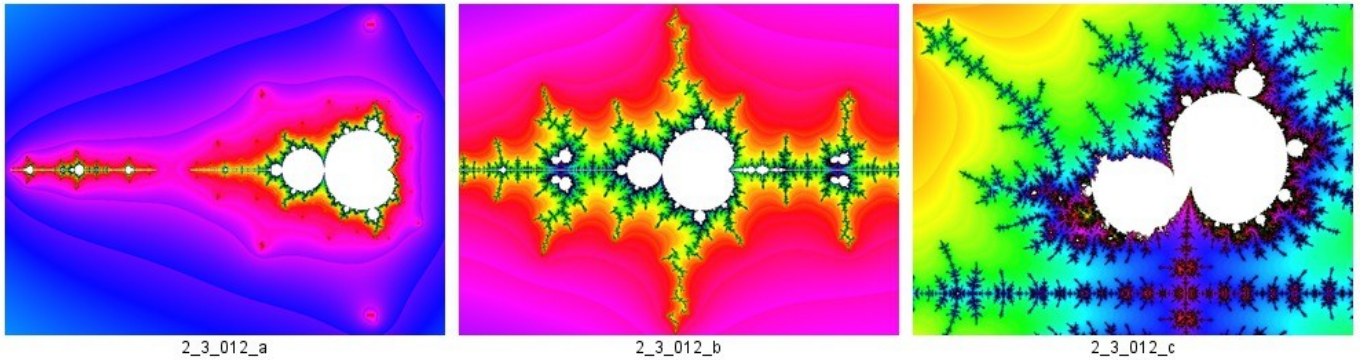
La vue générale de l'ensemble perturbé a été présentée dans la section 3 (image 2\_3\_01\_0). On y voit apparaître des « parasites » tout autour de l'ensemble de Mandelbrot, le principal se situant sur l'axe  $Ox$ , à l'ouest de l'ensemble. En même temps, l'ensemble principal se déforme : la partie circulaire s'agrandit tandis que les deux « bourgeons » principaux de la cardioïde sont repoussés vers l'est. La figure suivante montre un agrandissement du parasite.



2\_3\_010\_b

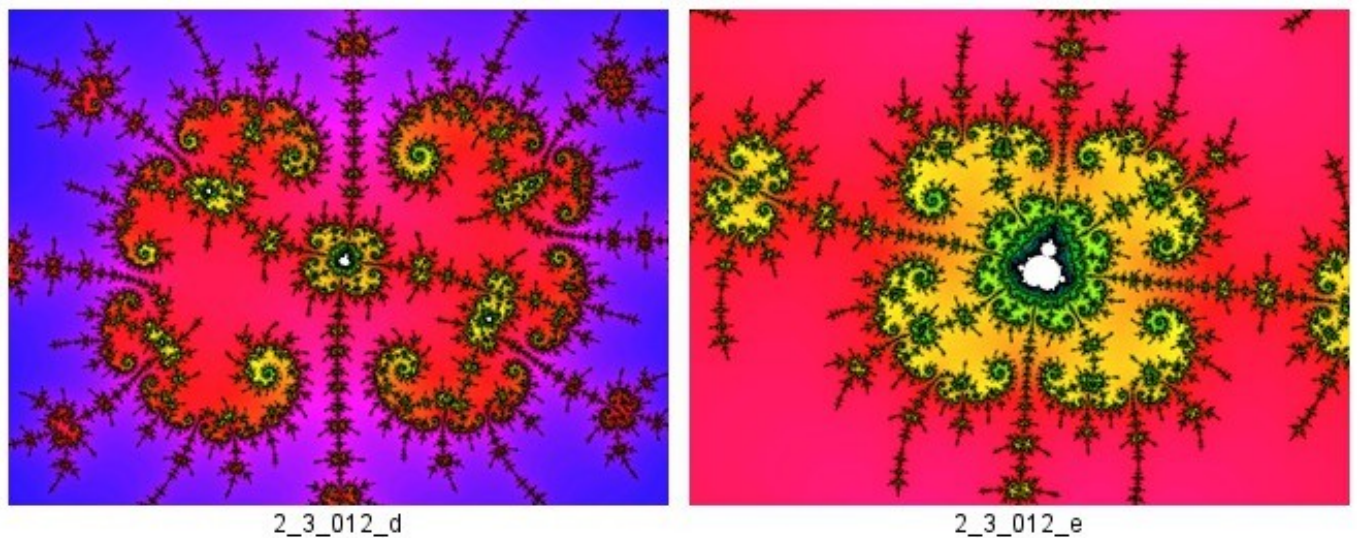
- $t = 0,12$

L'ensemble principal et le parasite se sont rapprochés. Sur les agrandissements, le parasite apparaît constitué de mini-ensembles de Mandelbrot plus ou moins déformés.



