

Mathématiques pour l'Ingénieur

Thomas Cluzeau

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges

16 rue d'atlantis, Parc ester technopole

87068 Limoges CEDEX

cluzeau@ensil.unilim.fr

<http://www.ensil.unilim.fr/~cluzeau>



Table des matières

1	Introduction aux distributions	5
1.1	Fonctionnelle	8
1.2	L'espace de fonctions tests \mathcal{D}	8
1.2.1	Définition	8
1.2.2	Exemples	9
1.2.3	Topologie de \mathcal{D}	11
1.3	L'espace \mathcal{D}' des distributions	11
1.3.1	Définition	11
1.3.2	Exemples, distributions régulières et singulières	12
1.3.3	Support d'une distribution	13
1.4	Opérations sur les distributions	13
1.4.1	Translation	14
1.4.2	Transposition	14
1.4.3	Dilatation (homothétie ou changement d'unité)	14
1.4.4	Multiplication des distributions	15
1.4.5	Dérivation des distributions	15
1.4.6	Dérivation d'une fonction discontinue	16
1.4.7	Convergence (faible) dans l'espace \mathcal{D}' des distributions	17
1.4.8	Sous-espaces de \mathcal{D}'	17
1.5	Distributions à plusieurs dimensions	18
2	La Convolution	19
2.1	Produit tensoriel	21
2.1.1	De deux fonctions	21
2.1.2	De deux distributions	22
2.2	Produit de convolution	22
2.2.1	Convolution de deux fonctions	22
2.2.2	Notion de mesure floue	23
2.2.3	Convolution de deux distributions	23
2.2.4	Propriétés du produit de convolution de deux distributions	25
2.3	Algèbre de convolution et résolution d'équations différentielles	26
2.3.1	Définition	26
2.3.2	Calcul algébrique	26

2.3.3	Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales	28
2.4	Interprétation physique de la convolution	29
2.4.1	Systèmes décrits par un opérateur de convolution	29
2.4.2	Système causal	30
2.4.3	Réponse à une excitation exponentielle	30
3	La Transformation de Fourier	33
3.1	Transformée de Fourier des fonctions	33
3.1.1	Définition et existence	33
3.1.2	Inversion	34
3.1.3	Transformée de Fourier en sinus et cosinus	34
3.1.4	Propriétés	35
3.1.5	Dérivation	36
3.1.6	Transformée de Fourier et convolution	37
3.1.7	Formule de Parseval-Plancherel	38
3.2	Transformée de Fourier des distributions	39
3.2.1	Définition	39
3.2.2	Espace \mathcal{S} et transformée de Fourier	40
3.2.3	Transformée de Fourier des distributions tempérées	40
3.2.4	Propriétés	41
3.2.5	Transformée de Fourier de la distribution peigne de Dirac	42
3.3	Séries de Fourier et Échantillonnage	42
3.3.1	Transformée de Fourier des fonctions périodiques	42
3.3.2	Échantillonnage	44
4	La Transformation de Laplace	47
4.1	Transformée de Laplace des fonctions	47
4.1.1	Définition et existence	47
4.1.2	Lien entre transformées de Laplace et de Fourier et formule d'inversion	48
4.1.3	Propriétés et transformées classiques	49
4.2	Transformée de Laplace des distributions	50
4.2.1	Exemples	50
4.2.2	Lien entre transformée de Laplace et de Fourier	51
4.3	Applications en physique	51
4.3.1	Calcul des fonctions de transfert en électronique	51
4.3.2	Résolution d'équations différentielles en mécanique	52
4.4	Résolution d'équations de convolution	53
A	Décomposition en éléments simples	55
A.1	Décomposition en partie entière et partie polaire	55
A.2	Décomposition de la partie polaire en éléments simples	56
A.2.1	Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C}	56
A.2.2	Décomposition en éléments simples sur \mathbb{R}	59

Chapitre 1

Introduction aux distributions

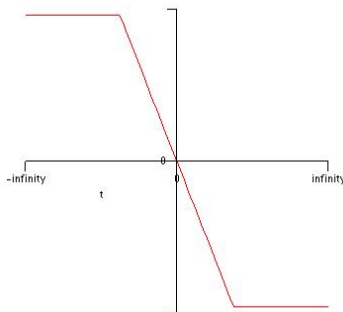
Introduction

Les distributions sont utilisées depuis longtemps par les physiciens (distributions de Dirac, ...) mais une théorie mathématique rigoureuse n'est apparue que récemment dans les travaux de Sobolev (1936) et surtout L. Schwartz (1950) (en parallèle : Gelfand (1964)). C'est la théorie la plus adaptée à l'étude de nombreux systèmes physiques et notamment à celle des systèmes linéaires continus. Avec la notion de distribution, la convolution (voir Chapitre 2) et la transformée de Fourier (voir Chapitre 3) deviennent des outils mathématiques d'une grande puissance.

