Des fractales en *Crocodile BASIC* (II)

1. Introduction

Après avoir vu dans l'article précédent les ensembles de Mandelbrot et de Julia générés par la fonction classique $f(z) = z^2 + c$, nous allons maintenant faire varier l'exposant pour obtenir des fonctions de la forme $f(z) = z^p + c$. Les images illustrant cet article ont été tracées par le programme **`mandelmult`**.

2. Aspects théoriques et graphiques

2.1. Calcul de la fonction puissance

Si p est entier, z^p se calcule par multiplications successives, comme pour les réels.

Dans le cas contraire, on écrit le nombre complexe z sous forme exponentielle :

$$z = x + iy = R\,(\cos\theta + i \sin\theta) = R \exp(i\,\theta)$$

où : i désigne le nombre complexe (0,1)

R et θ désignent le module et l'argument de z, soit $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ et $\theta = \mathrm{atan2}(y / x)$.

Remarquons que θ est défini à 2kπ près, donc $z = R \exp[i\,(\theta + 2k\pi)]$

On en déduit : $z^p = R^p \exp[i\,p(\theta + 2k\pi)] = R^p\,[\,\cos p(\theta + 2k\pi) + i \sin p(\theta + 2k\pi)\,]$

Si p n'est pas entier, z^p pourra prendre plusieurs valeurs. En pratique, on fixe k = 0, ce qui permet de n'avoir qu'une seule valeur de z^p. Mais ce choix d'une valeur unique va se traduire par des discontinuités sur le graphique.

2.2. Itérations, estimateur de distance et *continuous dwell*

Les diverses formules se déduisent facilement de celles que nous avons vues pour le cas $z^2 + c$. On obtient :

- pour les itérations :

  $z_n = (z_{n-1})^p + c$ avec $z_0 = 0$ pour Mandelbrot et $z_0 = z_{pixel}$ pour Julia

- pour l'estimateur de distance :

  $z'_n = p\,(z_{n-1})^{p-1}\,z'_{n-1} + 1$ avec $z'_0 = 0$ pour Mandelbrot

  $z'_n = p\,(z_{n-1})^{p-1}\,z'_{n-1}$ avec $z'_0 = 1$ pour Julia

  puis : $D = (\,p\,|z_n|\,\ln|z_n|\,) / |z'_n|$

- pour le *continuous dwell* :

  $\mathrm{Dwell} = \mathrm{Iter} + \log_p(\,\ln \mathrm{Esc} / \ln|z_n|\,)$

où la fonction $\log_p$ est le logarithme de base p, tel que $\log_p z = \ln z / \ln p$.

2.3. Choix de la valeur initiale

Il reste à justifier le choix de $z_0 = 0$ pour l'ensemble de Mandelbrot. On montre en effet que z_0 doit être un « point critique », c'est-à-dire une valeur qui annule la dérivée f'(z). Notez bien qu'il s'agit là de la dérivée par rapport à z et non pas de la dérivée par rapport à c comme dans l'estimateur de distance.

Or dans le cas présent on a :

$$f'(z) = p\, z^{p-1} \quad \text{donc si } p > 1,\ f'(z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

Cela définit les conditions requises pour avoir un tracé correct.

2.4. Symétrie par rapport à l'axe Ox

Les règles que nous avons vues dans l'article précédent pour la formule $z^2 + c$ sont encore valables pour la formule $z^p + c$:

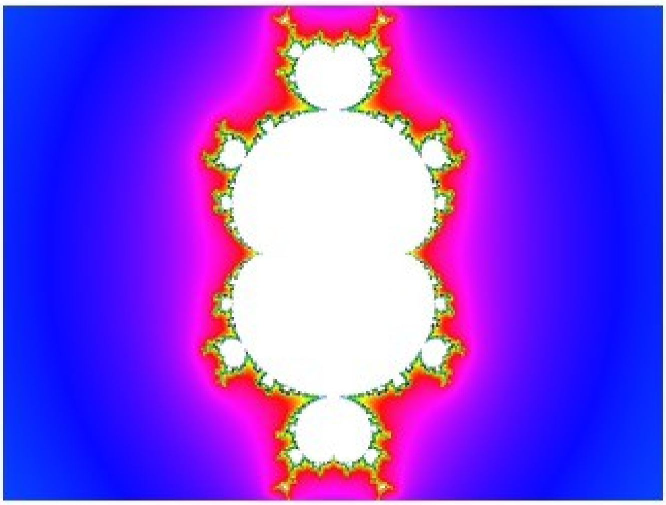
- les ensembles de Mandelbrot sont symétriques par rapport à l'axe Ox
- les ensembles de Julia sont symétriques si le nombre c est réel