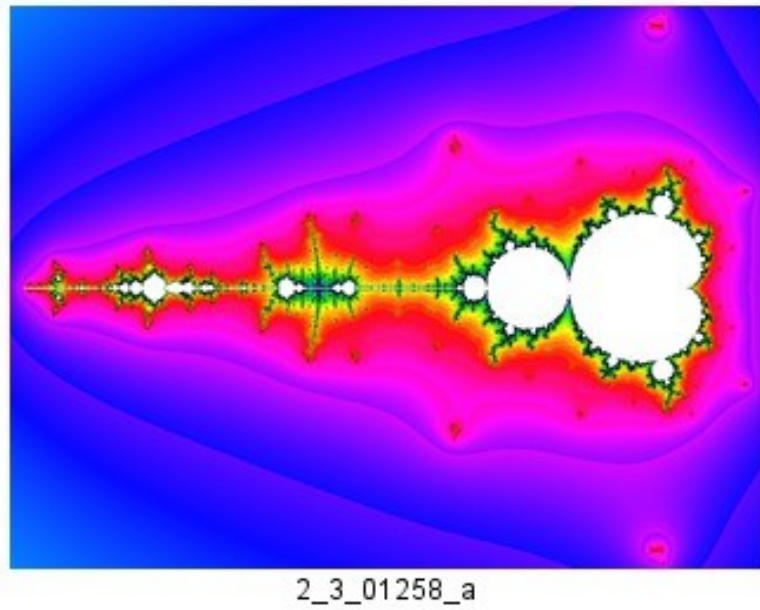
L'aspect peu engageant de la structure représentée sur la fig. 2\_3\_012\_c a conduit Rollo Silver à lui attribuer le titre d'*ugliest fractal* (fractale la plus laide!). Mais il ne faut pas s'y laisser prendre car en agrandissant on trouve des images beaucoup plus esthétiques (voir la section 5, « Exemples »).

La région située entre la structure précédente et l'axe Ox montre des EJS avec des mini-ensembles en leur centre :