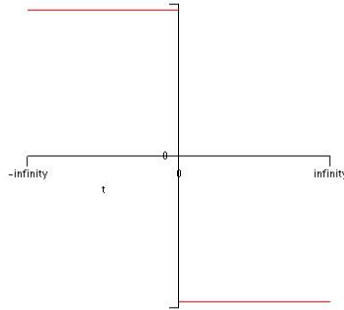
Intuitivement, les distributions sont des outils mathématiques utilisés pour représenter des phénomènes physiques que les fonctions classiques s'avèrent incapables de transcrire.

Premier exemple introductif : Choc élastique entre deux objets

Considérons une partie de squash. On suppose que la balle arrive sur un mur (perpendiculairement à la surface pour simplifier) à la vitesse v_0 et rebondit. La balle s'écrase quelque peu ce qui fait que le choc dure un temps Δt non nul, puis elle repart avec une vitesse $-v_0$. Le graphe de la vitesse en fonction du temps est donc le suivant :



La loi de la mécanique Newtonienne stipule que, tout au long du mouvement, la force F exercée sur la balle est telle que $F = m \dot{v}$; elle est donc proportionnelle à la dérivée de la fonction représentée ci-dessus. Maintenant, si l'on veut modéliser un choc dur (partie de pétanque), le graphe de la vitesse devient alors :



La force exercée devrait toujours être proportionnelle à la dérivée de cette fonction donc F devrait être nulle pour tout $t \neq 0$ et vérifier

$$\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = v(+\infty) - v(-\infty) = -2v_0,$$

ce qui est absurde car l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle. Par conséquent, ni cette intégrale, ni la dérivée précédente ne peuvent être traitées au sens des fonctions; on a besoin d'objets plus généraux, *i.e.*, les distributions.

Deuxième exemple introductif : Distributions de charges en électrostatique

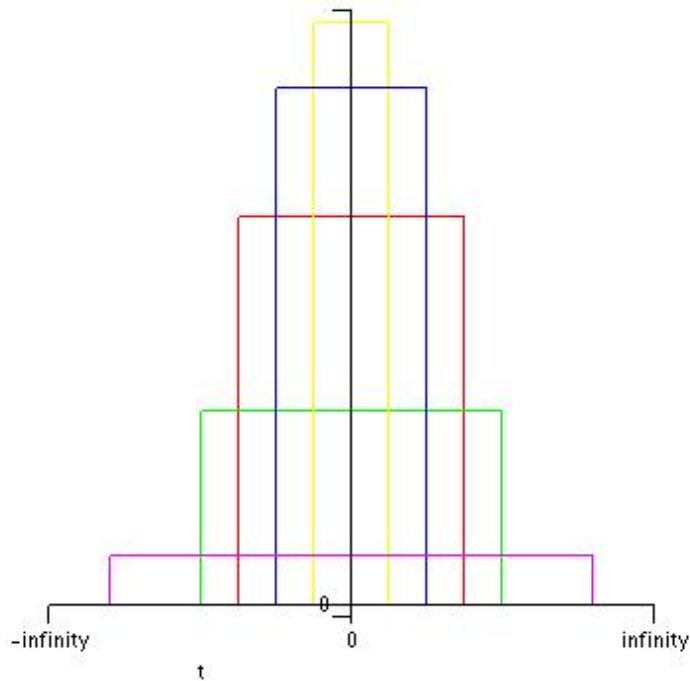
Trois notions de charges apparaissent en électrostatique :

- les charges ponctuelles q_i ,
- les densités de charges superficielles σ (ou charge par unité de surface) sur les conducteurs,
- les densités de charges volumiques ρ (par unité de volume).

On peut remarquer qu'une distribution ponctuelle de charge peut s'obtenir comme limite d'une distribution volumique en faisant tendre, à charge constante, le volume vers zéro. Pour simplifier, prenons un exemple à une dimension. Soit $\Pi(x)$ la fonction "porte" définie par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Considérons, sur une droite, une suite de densités de charges $\rho_k(x) = k \Pi(kx)$ donnée par la figure suivante :



L'intégrale, qui représente la charge totale en électrostatique, est indépendante de k :

$$\int \rho_k(x) dx = 1.$$

Lorsque k tend vers l'infini, la charge totale, qui reste égale à 1, est entièrement concentrée à l'origine. On a obtenu une charge unité ponctuelle à l'origine. On a donc envie de représenter cette charge par une fonction $\delta(x)$ qui vaudrait :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0, \\ +\infty & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

et telle que $\int \delta(x) dx = 1$ ce qui est absurde car l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle. Les fonctions ne permettent pas de représenter ce phénomène : on a besoin d'objets plus généraux, *i.e.*, les distributions.

Autres exemples :

- En mécanique, dans le cadre de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique, comment écrire l'équation du mouvement d'un solide lorsque le système est soumis à une force intense appliquée pendant un intervalle de temps très court à partir de l'instant $t = t_0$?
- En électricité, comment va se comporter un circuit dont l'entrée varie brusquement ; par exemple par fermeture d'un interrupteur sur une source de tension continue ?

- En hydraulique, comment va se comporter un système dont on ouvre brusquement une vanne à l'instant $t = t_0$?

