Des fractales en *Crocodile BASIC* (X)

1. Introduction

Nous présentons dans cet article les figures fractales générées par la méthode de Newton, une méthode itérative de résolution des équations (réf. 1 et 2).

2. Aspects théoriques

2.1. Equation à variable complexe

L'équation classique pour ce type de fractale est la suivante :

$$f(z) = z^3 - 1 = 0$$

Les solutions sont telles que :

$$z = 1^{1/3}$$

Dans l'ensemble des complexes, un nombre possède 3 racines cubiques. Il y a donc 3 solutions. Pour les calculer, nous utilisons la forme trigonométrique :

$$1 = 1 + 0i = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

D'où :

$$1^{1/3} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$$

On en déduit les 3 solutions :

$$\begin{array}{lll} k = 0 & \Rightarrow & z_0 = 1 \\ k = 1 & \Rightarrow & z_1 = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) \\ k = 2 & \Rightarrow & z_2 = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right) \end{array}$$

2.2. La méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à résoudre l'équation $f(z) = 0$ par approximations successives : si z_n et z_{n+1} sont deux approximations de la racine, on peut, sur l'intervalle $[z_n , z_{n+1}]$, remplacer la fonction $f(z)$ par son développement limité au premier ordre :

$$f(z_{n+1}) = f(z_n) + f'(z_n) \cdot (z_{n+1} - z_n)$$

Note : pour une fonction de variable réelle, cela équivaudrait à remplacer la courbe par sa tangente.

Si z_{n+1} est suffisamment proche de la racine on peut admettre que $f(z_{n+1})$ est proche de 0, d'où :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Pour la fonction $f(z) = z^3 - 1$ on a $f'(z) = 3z^2$ d'où :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2}$$

2.3. Principe de la génération des figures fractales

En chaque point du plan, on initialise les itérations avec les coordonnées du point. Si la suite converge vers l'une des racines, on dit que le point appartient au *bassin d'attraction* de la racine considérée. La frontière entre les différents bassins d'attraction est une courbe fractale ; au voisinage de la frontière, deux points infiniment proches peuvent converger vers des racines différentes, et donc appartenir à deux bassins différents.

La coloration des points peut se faire de deux manières :

1. selon le bassin d'attraction : il y a alors autant de couleurs que de bassins
2. selon le nombre d'itérations requises pour approcher la racine avec une précision donnée : on a alors un gradient de couleurs

Dans les deux cas, les points qui ne convergent pas sont représentés en noir.

3. Le programme `newton.bas`

Le programme `newton` implémente la méthode de Newton pour la fonction $f(z) = z^p - 1$ avec $p = 3$ par défaut.

La fonction f et sa dérivée f' sont calculées dans la procédure **`iter_sub`**.

Les itérations sont effectuées dans la procédure **`newton`**. On considère que la suite a convergé lorsque le terme correctif $q = f(z) / f'(z)$ est devenu négligeable, soit $|q| < \varepsilon$ où ε désigne la précision requise (10^{-6} dans l'exemple). Sachant que la suite peut converger vers une valeur qui n'est pas nécessairement une racine de l'équation, on teste aussi la valeur de la fonction qui doit être proche de zéro, d'où le test supplémentaire $|f| < \varepsilon$. Si le nombre maximal d'itérations (**`MaxIter`**) est atteint sans que la suite ait convergé, le point correspondant est coloré en noir.

La procédure **`newton`** examine aussi le cas où la dérivée s'annule : dans ce cas la suite ne converge pas et l'on sort de la boucle en fixant le nombre d'itérations à **`MaxIter`**.