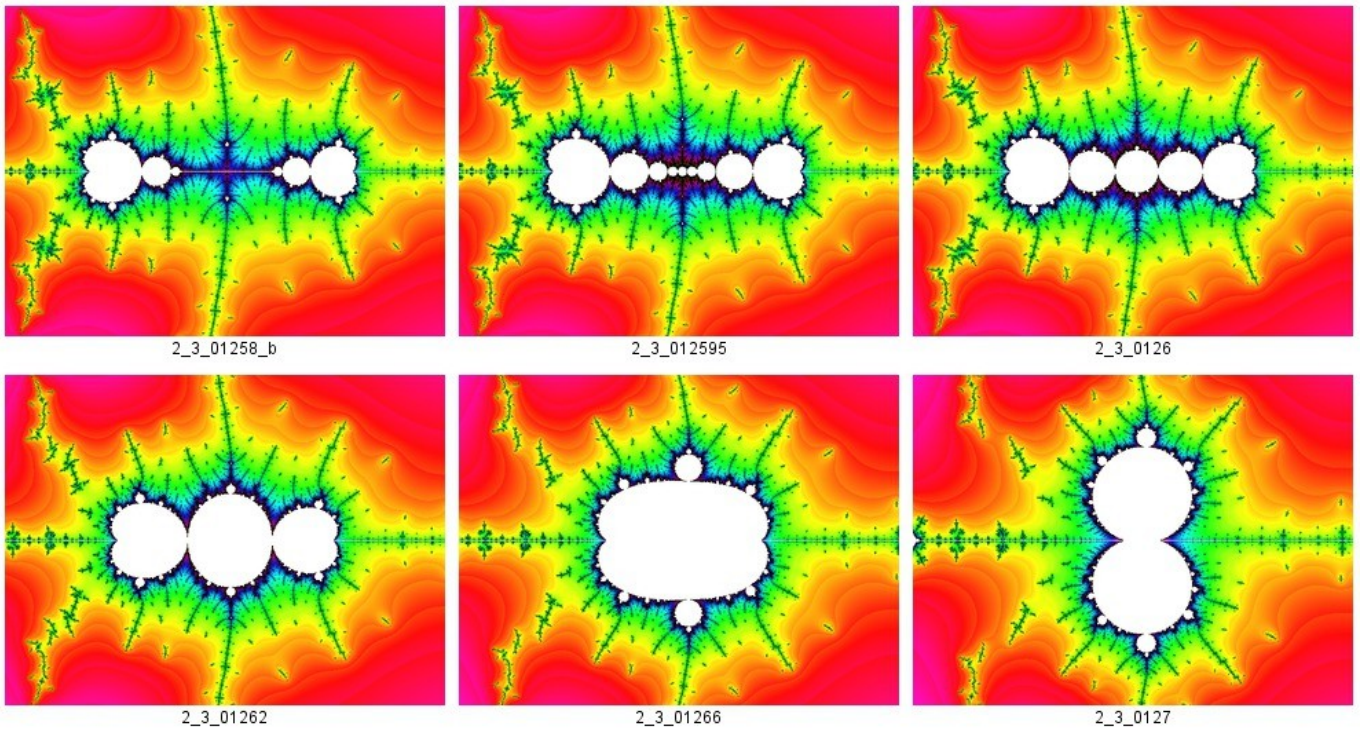


- $t = 0,1258$  à  $0,127$

L'ensemble principal et le parasite se sont encore rapprochés. Leurs extrémités vont bientôt fusionner.

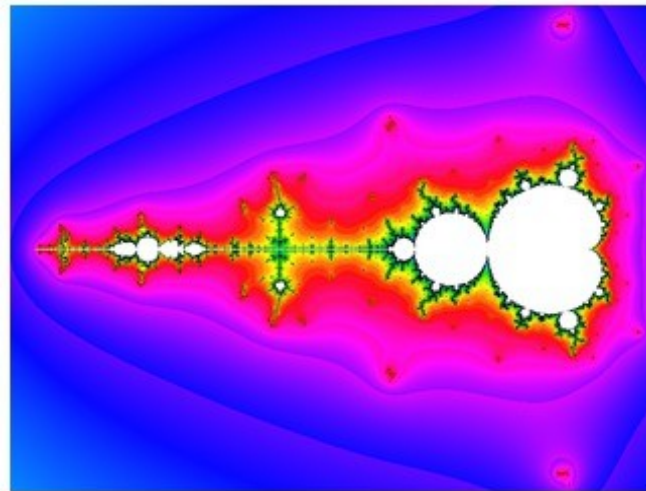


La séquence suivante montre ce qui se passe au niveau de la zone de contact entre l'ensemble principal et le parasite. Les deux mini-ensembles de Mandelbrot qui constituent cette région vont progressivement fusionner pour former une structure constituée de deux disques superposés.



- $t = 0,1285$

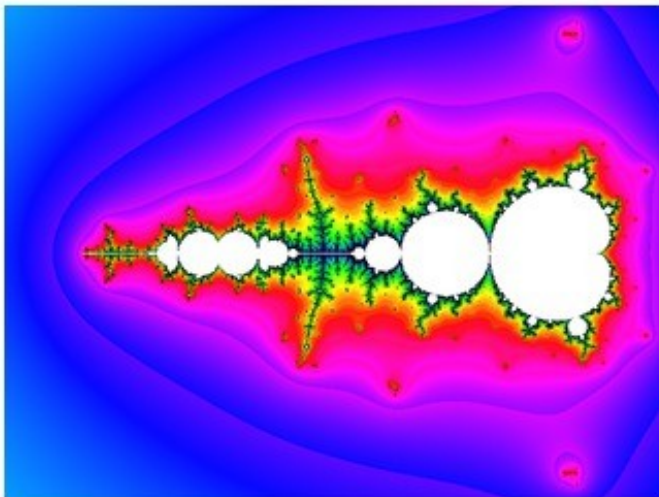
La zone centrale est maintenant constituée de deux mini-ensembles de Mandelbrot situés de part et d'autre de l'axe Ox (comparer à 2\_3\_01258\_a).