1.1 Fonctionnelle

Définition 1.1.1. *On dit que l'on a une fonctionnelle sur un ensemble de fonctions appelées fonctions tests, si à chacune de ces fonctions on peut associer un nombre complexe. Autrement dit une fonctionnelle T sur un espace de fonctions \mathcal{F} est une application de \mathcal{F} dans \mathbb{C} . Le nombre associé par T à $\varphi \in \mathcal{F}$ est noté $\langle T, \varphi \rangle$.*

Une grande variété de fonctions tests peuvent être utilisées et plus les conditions de régularité imposées aux fonctions tests sont sévères, plus les fonctionnelles définies sont générales. Les distributions seront définies comme fonctionnelles sur un certain espace, noté \mathcal{D} , que nous allons présenter maintenant.

1.2 L'espace de fonctions tests \mathcal{D}

Dans ce chapitre, nous nous restreindrons au cas à une dimension, c'est-à-dire que les fonctions considérées seront des fonctions à une seule variable réelle.

1.2.1 Définition

Définition 1.2.1. *Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R} . Le support de f , noté $\text{Supp}(f)$, est l'adhérence des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq 0$.*

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}.$$

Rappel : l'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble. Dans le cas des fonctions d'une seule variable, l'adhérence est un intervalle compact du type $[a, b]$.

Le support de f est donc un ensemble fermé en dehors duquel f est nulle et en outre c'est le plus petit ensemble possédant cette propriété.

Définition 1.2.2. *On définit l'ensemble \mathcal{D} comme l'espace des fonctions à valeurs complexes définies sur \mathbb{R} , indéfiniment dérivables et à support borné.*

Remarque : C'est un espace vectoriel de dimension infinie.

Le support étant fermé par définition, on peut remplacer dans la définition précédente support borné par support compact. En effet, pour qu'un sous-ensemble de \mathbb{R} soit compact, il faut et il suffit qu'il soit fermé et borné.

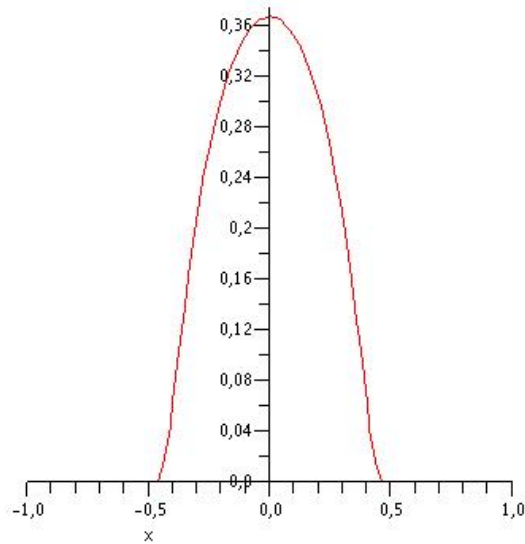
1.2.2 Exemples

Des exemples de fonctions appartenant à \mathcal{D} ne viennent pas immédiatement à l'esprit ; les fonctions analytiques ne peuvent pas convenir.

Exemple fondamental : Soit ξ_a la fonction définie par :

$$\xi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \geq 1/a, \\ \exp\left(\frac{-1}{1-a^2x^2}\right) & \text{pour } |x| < 1/a, \end{cases}$$

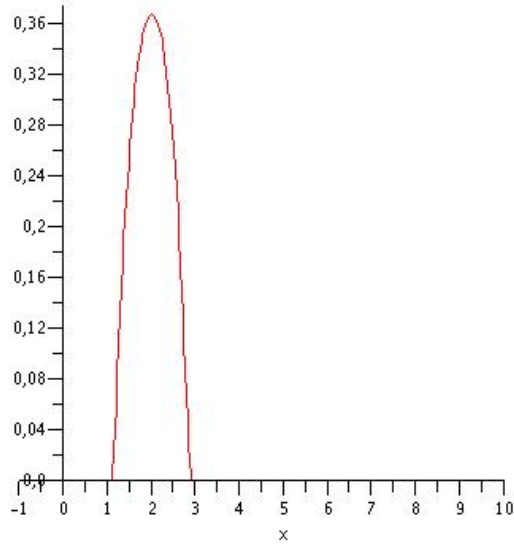
avec $a > 0$. Elle est indéfiniment dérivable, son support est $[-1/a, 1/a]$ et il est facile de vérifier que toutes ses dérivées sont nulles en $x = 1/a$ et $x = -1/a$. Voici le graphe de ξ_2 :



Plus généralement, toute fonction ξ_{ab} définie par

$$\xi_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin]a, b[, \\ \exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right]\right) & \text{pour } x \in]a, b[, \end{cases}$$

est une fonction de \mathcal{D} de support $[a, b]$. Voici le graphe de ξ_{13} :



Une autre famille de fonctions de \mathcal{D} est définie par

$$\gamma_k(x) = \frac{\xi_1(kx)}{\int \xi_1(kx) dx}.$$

Ces fonctions permettent d'en construire beaucoup d'autres grâce au théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et si f est une fonction sommable à support borné, alors*

$$\psi(x) = \int f(t) \varphi(x - t) dt$$

est une fonction de \mathcal{D} .