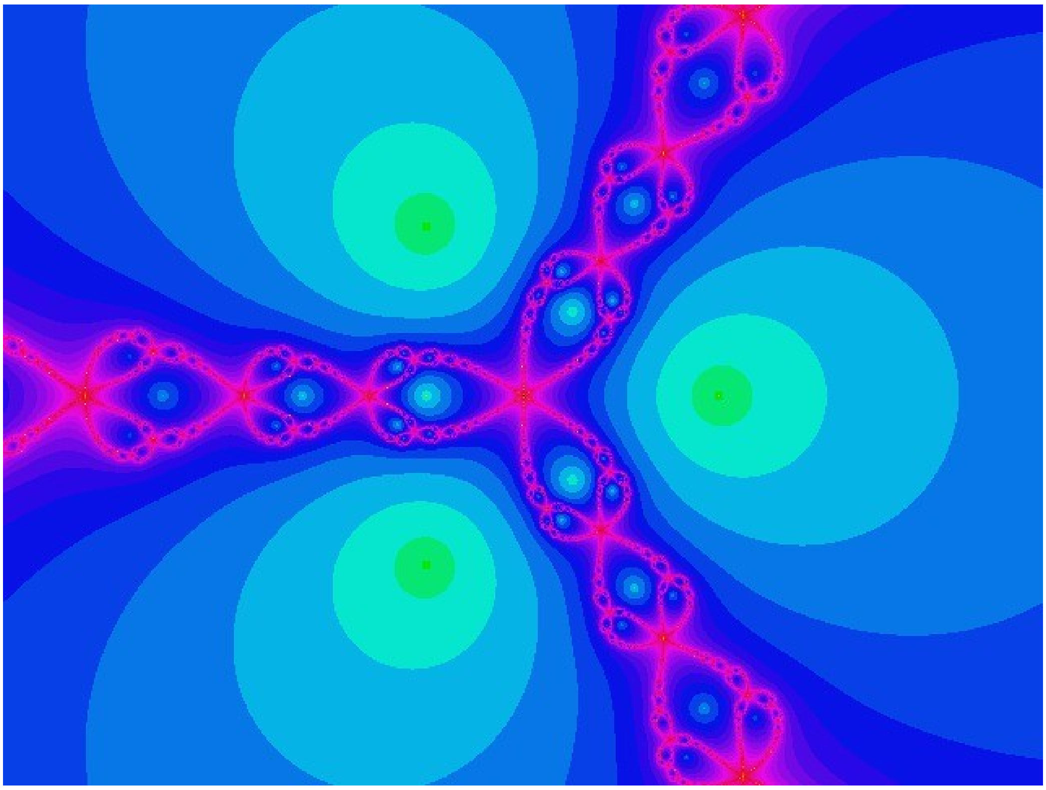
Lorsque la suite converge, la couleur du point est attribuée par la procédure **`newtcol`**. L'algorithme a été décrit dans nos articles précédents. La seule différence est que nous n'avons pas besoin de "lisser" le nombre d'itérations.

La conversion des couleurs RGB en HSV se fait dans la procédure **`HSVtoRGB`**, qui figurait déjà dans nos articles précédents.

4. Exemples d'images

Nous présentons ici quelques images créées par la méthode de Newton appliquée à des fonctions de type $f(z) = z^p - 1$ ainsi qu'à des fonctions trigonométriques ou exponentielles.

4.1. Fonction $f(z) = z^3 - 1$

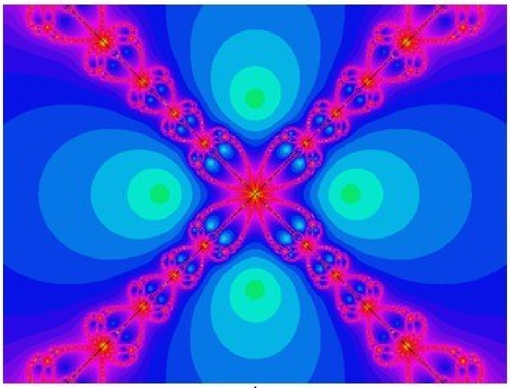


L'image montre les 3 racines de l'équation (points verts) : la racine réelle 1 située sur l'axe Ox, et les deux racines complexes conjuguées disposées symétriquement par rapport à l'axe Ox. Les points forment les 3 sommets d'un triangle équilatéral.