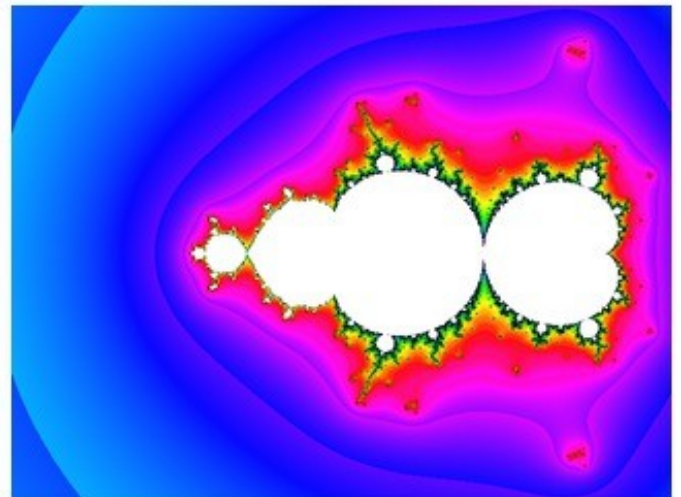
2\_3\_01285

- $t = 0,14$  à  $0,28$

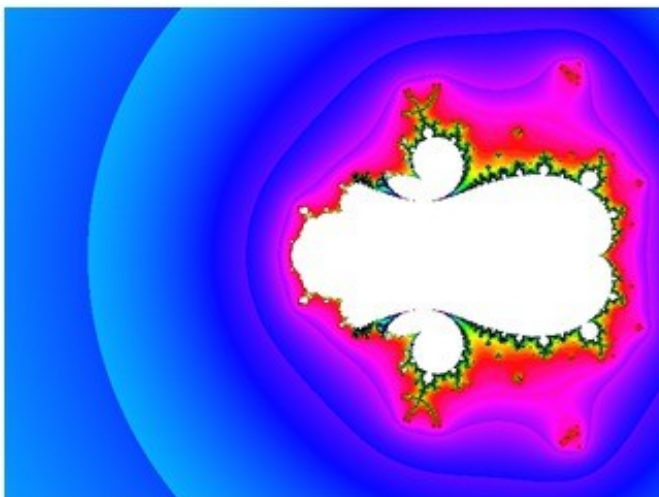
Nous assistons à la formation progressive de la partie centrale de l'ensemble d'exposant 3.