Considérons maintenant la suite de fonctions

$$\psi_k(x) = \int f(t) \gamma_k(x - t) dt.$$

On démontre que si f est continue, alors cette suite converge uniformément vers f . D'où le théorème admis :

Théorème 1.2.2 (Théorème d'approximation). *Toute fonction continue à support borné peut être approchée uniformément par une suite $(\varphi_n)_{n>0}$ de fonctions de \mathcal{D} .*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que, } \forall n \geq N, \forall x, |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \epsilon.$$

1.2.3 Topologie de \mathcal{D}

Elle sera définie par un critère de convergence pour les suites.

Définition 1.2.3. Une suite $(\varphi_n)_{n>0}$ de fonctions de \mathcal{D} converge vers une fonction φ lorsque n tend vers l'infini si :

1. Il existe un ensemble borné B (indépendant de n) de \mathbb{R} tel que pour tout $n > 0$, $\text{Supp}(\varphi_n) \subset B$;
2. Pour tout entier $k \geq 0$, la suite des dérivées $(\varphi_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $\varphi^{(k)}$.

On peut montrer que la limite φ appartient alors à \mathcal{D} .

1.3 L'espace \mathcal{D}' des distributions

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1. On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel \mathcal{D} .

Soit T une distribution. Par définition, T est une fonctionnelle sur \mathcal{D} donc T associe à toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ un complexe noté $\langle T, \varphi \rangle$ (ou parfois $T(\varphi)$).

La définition d'une distribution implique les deux points suivants :

1. Linéarité

- $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$,
- $\langle T, \lambda \varphi_1 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle$.

2. Si $(\varphi_k)_{k>0}$ converge dans \mathcal{D} vers φ , alors la suite $(\langle T, \varphi_k \rangle)_{k>0}$ converge au sens usuel vers $\langle T, \varphi \rangle$, i. e.,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall k > N, |\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \varphi_k \rangle| \leq \epsilon.$$

L'ensemble des distributions est un espace vectoriel noté \mathcal{D}' . La somme de deux distributions et le produit d'une distribution par un scalaire sont définis comme suit :

- $\langle S + T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle + \langle T, \varphi \rangle$,
- $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$.

1.3.2 Exemples, distributions régulières et singulières

Définition 1.3.2. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite localement sommable si elle est intégrable sur tout intervalle borné. À toute fonction f localement sommable, on associe la distribution T_f définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Une telle distribution est dite *régulière*. Les autres (celles qui ne s'écrivent pas T_f pour f localement sommable) sont dites *singulières*.

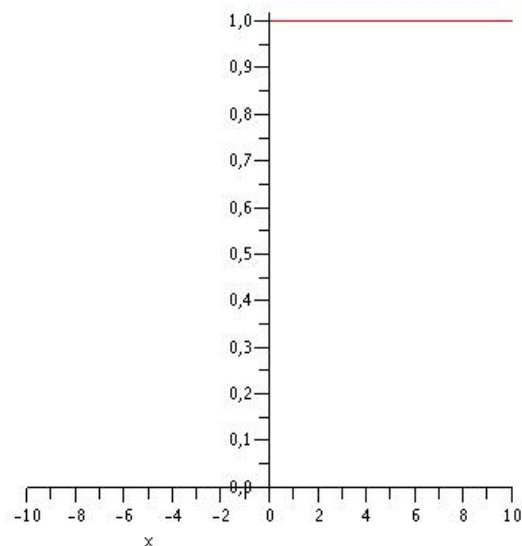
Proposition 1.3.1. Deux fonctions localement sommables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout.

Un premier exemple de distribution régulière est la distribution *valeur principale de Cauchy* de $1/x$ notée $\text{vp } \frac{1}{x}$ et définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Un second exemple est la distribution de Heaviside. La fonction H de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$



La distribution de Heaviside, notée $W = T_H$, est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle W, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

L'exemple le plus usuel de distribution singulière est la *distribution de Dirac* notée δ et définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Plus généralement, on définit la *distribution de Dirac au point a* et on note δ_a la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Attention : En physique, on écrit souvent $\delta(x)$ ou $\delta(x - a)$ au lieu de δ et δ_a . Cette écriture laisse croire que δ est une fonction, ce qui est faux !

La distribution de Dirac δ_a est souvent interprétée comme représentant la masse (ou la charge) $+1$ au point a .

Toute combinaison linéaire de distributions de Dirac est une distribution singulière. En particulier la distribution $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$ (n entier) a des propriétés intéressantes et joue un rôle important en physique. On l'appelle *distribution peigne de Dirac* et on la note III .

Remarque : Ceux sont les généralisations à trois dimensions des distributions de Dirac qui donnent une représentation mathématique correcte des charges ponctuelles et superficielles en électrostatique.

1.3.3 Support d'une distribution

Définition 1.3.3. On dit que deux distributions S et T sont égales si $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On dit qu'elles sont égales sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ si $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}$ ayant son support dans Ω .