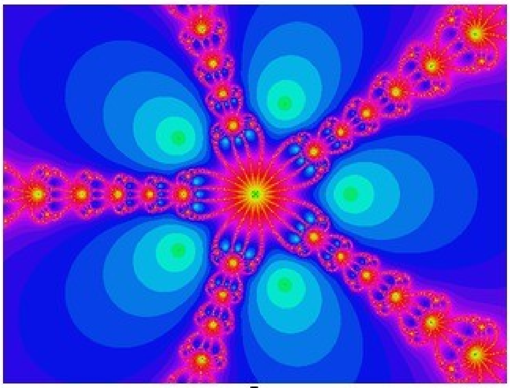
Les bandes bleu-vert entourant les racines figurent les bassins d'attraction ; plus un point est éloigné de la racine, plus il faut d'itérations pour que la suite converge vers la racine considérée. Ce phénomène se traduit sur l'image par l'évolution des bandes de couleur vers un bleu de plus en plus foncé.

Lorsque le point se trouve entre deux racines, le système devient chaotique ; une infime variation de coordonnées suffit à entrainer la suite vers l'une ou l'autre des deux racines. Les bassins d'attraction se mélangent et leur frontière prend l'aspect d'une courbe fractale : c'est la courbe rouge sur la figure.

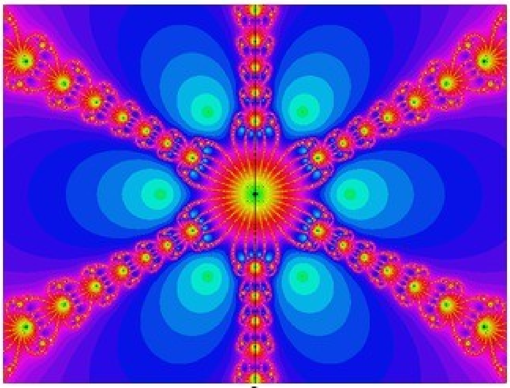
4.2. Fonction $f(z) = z^p - 1$ avec exposant entier positif