3. Variation de l'exposant

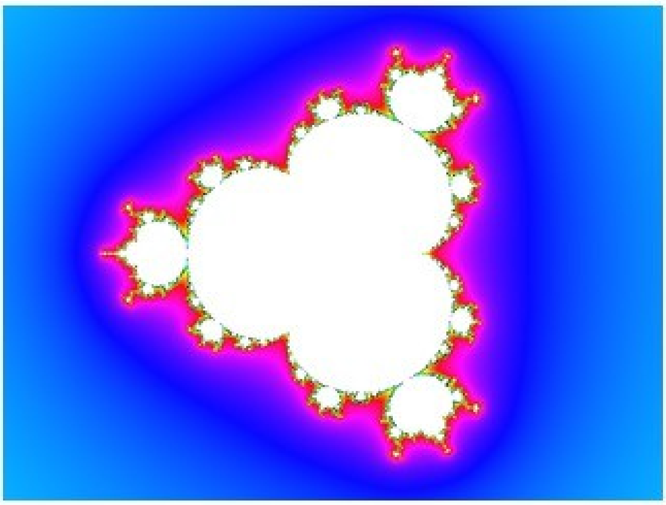
3.1. Cas d'un exposant entier

Pour les valeurs entières de p (> 2) l'ensemble de Mandelbrot est centré en (0,0) et comporte (p - 1) lobes symétriques. Quand p est impair, l'un de ces lobes est situé sur l'axe des x négatifs. Ce lobe est absent quand p est pair.

Exemples :



mandel_3

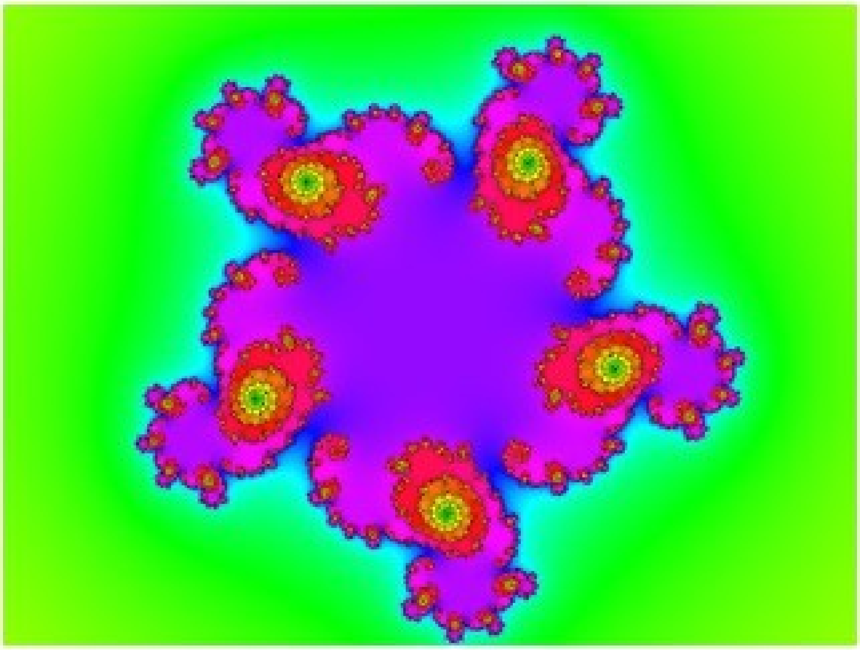


mandel_4

- **mandel_3** (p = 3) : 2 lobes (symétrie d'ordre 2). Pas de lobe sur Ox.
- **mandel_4** (p = 4) : 3 lobes (symétrie d'ordre 3). Un lobe sur Ox.