Exemples : Les distributions régulières T_1 et W sont égales sur $]0, +\infty[$. Les distributions δ et III sont égales sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Définition 1.3.4. Considérons la réunion de tous les ouverts sur lesquels une distribution T est nulle. Cet ensemble est alors le plus grand ouvert sur lequel T est nulle (admis). Son complémentaire (qui est un fermé) est appelé support de la distribution T ; on le note $\text{Supp}(T)$.

Définition 1.3.5. L'espace \mathcal{D}'_+ (resp. \mathcal{D}'_-) des distributions à support dans \mathbb{R}_+ (resp. \mathbb{R}_-) est appelé espace des distributions à support borné à gauche (resp. borné à droite).

Exemples : $\text{Supp}(\delta_a) = \{a\}$ et $\text{Supp}(\text{III}) = \mathbb{Z}$.

1.4 Opérations sur les distributions

Méthodologie : on souhaite définir un certain nombre d'opérations sur les distributions. Pour ceci, on va étudier comment ces opérations sont définies pour une fonction localement sommable, traduire ceci avec le langage des distributions sur la distribution régulière associée et généraliser.

1.4.1 Translation

Si f est localement sommable et si $a \in \mathbb{R}$, alors la translatée f_a de f est la fonction donnée par $f_a(x) = f(x - a)$. La distribution régulière associée à f_a vérifie donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{f_a}, \varphi \rangle = \int f(x - a)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi(y + a)dy = \langle T_f, \varphi_{-a} \rangle .$$

Définition 1.4.1. La translatée d'une distribution T , notée T_a est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_a, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_{-a} \rangle .$$

Exemple : La translatée de la valeur principale de Cauchy de $1/x$ est la valeur principale de $1/(x - a)$.

1.4.2 Transposition

Soit f une fonction localement sommable et cherchons la distribution associée à la fonction \check{f} qui à x associe $f(-x)$. On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{\check{f}}, \varphi \rangle = \int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx = \langle T_f, \check{\varphi} \rangle .$$

Définition 1.4.2. La transposée d'une distribution T , notée \check{T} est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle .$$

Remarque : Ceci permet de définir des distributions paires et impaires comme pour les fonctions.

1.4.3 Dilatation (homothétie ou changement d'unité)

Si f est localement sommable et si $a \in \mathbb{R}^*$, alors la dilatée de la fonction f est définie par $x \mapsto f(ax)$. Sa distribution régulière associée vérifie

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle "T_{f(ax)}", \varphi \rangle = \int f(ax)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\frac{dy}{|a|} = \frac{1}{|a|} \langle T_f, " \varphi\left(\frac{x}{a}\right) " \rangle .$$

Définition 1.4.3. La dilatée d'une distribution T est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle "T(ax)", \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, " \varphi\left(\frac{x}{a}\right) " \rangle .$$

Exemple : " $\delta(ax)$ " = $\frac{1}{|a|} \delta$.

1.4.4 Multiplication des distributions

Il n'existe pas de moyen de multiplier entre elles deux distributions quelconques. En outre, si f et g sont deux fonctions localement sommables, alors leur produit ne l'est pas nécessairement ($f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$).

Cependant si ψ est une fonction indéfiniment dérivable, alors le produit par ψ d'une fonction test de \mathcal{D} est encore dans \mathcal{D} . Soit f une fonction localement sommable et ψ une fonction indéfiniment dérivable. On a alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{\psi f}, \varphi \rangle = \int (\psi(x) f(x)) \varphi(x) dx = \int f(x) (\psi(x) \varphi(x)) dx = \langle T_f, \psi \varphi \rangle .$$

Définition 1.4.4. Soit ψ une fonction indéfiniment dérivable. Le produit ψT d'une distribution T par ψ est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle .$$

À partir de cette définition, on peut définir le produit d'une distribution quelconque T par une distribution régulière T_ψ associée à une fonction indéfiniment dérivable ψ de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_\psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle .$$

Lemme 1.4.1. Soit ψ une fonction indéfiniment dérivable. On a :

$$\psi \delta = \psi(0) \delta .$$

Démonstration.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle \psi \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \psi \varphi \rangle = \psi(0) \varphi(0) = \psi(0) \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \psi(0) \delta, \varphi \rangle ,$$

d'où le résultat. □

En particulier, $x \delta = 0$. L'équation $x T = 0$, de distribution inconnue T , a pour solutions les multiples de la distribution de Dirac.

1.4.5 Dérivation des distributions

Soit f une fonction localement sommable que nous supposons de plus dérivable. Dans ce cas, f' est localement sommable et sa distribution régulière associée vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int f'(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) \varphi'(x) dx = - \langle T_f, \varphi' \rangle .$$

Notons que ceci s'obtient par intégration par partie en utilisant le fait que φ est à support borné. C'est la raison principale du choix restrictif des fonctions tests, *i.e.*, de l'espace \mathcal{D} .

