

Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$

Tristan Vaccon

24 septembre 2012

1 Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$

- Identité : un élément ;
- les transpositions : $\binom{4}{2} = 6$ éléments ;
- Les trois-cycles : $2 * \binom{4}{3} = 8$ éléments (un choix de 3 éléments définit 2 cycles distincts ;
- Les quatre-cycles : $4 * 3 * 2 * \frac{1}{4} = 6$ éléments (les 4 permutations circulaires sur un 4 – *uplets* définissent le même cycle) ;
- Les doubles transpositions : $\binom{4}{2} * \frac{1}{2} = 3$ éléments (si on choisit deux éléments parmi 4 et qu'on prend ces deux-là pour première transposition et les deux autres pour la seconde, le second choix comme premier donnait la même permutation).

2 Représentations connues de $\mathfrak{S}_4$

On connaît les représentations triviales et alternées de $\mathfrak{S}_4$, de dimension 1, ainsi que les caractères associés.

	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1

Si l'on considère χ_P pour la représentation par permutation des vecteurs de base de $\mathbb{C}^4$, alors sur la classe de conjugaison K , $\chi_P(K)$ est le nombre de vecteurs de base fixés par $\rho_P(g)$, $g \in K$.

On en déduit le caractère $\chi_P = (4, 2, 1, 0, 0)$.

On a $V_P = V_1 \oplus V_S$ où V_1 est la triviale et V_S la standard. Ainsi, $\chi_P = \chi_1 + \chi_S$, et on en déduit le caractère de la standard $\chi_S = (3, 1, 0, -1, -1)$.

On vérifie que cette représentation est irréductible : $(\chi_S, \chi_S) = \frac{1}{24}(3^2 * 1 + 1 * 6 + 0 * 8 + (-1)^2 * 6 + (-1)^2 * 3) = 1$.

On obtient donc :

	1	6	8	6	3
	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_S	3	1	0	-1	-1

3 Les deux dernières représentations

Soient n_4 et n_5 leurs degrés. On a $1 + 1 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24$ donc $n_4^2 + n_5^2 = 13$, et $n_4, n_5 | 24$ donc disons, $n_4 = 3$ et $n_5 = 2$.

Pour trouver la quatrième représentation, on regarde une représentation de l'Hom : χ_W définie par $W = \text{Hom}(V_s, V_\varepsilon)$. On a $\chi_W = (3, -1, 0, 1, -1)$. On a bien $(\chi_W, \chi_W) = 1$ et W est irréductible.

Pour trouver la cinquième, on $\sum_{i=1}^5 n_i \chi_i(s) = 0$ si $s \neq 1$. On en déduit $\chi_{W'} = (2, 2, 0, -1, 2)$.

On peut donc conclure sur la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$:

	1	6	8	6	3
	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_S	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2

4 Application à la décomposition d'une représentation de degré 6 de $\mathfrak{S}_4$

On considère la représentation $\rho_E : \mathfrak{S}_4 \rightarrow GL_6(\mathbb{C})$, donnée par permutation des éléments de la base de $\mathbb{C}^6$ à partir de l'action par permutation de $\mathfrak{S}_4$ sur les faces du cube, donnée par l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur les diagonales du cube.

Comme représentation par permutation, $\chi_E(\sigma)$ est le nombre de faces laissées fixes par σ .

- Pour (12), c'est la rotation d'angle π sur un axe reliant les milieux de deux arêtes opposées (on échange deux diagonales). Pas de face fixée.
- Pour (123), c'est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ selon une grande diagonale (on permute circulairement les autres diagonales) : pas de face fixée.
- Pour (1234), c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ selon un axe de coordonnées : on permute circulairement les grandes diagonales, deux faces sont fixées.

- Une rotation d'angle π selon un axe de coordonnées : on permute deux par deux les diagonales, deux faces sont fixées.

On en déduit $\chi_E = (6, 0, 0, 2, 2)$. On a $(\chi_E, \chi_E) = 3$ donc cette représentation s'écrit comme somme de trois représentations irréductibles. On calcule les produits scalaires : $(\chi_E, \chi_1) = 1$, $(\chi_E, \chi_\varepsilon) = 0$, $(\chi_E, \chi_S) = 0$, $(\chi_E, \chi_W) = 1$, $(\chi_E, \chi_{W'}) = 1$.

Ainsi, $E = \mathbb{C} \oplus W \oplus W'$, comme G -module.

Références

- [1] PEYRÉ L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, p 228-230.