Les ensembles de Julia correspondants ont une symétrie d'ordre p.

Exemple avec p = 5 et c = (-0,5 ; 0,64) :

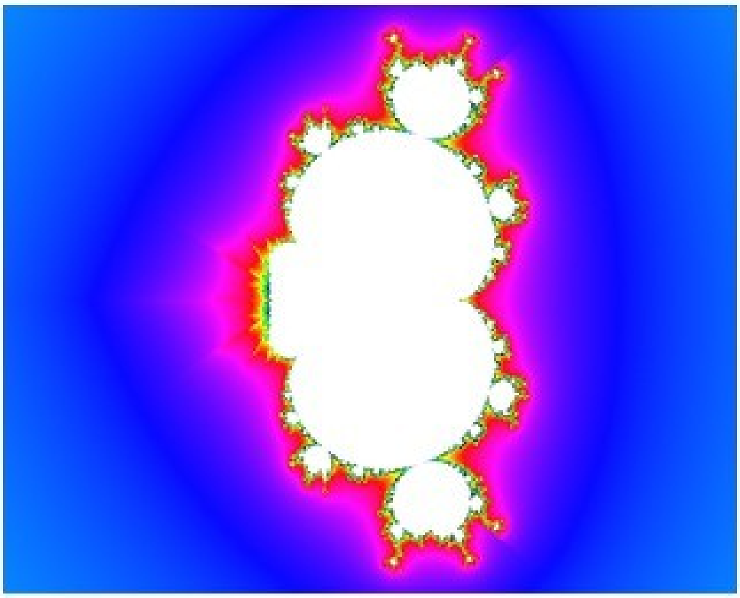


julia_5

3.2. Cas d'un exposant non entier

Les figures présentent des discontinuités. En effet, comme nous l'avons vu dans la partie théorique, z^p peut prendre plusieurs valeurs. Les discontinuités s'expliquent par la nécessité de choisir une valeur unique en chaque point de l'image.

Exemple avec p = 3,5 :

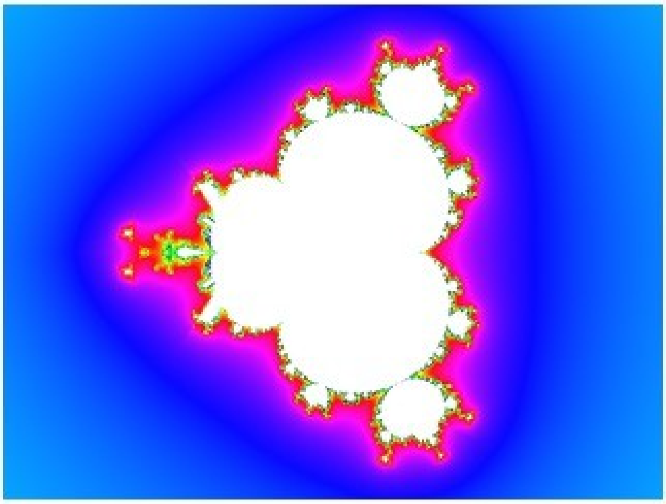


mandel_3_5

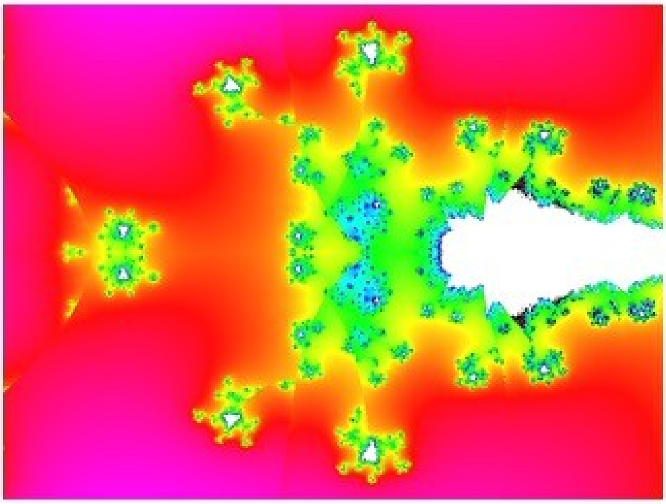
3.3. Transition d'un exposant impair vers un exposant pair

Il est intéressant d'étudier la transition d'un entier impair p vers un entier pair p+1, en passant par les valeurs intermédiaires. Cela se traduit par la formation progressive du lobe situé sur l'axe des x. Ce lobe se forme par fusion de multiples « bourgeons » qui se développent progressivement en s'entourant de motifs complexes.