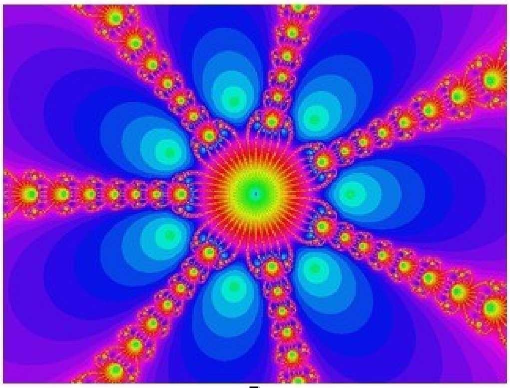
4



5



6



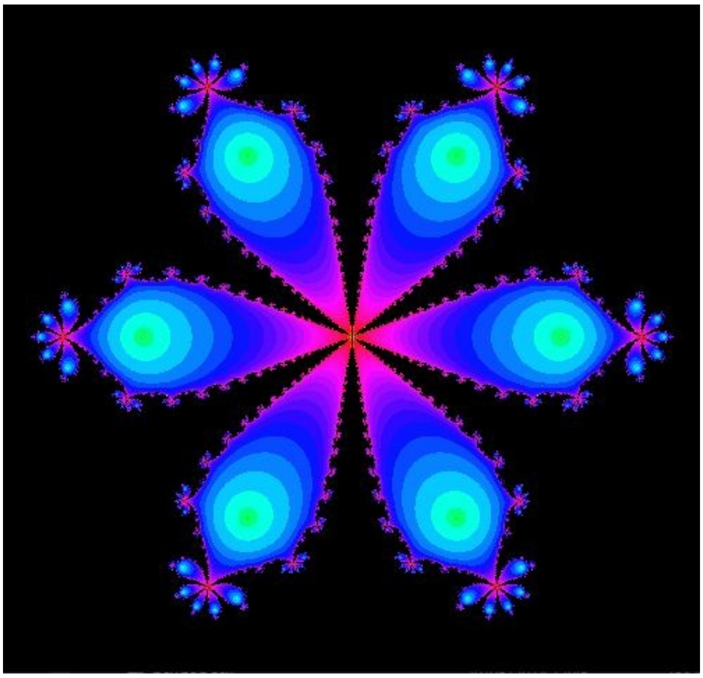
7

Les figures correspondent aux valeurs croissantes de l'exposant p, de 4 à 7. L'équation possède p racines, dont la racine réelle 1. Si p est pair, on a une deuxième racine réelle égale à -1 ; en effet $(-1)^p = 1$ quand p est pair. Les autres racines sont conjuguées complexes. Graphiquement, les racines sont situées aux sommets d'un polygone régulier. A mesure que l'exposant augmente, les courbes fractales se ramifient de plus en plus et le "noyau" central voit sa surface augmenter.

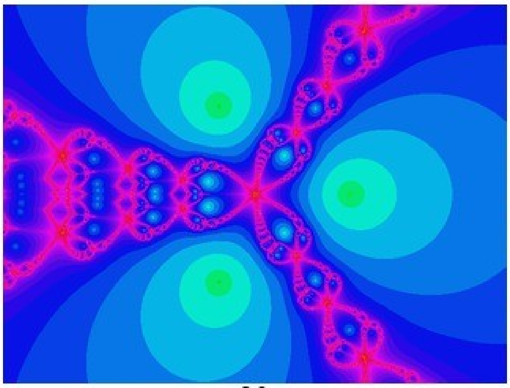
4.3. Fonction $f(z) = z^p - 1$ avec exposant entier négatif

Les racines sont les mêmes que pour l'exposant positif mais seuls les points proches des racines convergent. Ainsi le graphique apparaît comme une formation étoilée se détachant sur un fond noir.

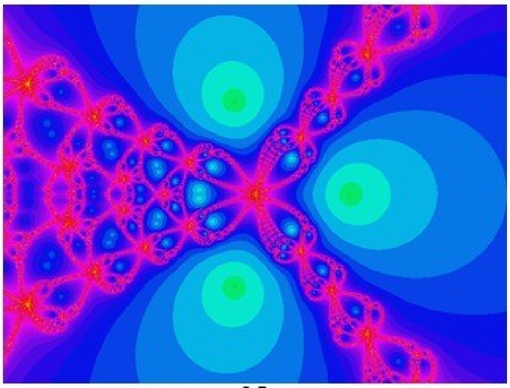
Exemple avec $p = -6$:



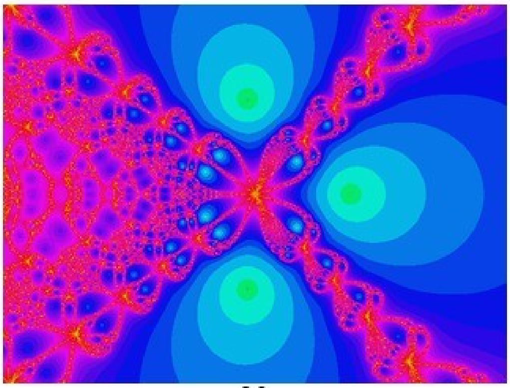
4.4. Fonction $f(z) = z^p - 1$ avec exposant fractionnaire