Définition 1.4.5. La dérivée T' d'une distribution T de \mathcal{D}' est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle .$$

De même on pourra définir les dérivées successives $T^{(m)}$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T^{(m)}, \varphi \rangle = (-1)^m \langle T, \varphi^{(m)} \rangle .$$

Exemple : $W' = \delta$. En effet

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle W', \varphi \rangle = - \langle W, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Lemme 1.4.2. Soit T une distribution quelconque et ψ une fonction indéfiniment dérivable. On a alors la règle de Leibniz suivante :

$$(T\psi)' = T'\psi + T\psi' .$$

Démonstration. Voir TD 1. □

1.4.6 Dérivation d'une fonction discontinue

On a vu que la dérivée au sens des distributions de la distribution de Heaviside était égale à la distribution de Dirac. Maintenant si on considère la fonction de Heaviside, sa dérivée est nulle partout sauf en 0 où elle n'est pas définie et la distribution associée n'est pas δ . Par conséquent, les opérations "prendre la distribution associée" et "dérivation" ne commutent pas, ou, autrement dit, $(T_f)' \neq T_{f'}$. Cela sera ainsi pour toute fonction présentant une discontinuité en un point.

Soit f une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux. Soient a_1, \dots, a_n les points de discontinuité de f (que nous supposons en nombre fini) et $\sigma_i^{(0)} = f(a_i^+) - f(a_i^-)$ le saut de discontinuité de f en a_i . La fonction f peut alors s'écrire comme la somme d'une fonction continue g et de fonctions de Heaviside.

$$f(x) = g(x) + \sum_{i=0}^n \sigma_i^{(0)} H(x - a_i) .$$

De plus, on a $T_{f'} = T_{g'}$ où f' désigne la dérivée de f là où elle est bien définie c'est-à-dire en dehors des points de discontinuité (voir Proposition 1.3.1).

Théorème 1.4.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Avec les notations précédentes, on a alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_i \sigma_i^{(0)} \delta_{a_i} .$$

On notera plus simplement

$$(T_f)' = T_{f'} + \sigma^{(0)} \delta .$$

De même, soit f une fonction \mathcal{C}^∞ par morceaux. Si l'on note $\sigma^{(j)}$ les sauts de discontinuité de $f^{(j)}$, on a

$$(T_f)^{(m)} = T_{f^{(m)}} + \sigma^{(m-1)} \delta + \sigma^{(m-2)} \delta' + \dots + \sigma^{(0)} \delta^{(m-1)} .$$

1.4.7 Convergence (faible) dans l'espace \mathcal{D}' des distributions

Théorème et Définition 1.4.1. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ¹ une suite de distributions. On dit que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{D}' si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge au sens ordinaire. Si on appelle $\langle T, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_n, \varphi \rangle$ cette limite, alors l'application $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ est une distribution.

Théorème 1.4.2. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{D}' vers une distribution T , alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite de distributions $(T_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{D}' vers $T^{(m)}$.

Convergence vers δ . Si la suite de fonctions localement sommables $(f_k)_k$ vérifie :

1. $\exists A > 0$ tel que pour tout $|x| \leq A$, $f_k(x) \geq 0$,
2. $\forall a > 0$, $\int_{|x| \leq a} f_k(x) dx \rightarrow 1$ lorsque $k \rightarrow +\infty$,
3. $f_k(x) \rightarrow 0$ uniformément dans tout ensemble $0 < a < |x| < \frac{1}{a} < \infty$ ($a \in]0, 1[$),

alors la suite des distributions régulières $(T_{f_k})_k$ converge dans \mathcal{D}' vers δ .

Une suite de fonctions localement sommables satisfaisant les conditions précédentes est souvent appelée *suite de fonctions de Dirac*. Un exemple de suite de fonctions de Dirac est la suite $(g_n)_n$ des gaussiennes définies par $g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2)$.

1.4.8 Sous-espaces de \mathcal{D}'

Si on considère un espace de fonctions tests plus grand que \mathcal{D} , alors les fonctionnelles linéaires continues sur ce nouvel espace forment un sous-espace vectoriel de \mathcal{D}' . Deux espaces de fonctions tests couramment utilisés sont :

1. L'espace \mathcal{E} des fonctions indéfiniment dérivables quelconques,
2. L'espace \mathcal{S} des fonctions indéfiniment dérivables et qui décroissent, ainsi que leurs dérivées, plus vite que toute puissance de $1/x$ à l'infini c'est-à-dire que pour tout $k > 0$ et pour tout $h > 0$, $x^k f^{(h)}(x)$ est bornée.

On obtient ainsi l'espace \mathcal{E}' des distributions à support compact et l'espace \mathcal{S}' des distributions dites *tempérées* (ou à croissance lente).

$$\begin{array}{l} \text{Espaces de fonctions tests : } \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \\ \text{Espaces de distributions : } \mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}' \end{array}$$

¹Attention : ici T_n désigne une distribution quelconque et non pas la distribution régulière associée à une certaine fonction n .

Dans la pratique, la plupart des distributions sont tempérées ($\delta_a, \text{vp} \frac{1}{x}$). Cependant, en général, si f est une fonction localement sommable, alors T_f n'est pas tempérée.