Exemple avec p = 3,85 :



mandel_3_85



mandel_3_85_a

- **mandel_3_85** : Une étape de la formation du lobe situé sur l'axe des x, à partir de plusieurs fragments.
- **mandel_3_85_a :** Agrandissement (× 10) de l'image précédente, montrant quelques fragments et les motifs qui les entourent.

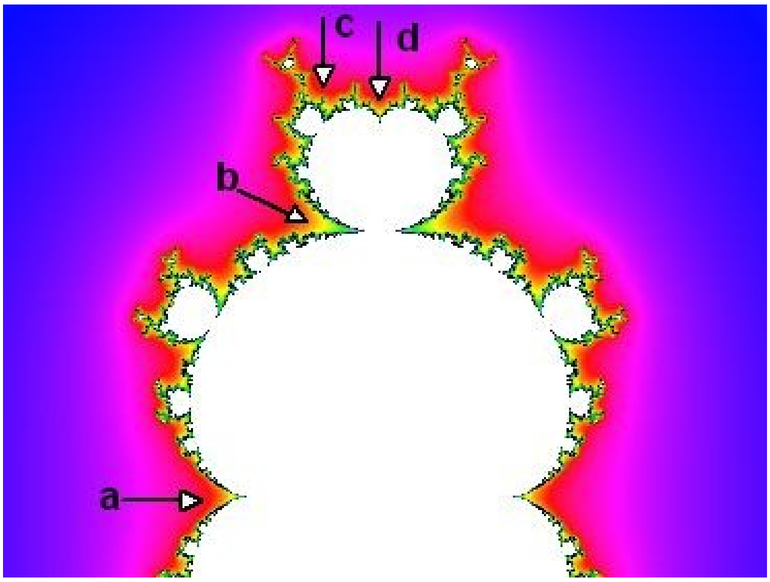
4. Le programme : `mandelmult.bas`

Le programme reprend l'organisation des précédents (article n° 1) sauf qu'ici les ensembles de Mandelbrot et Julia sont calculés dans le même programme, d'où la variable booléenne **`Julia`** qui prend la valeur **`TRUE`** lorsque l'un au moins des paramètres **`cx`** ou **`cy`** est non nul.

Lors de la sauvegarde les paramètres de l'image sont écrits dans un fichier CSV d'extension **`.mult`**

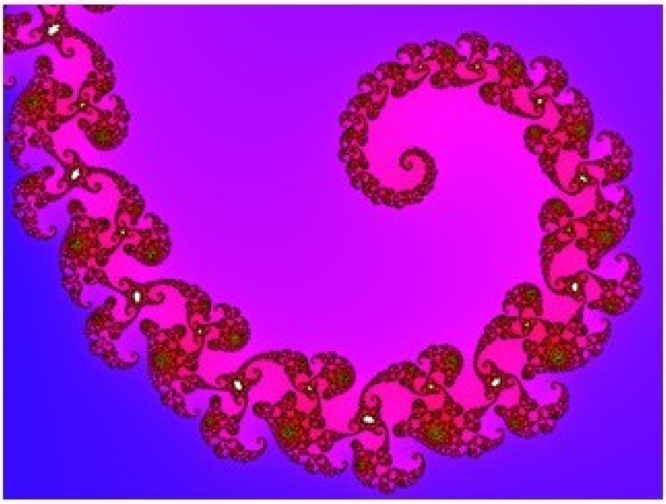
5. Exemples

Nous prendrons comme exemple l'ensemble correspondant à p = 3, dont nous explorerons les différentes « vallées » notées **a, b, c, d** sur la figure ci-dessous :