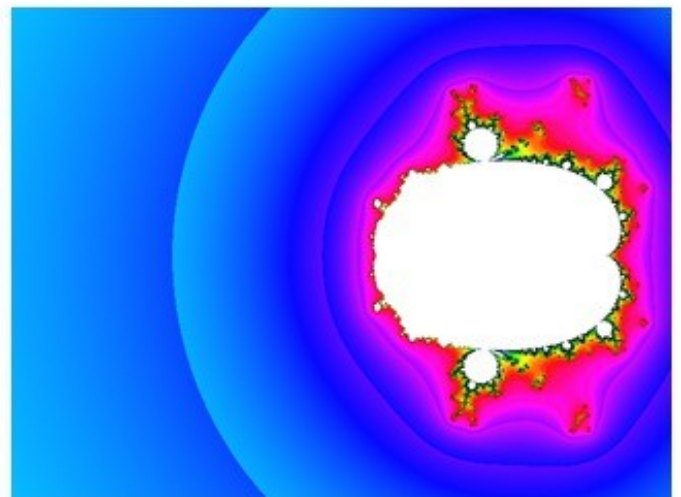
2\_3\_014



2\_3\_017



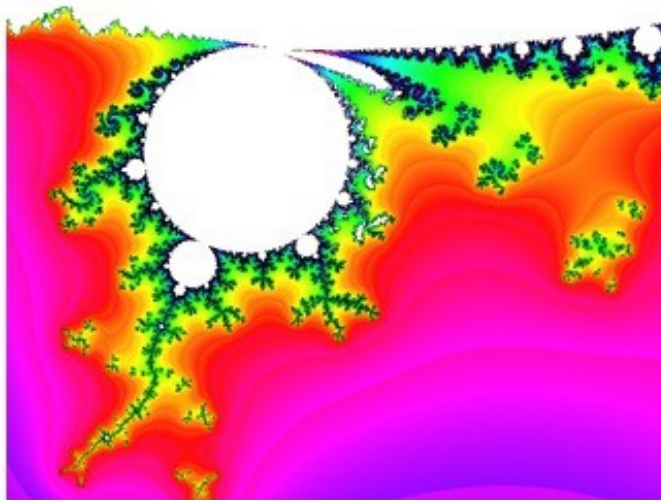
2\_3\_022



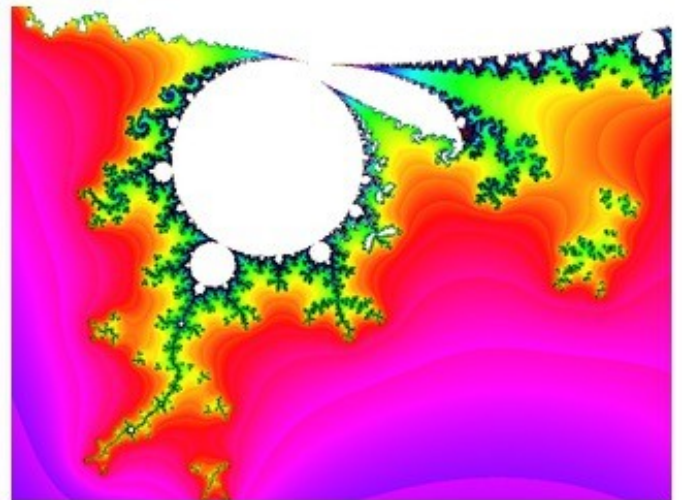
2\_3\_028\_a

- $t = 0,28 \text{ à } 0,40$

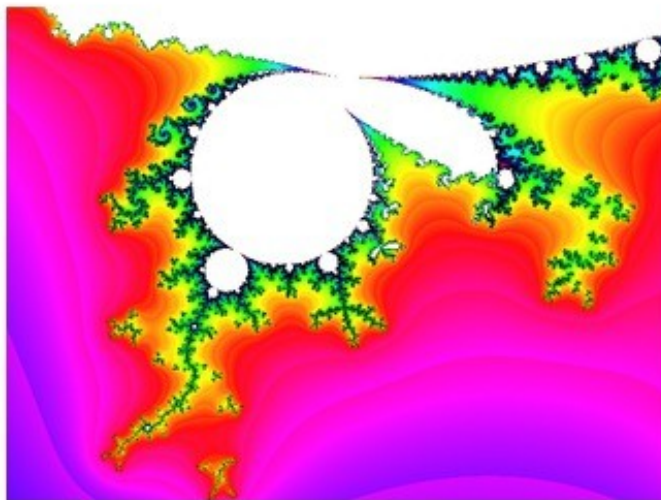
Cette étape correspond à la formation des « bourgeons » en forme de cardioïdes situés en haut et en bas de l'ensemble. Ici la formation du bourgeon inférieur à partir d'une expansion.



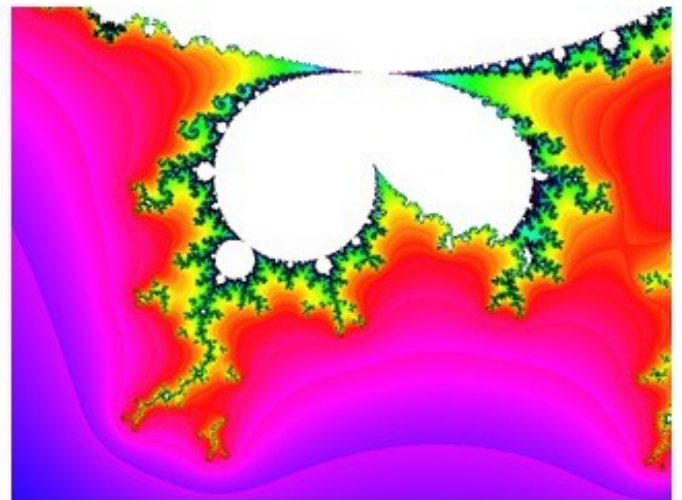
2\_3\_028\_b



2\_3\_030



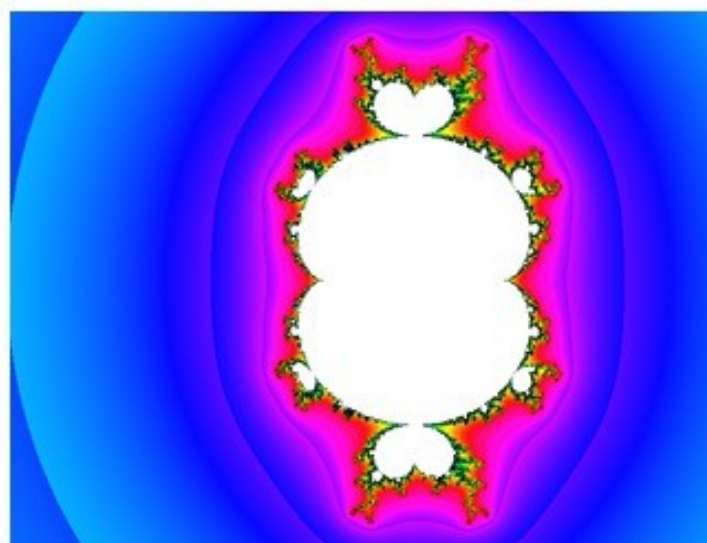
2\_3\_032



2\_3\_040

- $t = 0,50$

L'ensemble est ici pratiquement constitué.



