Comptage de racines et formes quadratiques

Tristan Vaccon

septembre 2012

Le but de ce développement est de montrer que l'on peut connaître, pour un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ le nombre de ses racines réelles et complexes non réelles en regardant la signature d'une forme quadratique bien choisie.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n. On peut écrire $P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ sur $\mathbb{C}$. P s'écrit alors $P = \sum_{j=0}^{n} (-1)^n \sigma_{n-j} X^j$ avec $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$.

La forme quadratique que nous allons étudier ne s'écrit pas en fonction des σ_i mais des $s_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i$, les sommes de Newton. Les deux sont liés par les formules de Newton que nous allons montrer dans la première partie (on pourrait aussi remarquer que ces deux familles sont génératrices de l'algèbre des polynômes symétriques).

Les parties suivantes constitueront le coeur du développement, et permettront de montrer le résultat de comptage attendu, énoncé et démontré dans [1] page 199 :

Théorème 1. *Si on pose*

$$q \,:\, (u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i+j} u_i u_j,$$

alors, si $sign(q) = (s,t)$, P a exactemt $s - t$ racines réelles distinctes et $s + t$ racines complexes distinctes.

1 Formules de Newton, [2] page 316

Nous allons démontrer les formules de Newton.

Ceci va s'écrire de manière naturelle sous la forme de séries formelles.

Tout d'abord, remarquons que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{k \geqslant 1} x_i^k T^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i T}{1 - x_i T}.$$

Maintenant, posons $Q(T) = T^n P(\frac{1}{T}) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i T)$.
Alors (dérivée logarithmique), $\frac{Q}{Q'} = -\sum \frac{x_i}{1-x_i T}$, et donc

$$\sum_{k=1}^n s_k T^k = -T\frac{Q'}{Q} = \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k\sigma_k T^k}{\sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k T^k}.$$

2 Rang de q

On peut écrire, les sommes étant finies :

$$q(u) = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i+j} u_i u_j = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} \alpha_k^{i+j} u_i u_j.$$

Mais alors, $q(u) = \sum_{k=1}^n l_k(u)^2$ où $l_k(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_k^i u_i$.
Quitte à réordonner, on peut maintenant écrire que $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines *distinces* de P, de multiplicité m_i.
Alors,

$$q = \sum_{k=1}^r m_k l_k^2 = \sum_{k=1}^r (\sqrt{m_k} l_k)^2.$$

Ainsi, q s'écrit comme somme de r *formes linéaires indépendantes.*
L'indépendance peut être vue sur la non-nullité du Vandermonde suivant :

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1^0 & \ldots & \alpha_r^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{r-1} & \ldots & \alpha_r^{r-1} \end{bmatrix}$$

Au final, le rang de q est r sur $\mathbb{C}$, mais il vaut alors aussi r sur $\mathbb{R}$. En effet, le rang est indépendant sur corps sur lequel on considère une matrice : il s'écrit uniquement en terme d'annulation ou non de ses mineurs !
On a ainsi déjà montré la seconde affirmation du théorème.

3 Nombre de racines réelles et complexes non réelles

Nous commençons par la remarque suivante, conséquence du fait que P soit à coefficients réels : si l_k correspond à $\alpha_k \notin \mathbb{R}$, alors $\overline{l_k}$ sera aussi présente, corresondant à une racine $\overline{\alpha_k}$ de P, de même multiplicité.
Écrivons alors $v_k = \frac{l_k + \overline{l_k}}{2}$ et $v_k = \frac{l_k - \overline{l_k}}{2i}$. Alors v_k et w_k sont réelles, indépendantes (autant que l_k et $\overline{l_k}$!), et telles que $m_k(l_k^2 + \overline{l_k}^2) = m_k(v_k^2 - w_k^2)$.

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ sont les racines réelles distinctes de q et $\alpha_{p+1}, \overline{\alpha_{p+1}}, \ldots, \alpha_{p+c}, \overline{\alpha_{p+c}}$ celles de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors

$$q = \sum_{k=1}^{p} m_k l_k^2 + \sum_{k=p+1}^{p+c} 2m_k(v_k^2 - w_k^2).$$

Il s'agit bien d'une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires réelles linéairement indépendantes (si elles étaient $\mathbb{R}$-liées, elles seraient $\mathbb{C}$-liées, ce qui n'est pas le cas (on a même facilement une matrice de passage !)).

On en déduit donc que la signature de q est $sign(q) = (p + c, c)$, ce qui, vu les manières dont ont été définis p et c, est bien ce qu'il fallait démontré.

4 Quelques mots

Le rang et la signature d'une forme quadratique réelle peuvent facilement se calculer par la méthode de Gauss. Il existe aussi une autre méthode par calcul de mineurs principaux (voir [1]), ainsi qu'une obtenue par règle de Descartes (voir [3]).

Pour plus de détails (ainsi qu'une seconde méthode de comptage), voir le document *Comptage de racines et formes quadratiques* de Michel Coste, sur le site de la prépa agreg de Rennes 1.

Références

[1] Gantmacher, Félix Théorie des matrices, volume 1

[2] Ramis, Warusfel Cours de mathématiques pures et appliquées, volume 1

[3] Mignottel Mathématiques pour le calcul formel, PUF, p. 208