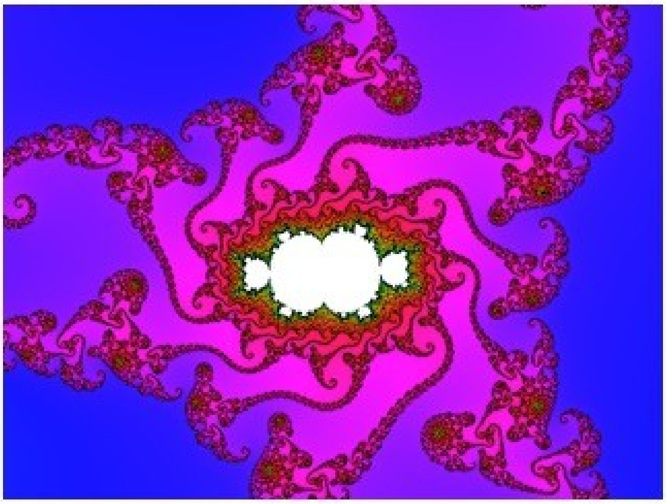


5.1. Vallée « a »

Cette région correspond à la « vallée des éléphants » de l'ensemble classique (p = 2). Les images suivantes montrent une spirale et un mini-ensemble de Mandelbrot.



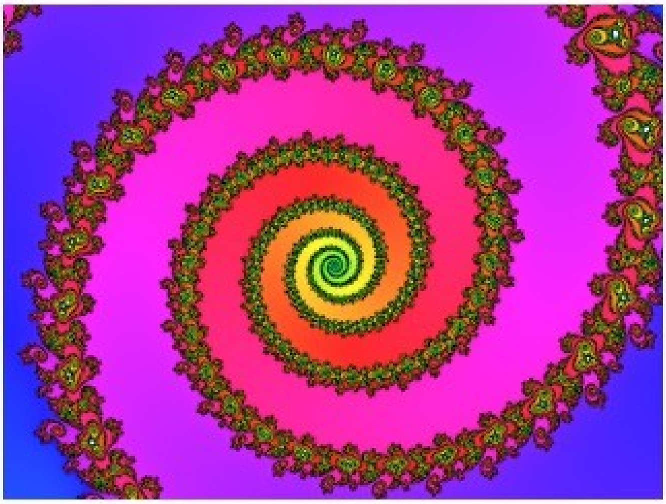
mandel_3_a1

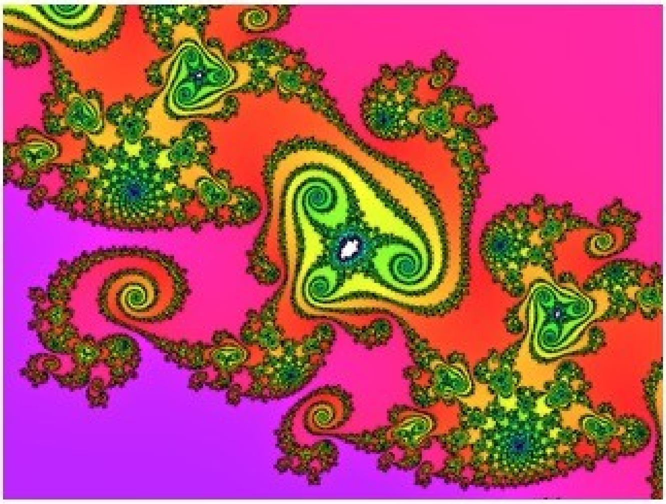


mandel_3_a2

5.2. Vallée « b »

Cette région correspond à la « vallée des hippocampes » de l'ensemble classique. Ici, une double spirale avec de nombreux mini-ensembles.