2\_3\_050

## 5. Le programme : mandelmix.bas

Le programme reprend l'organisation décrite dans le précédent article, avec en plus la fonction **CriticalPoint** qui retourne le point critique d'indice donné.

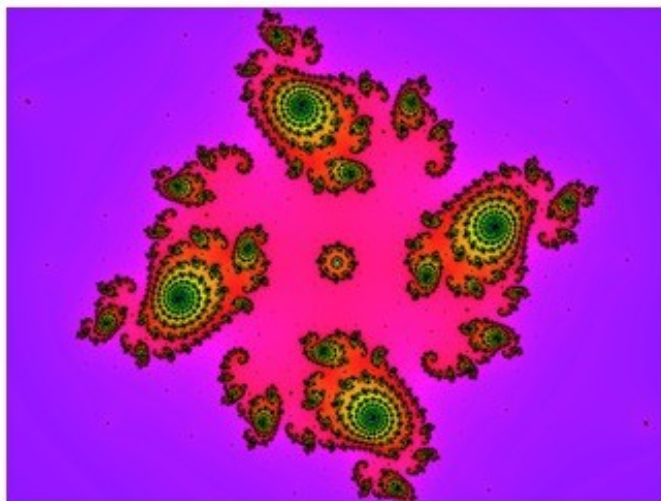
Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension **.mix**

## 6. Exemples

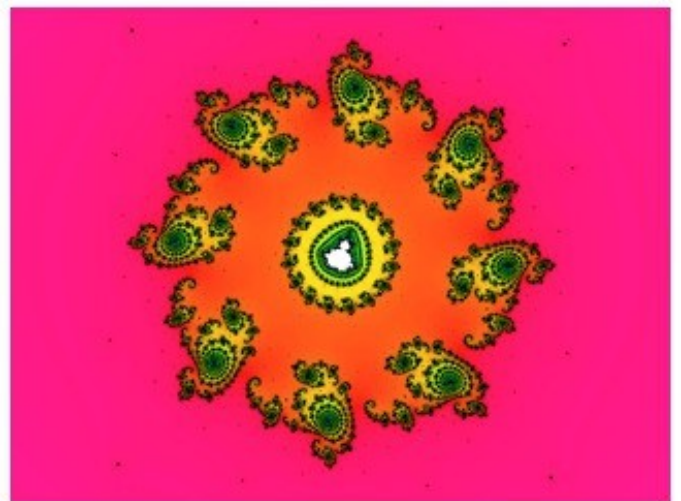
Les figures des sections précédentes, bien qu'utiles pour la démonstration, ne sont pas très esthétiques. Pour montrer que l'on peut y trouver des images plus séduisantes, nous proposons quelques agrandissements tirés de différents ensembles de Mandelbrot. Ici on a toujours  $p = 2$  et le point critique est  $z_0 = 0$ .

- $q = 3 ; t = 0,1$

Un EJS dans la vallée des hippocampes de l'ensemble perturbé, avec un agrandissement du mini-ensemble de Mandelbrot situé en son centre.