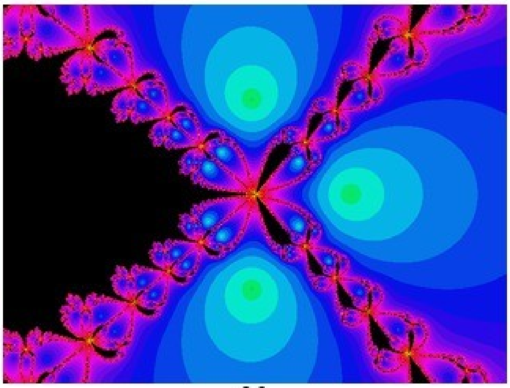
3.2



3.5



3.8

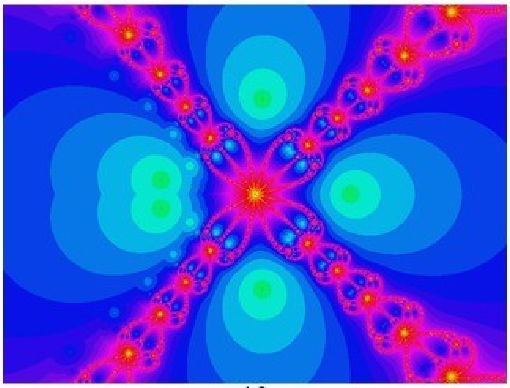


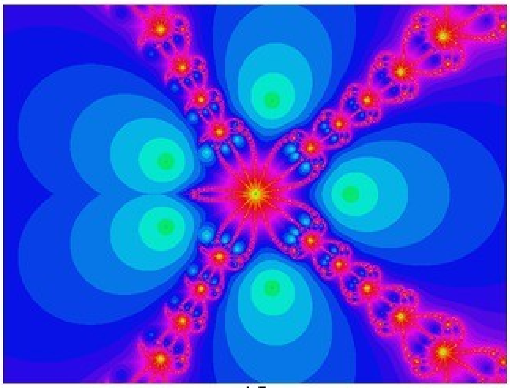
3.9

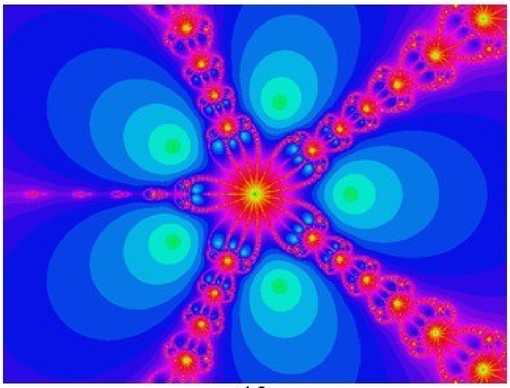
Les images montrent l'évolution d'un exposant entier *p* à l'exposant ($p + 1$) en passant par des valeurs fractionnaires :

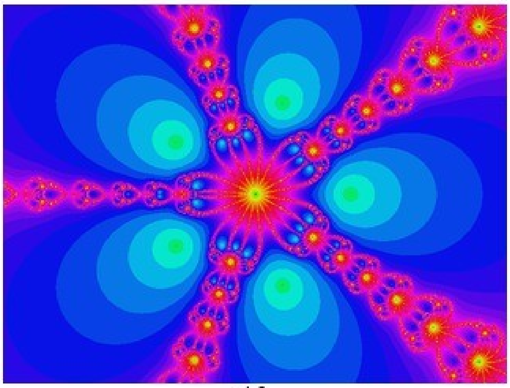
Si *p* est impair (image ci-dessus) la frontière fractale située du côté des *x* négatifs s'élargit progressivement et dessine des motifs de plus en plus complexes. Lorsqu'on s'approche de l'entier ($p + 1$) il apparaît des points pour lesquels la suite ne converge pas (en noir sur la figure pour l'exposant 3,9).

Si *p* est pair (image ci-dessous) la racine égale à (-1) disparaît lorsqu'on augmente *p* d'une petite fraction ; elle est remplacée par deux racines conjuguées complexes qui s'éloignent l'une de l'autre en se rapprochant de l'axe vertical à mesure que l'exposant augmente. La frontière fractale entre ces deux racines se développe progressivement à partir d'une "émanation" issue du "noyau" central.