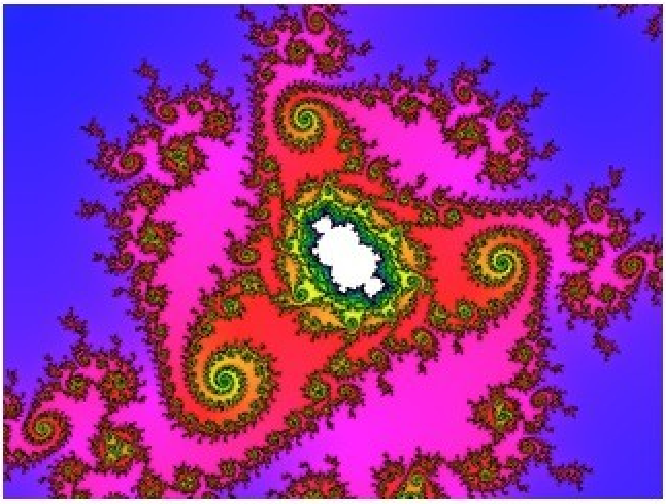

mandel_3_b1


mandel_3_b2

5.3. Vallée « c »

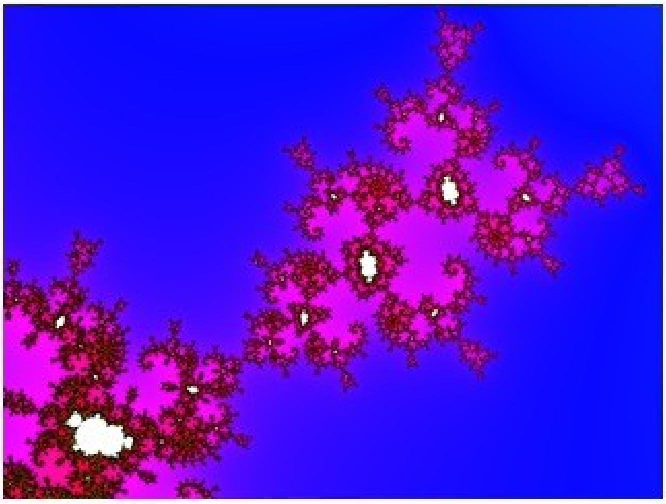
Cette région correspond à la « vallée des sceptres » de l'ensemble classique. Tous les éléments montrent des « décorations » en forme de sceptres.


mandel_3_c1

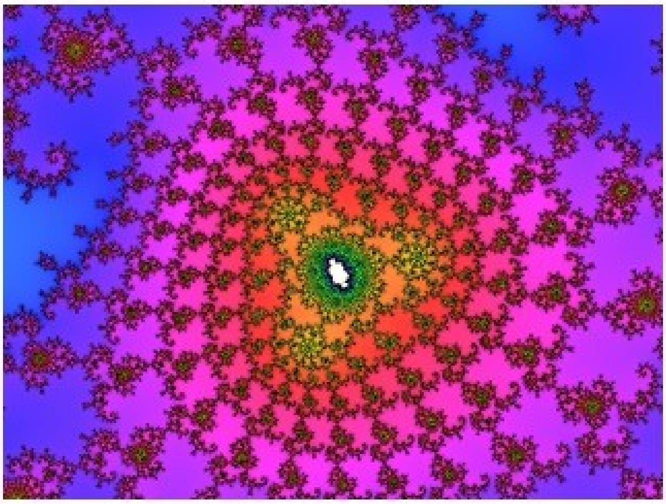

mandel_3_c2

5.4. Vallée « d »

Cette région ressemble aussi à la « vallée des sceptres » mais les décorations y sont plus étendues et forment des « rosaces » aux enchevêtrements complexes.



mandel_3_d1



mandel_3_d2

6. Conclusion

Dans ce deuxième article consacré aux fractales, nous avons présenté une extension des ensembles de Mandelbrot et de Julia aux fonctions de type $z^p + c$

Nous avons également introduit la notion très importante de « point critique ». Nous retrouverons cette notion par la suite.

Le prochain article sera consacré aux « mélanges » d'ensembles de Mandelbrot ou de Julia au moyen de la fonction $f(z) = (1 - t) z^p + t z^q + c$.

7. Références

1. E. F. Glynn, *The evolution of the gingerbread man*, Computers & Graphics **15** (1991) 579-82.
2. J. C. Sasmor, *Fractals for functions with rational exponent*, Computers & Graphics **28** (2004) 601-615