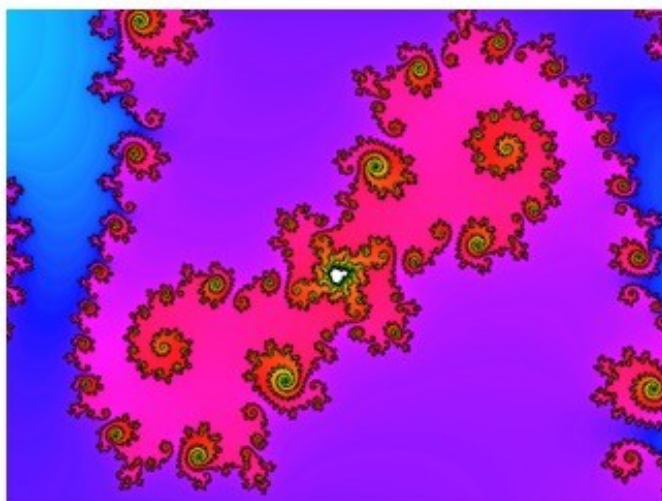
2\_3\_01\_0\_a



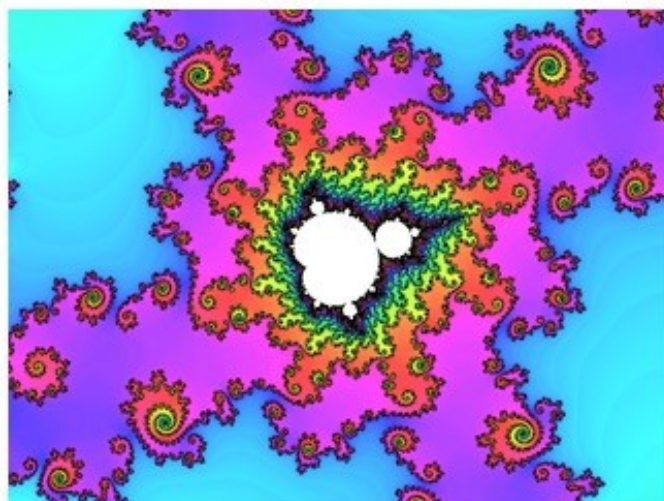
2\_3\_01\_0\_b

- $q = 3 ; t = 0,22$

Un EJS situé dans la vallée « ouest » entre la partie principale et le bourgeon supérieur (voir figure 2\_3\_022).



2\_3\_022\_0\_a



2\_3\_022\_0\_b

- $q = 3$  ;  $t = 0,28$

Une double spirale située près de l'expansion de la figure 2\_3\_028\_b, avec une série d'agrandissements.



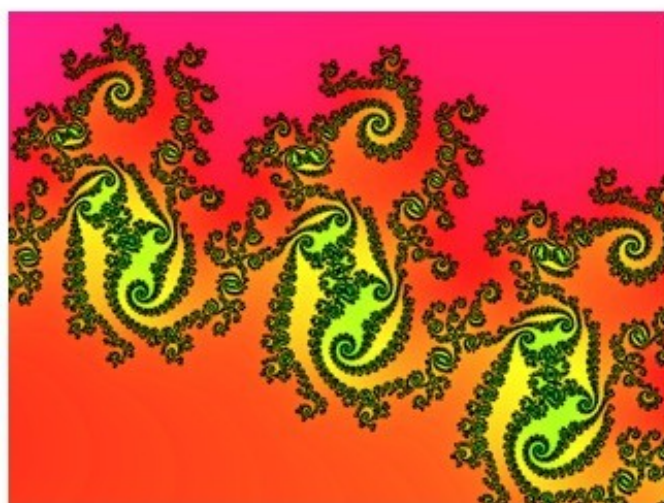
2\_3\_028\_0\_a



2\_3\_028\_0\_b

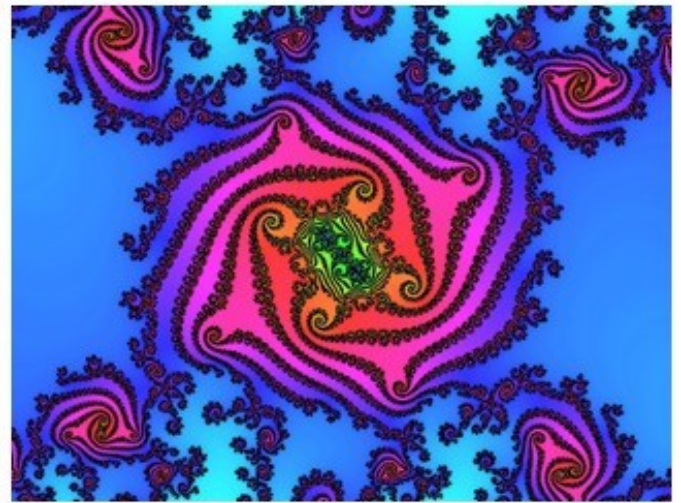
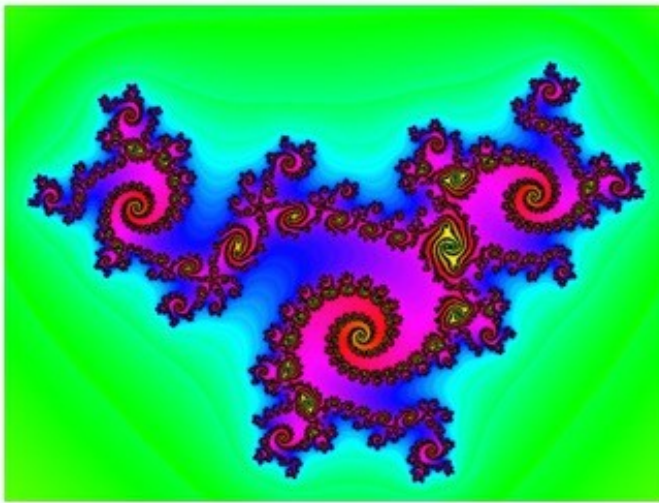