4.2


4.5

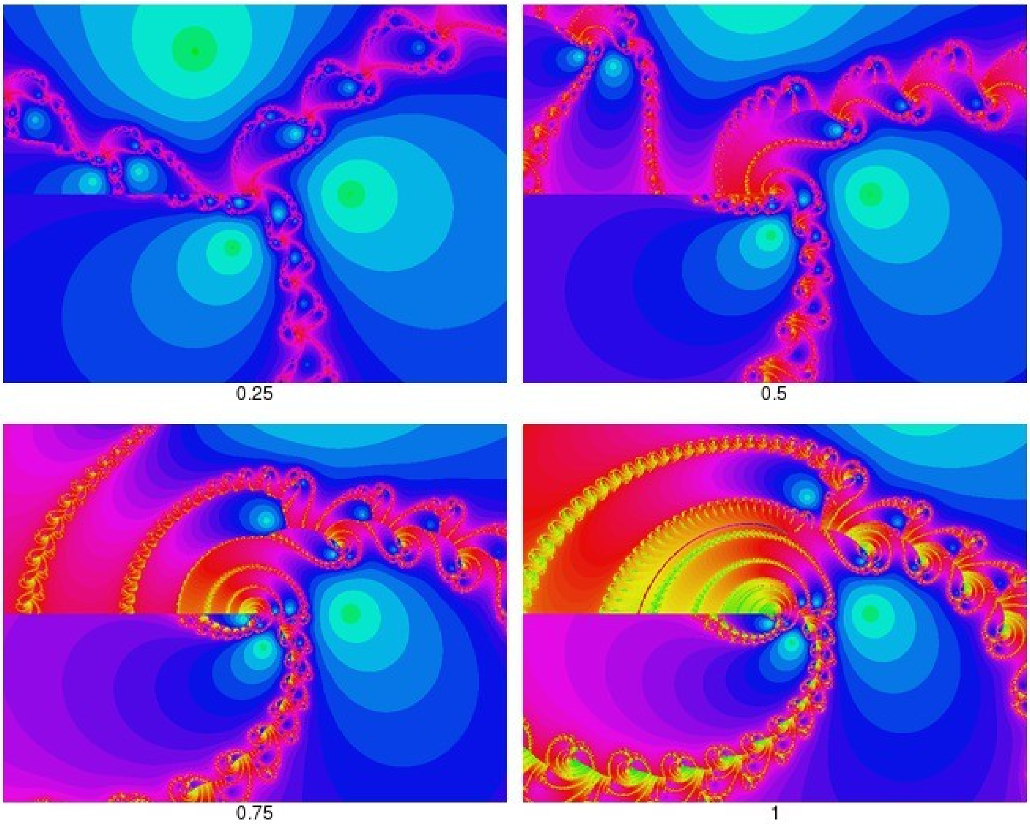

4.8


4.9

4.5. Fonction $f(z) = z^p - 1$ avec exposant complexe

Ici l'exposant est de la forme $p = 3(1 + y\mathrm{i})$ avec $0 < y \leq 1$; les images sont étiquetées d'après les valeurs de y.

On constate l'apparition d'une discontinuité le long des x négatifs ; par ailleurs la frontière fractale devient de plus en plus distordue. En augmentant la valeur de y on obtient des effets graphiques intéressants.

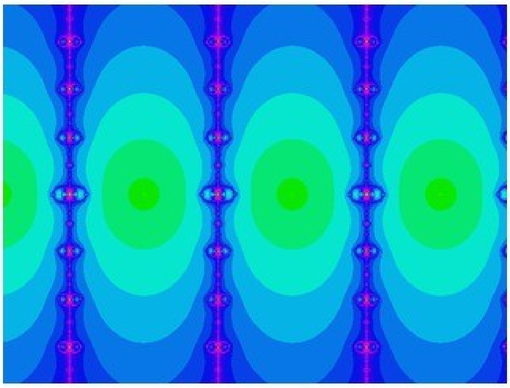
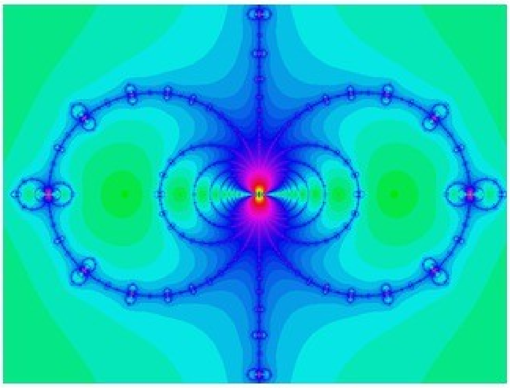