Théorème 1.4.3 (Caractérisation des distributions tempérées). *Pour qu'une fonctionnelle linéaire continue T sur \mathcal{S} soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe $A > 0$ et $p \in \mathbb{N}^+$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on ait :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq A \|\varphi\|_p,$$

où

$$\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.5 Distributions à plusieurs dimensions

D'une façon analogue, on peut définir des *distributions à n dimensions* comme fonctionnelles sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} indéfiniment dérivables sur \mathbb{R}^n et à support borné. Par exemple, la distribution régulière associée à une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ localement sommable est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Chapitre 2

La Convolution

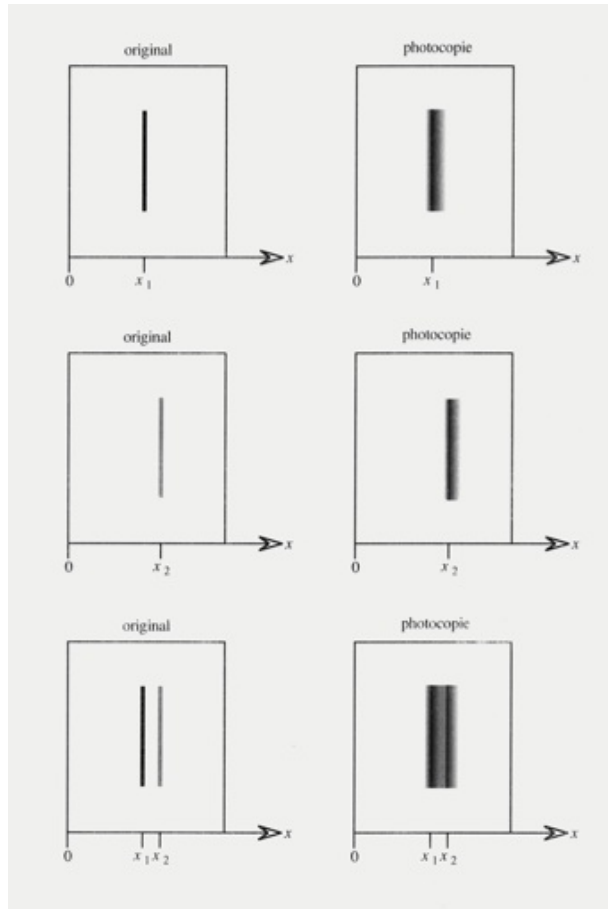
Introduction

Le produit de convolution est un outil d'une grande importance en physique. On le rencontre, par exemple, à chaque fois que l'on étudie :

- La transmission d'un signal par un appareil,
- Une impulsion électrique fonction du temps,
- Une image représentée par une fonction d'une ou deux variables,
- En diffraction.

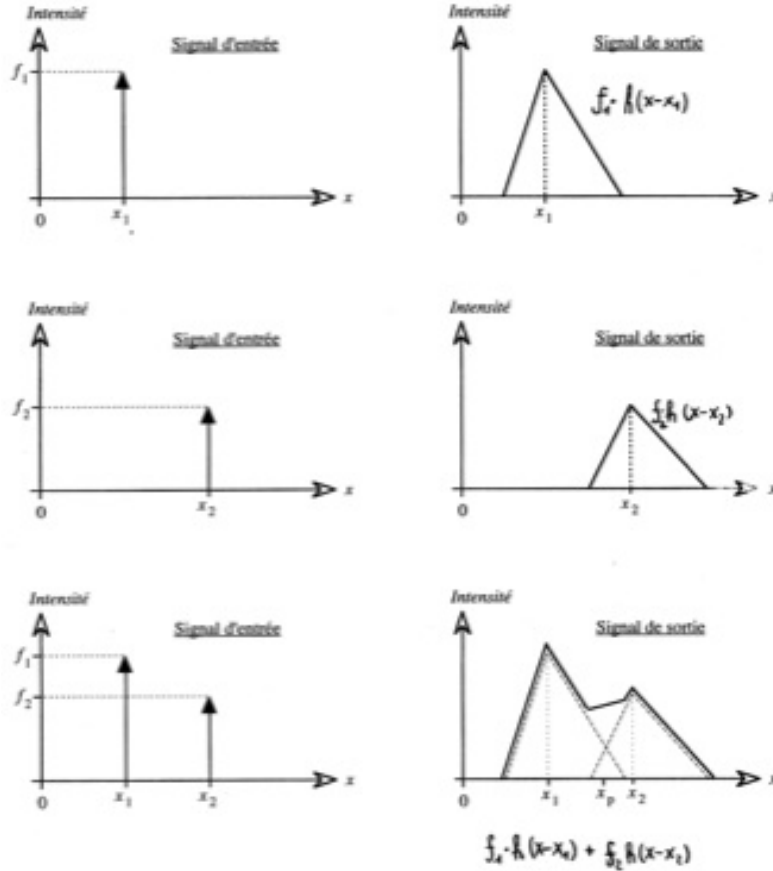
Exemple introductif : Le photocopieur

Considérons une machine photocopieuse imparfaitement réglée : un trait fin en position x_1 donne sur la photocopie un trait étalé, centré en x_1 . De même un trait d'une intensité moindre situé en x_2 donnera sur la photocopie un trait étalé, centré en x_2 . On admet que l'étalement de l'encre sur la photocopie est identique pour les deux traits. Cet étalement est donc une fonction caractéristique de l'appareil que nous appelons fonction d'étalement (ou fonction de réponse) et que nous noterons $h(x)$.