2\_3\_028\_0\_c



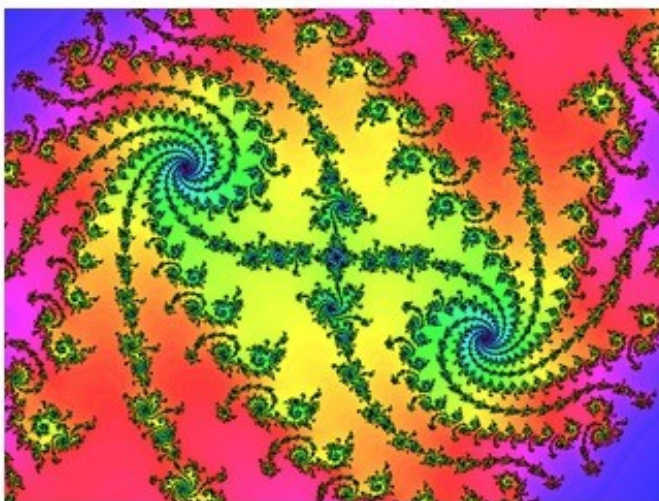
2\_3\_028\_0\_d

Ici un ensemble de Julia tiré de la même région. Il est formé de 3 « branches », comme les ensembles de Julia d'exposant 3, mais sans la symétrie (*cf* l'article précédent). La deuxième image montre un agrandissement de la partie qui connecte les 3 branches.

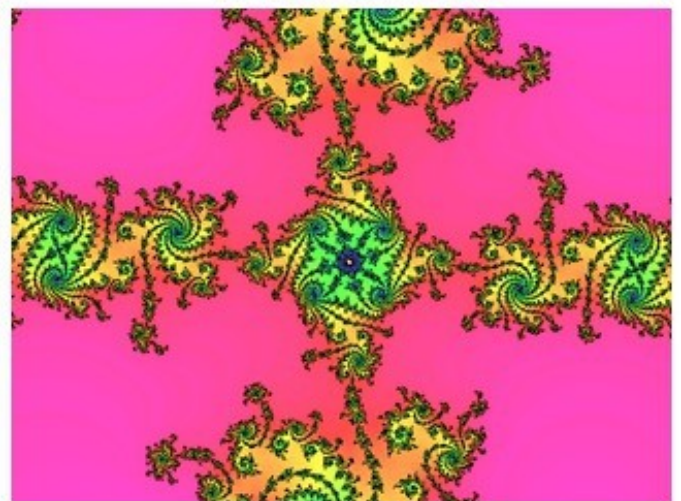


- $q = 4 ; t = 0,2$

Jonction de deux doubles spirales, et trois agrandissements successifs de la partie centrale.



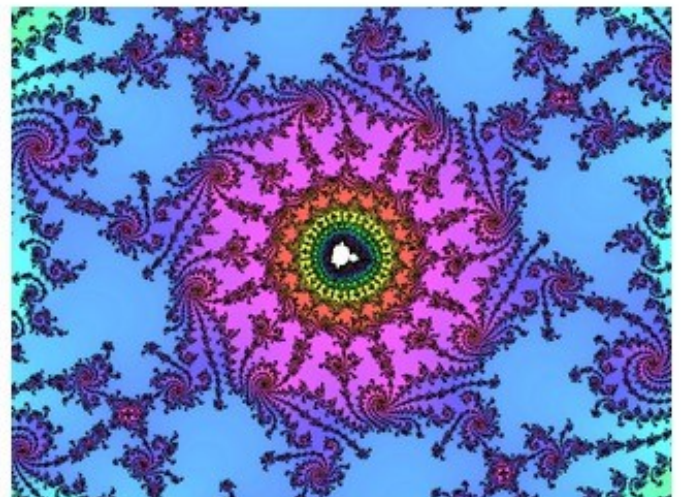
2\_4\_02\_0\_a



2\_4\_02\_0\_b



2\_4\_02\_0\_c



2\_4\_02\_0\_d

## **7. Conclusion**

Dans ce troisième article nous avons vu comment combiner deux ensembles de Mandelbrot, ainsi qu'une application de la notion de point critique. Dans le prochain article nous étudierons plus en détail les méthodes de coloration de ces images.

## **8. Référence**

R. Silver, *The Primal Heterotope*, Amygdala n° 33-34, Octobre 1994. Une collection de scans contenant celui de l'article cité est disponible [ici](#)