4.6. Des fonctions trigonométriques

4.6.1. Exemple 1

$$f(z) = \sin z - \cos z \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = \cos z + \sin z$$

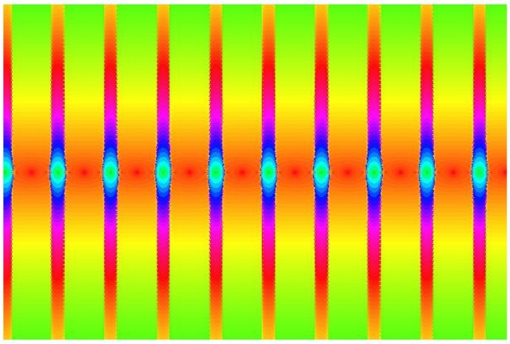
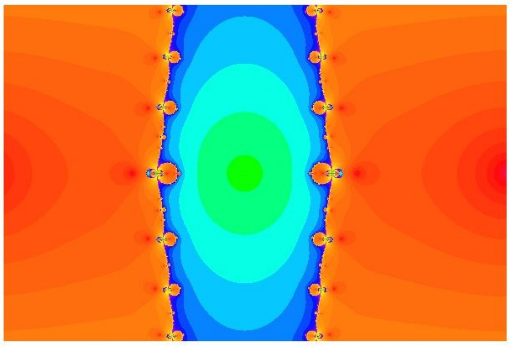
L'équation $f(z) = 0$ admet des racines réelles : $z = \pi/4 + k\pi$. L'image à faible résolution montre bien le caractère périodique de la fonction. L'agrandissement montre la complexité de la frontière fractale qui évoque un peu les boucles d'un champ magnétique :

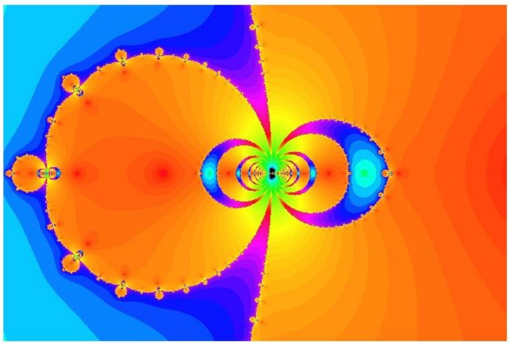
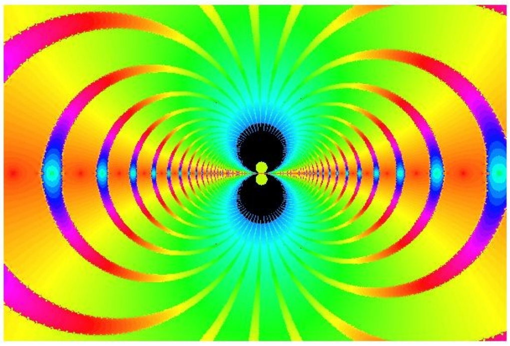
 

4.6.2. Exemple 2

$$f(z) = (1 + \sin(z)) \cdot \cos(z) \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = \cos^2(z) - \sin(z) \cdot (1 + \sin(z))$$

L'équation $f(z) = 0$ admet des racines réelles : $z = k\pi / 2$. Les images suivantes montrent 4 agrandissements successifs :

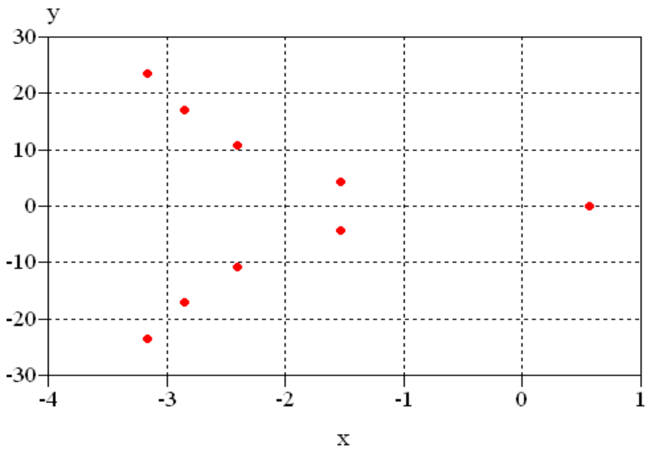
 

4.7. La fonction de Lambert

La fonction de Lambert W(a) représente les solutions de l'équation z exp(z) = a. Elle est actuellement très étudiée en raison de ses nombreuses applications (réf. 3). Elle ne peut pas s'exprimer en terme de fonctions "élémentaires" (exp, sin etc.) mais on peut l'évaluer par la méthode de Newton.

Pour a > -1/e la fonction W(a) admet une infinité de valeurs. Nous en avons représenté quelques-unes ici dans le cas a = 1 (ces valeurs ont été calculées à l'aide du logiciel *Maple*) : on a une racine réelle positive et une infinité de racines complexes conjuguées ayant des parties réelles négatives.

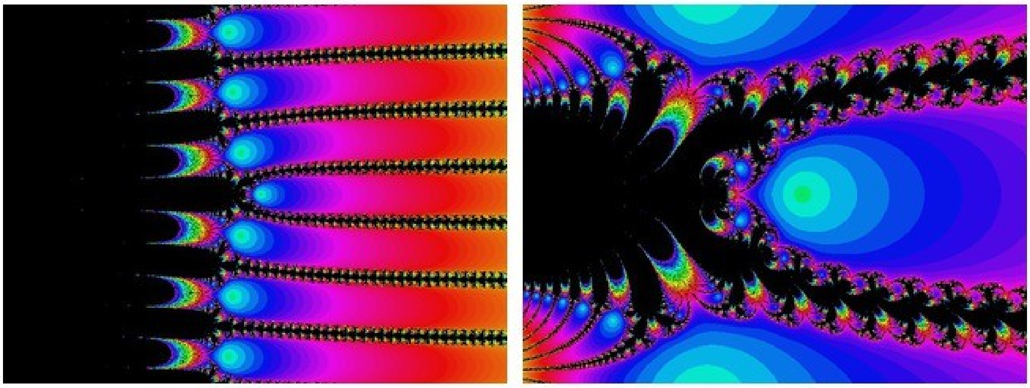


Note : la racine réelle, Ω = W(1) = 0,56714329... est parfois appelée « constante oméga ». Selon la page de Wikipedia (réf. 4), on peut la considérer comme une sorte de nombre d'or appliqué à l'exponentielle.

Pour appliquer la méthode de Newton à l'équation z exp(z) = 1 on pose :

$$f(z) = z \exp(z) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = (z + 1) \exp(z)$$

Avec un maximum de 1000 itérations on obtient les figures suivantes :



L'image de gauche, à faible résolution, montre les racines (points verts) ainsi que leurs bassins d'attraction, qui s'étendent le long des x positifs alors qu'ils sont limités du côté négatif, les points situés dans cette partie ne convergeant pas. Les bassins sont séparés par des frontières quasi-horizontales prolongeant la zone de non-convergence. L'image de droite montre l'agrandissement du domaine entourant la racine réelle Ω.

5. Conclusion

Dans cet article nous avons vu comment créer des figures fractales avec la méthode de Newton.

6. Références

1. http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale_de_Newton. La page de Wikipedia, qui présente aussi des variantes de la formule de Newton.

2. https://beaute-fractale.monsite-orange.fr/index.html. Très beau site avec de très nombreux exemples.

3. http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_W_de_Lambert. La fonction de Lambert.

4. http://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_om%C3%A9ga. La constante oméga.