Pour un trait placé en x_1 et d'intensité f_1 , la photocopie donne donc $f_1 h(x - x_1)$. Si n traits placés en x_1, \dots, x_n et d'intensité respectives f_1, \dots, f_n sont présents sur l'original, la photocopie sera constituée de la superposition des n traits étalés. Le signal de sortie $S(x)$ sera donc

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i h(x - x_i).$$



Maintenant si le signal d'entrée est une fonction continue de x (à la place d'une fonction discrète), on remplace la somme par une intégrale et on obtient :

$$S(x) = \int f(u) h(x - u) du,$$

ce qui sera défini comme le produit de convolution des fonctions f et h .

2.1 Produit tensoriel

2.1.1 De deux fonctions

Définition 2.1.1. Soient f et g deux fonctions. On appelle produit tensoriel (ou produit direct) de f par g la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = f(x)g(y)$ pour tout (x, y) appartenant à \mathbb{R}^2 . On note alors $h = f \otimes g$.

Exemple : Produit tensoriel de la fonction H de Heaviside par la fonction « porte » Π donnée par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$(H \otimes \Pi)(x, y) = H(x) \Pi(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1.2 De deux distributions

Cherchons maintenant à définir un produit tensoriel de deux distributions. Soient f et g deux fonctions localement sommables et soit h leur produit tensoriel. On a alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support borné sur \mathbb{R}^2) :

$$\begin{aligned} \langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle &= \int \int f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy \\ &= \int f(x) \left(\int g(y) \varphi(x, y) dy \right) dx \\ &= \langle T_f(x), \langle T_g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle . \end{aligned}$$

Définition 2.1.2. Soient S et T deux distributions sur \mathbb{R} . On appelle produit tensoriel (ou produit direct) de S par T la distribution notée $S \otimes T$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par

$$\langle S(x) \otimes T(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

Il n'est pas du tout évident de montrer que ce produit est bien défini. En particulier, on doit vérifier que la fonction $x \mapsto \langle T(y), \varphi(x, y) \rangle$ appartient bien à l'espace \mathcal{D} et que la fonctionnelle ainsi défini est linéaire et continue.

Exemple : Produit tensoriel des distributions δ et W : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \delta(x) \otimes W(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle \delta(x), \langle W(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle \delta(x), \int_0^{+\infty} \varphi(x, y) dy \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(0, y) dy .$$

Lemme 2.1.1. Le produit tensoriel de deux distributions est commutatif, continu, associatif. De plus si S et T sont deux distributions sur \mathbb{R} , alors

$$\partial_x^i (S(x) \otimes T(y)) = (\partial_x^i S(x)) \otimes T(y), \quad \partial_y^i (S(x) \otimes T(y)) = S(x) \otimes (\partial_y^i T(y)),$$

où ∂_x (resp. ∂_y) désigne la dérivée partielle par rapport à x (resp. y) et $i \in \mathbb{N}$.

2.2 Produit de convolution

2.2.1 Convolution de deux fonctions

Définition 2.2.1. Soient f et g deux fonctions localement sommables. On définit, s'il existe, le produit de convolution h de f et g par

$$h(x) = \int f(t) g(x - t) dt,$$

pour tout x appartenant à \mathbb{R} . On note alors $h = f * g$.

Remarque : Ce produit de convolution n'existe pas toujours. Ce produit est commutatif dès lors qu'il est défini.

Donnons une interprétation graphique de ce produit de convolution. Soit k le produit tensoriel de f par g ; $k = f \otimes g$. On a alors

$$(f * g)(x) = \int f(t) g(x - t) dt = \int k(t, x - t) dt,$$

c'est-à-dire qu'on intègre la fonction k sur le chemin formé par la droite D_x de pente -1 et passant par $(0, x)$.

Exemple : Posons $f(x) = \Pi(x)$ et $g(x) = \Pi(x - \frac{1}{2})$. Notons $k = f \otimes g$ et $h = f * g$. La valeur $h(x)$ est donnée par l'intégrale de k sur la droite D_x .

Si la droite D_x rencontre le support de $f \otimes g$ de manière finie, le produit de convolution est alors bien défini.

Théorème 2.2.1. *Le produit de convolution de deux fonctions localement sommables f et g existe dès lors que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné,*
2. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à gauche,*
3. *Les fonctions f et g sont toutes les deux à support borné à droite.*

2.2.2 Notion de mesure floue

Soit Π la fonction porte. Soit $a > 0$ et f une fonction. Notons $f_{(a)}$ le produit de convolution de f et de la fonction porte de largeur a et de hauteur $1/a$. On a

$$f_{(a)}(x) = f(x) * \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(t) dt.$$

Ceci représente la moyenne de f autour de x sur une largeur a . On peut ainsi modéliser une mesure imparfaite de la fonction f , pour laquelle on a un "flou" de largeur a . Les détails de largeur $l \ll a$ disparaissent, les autres restent visibles.

2.2.3 Convolution de deux distributions

On cherche à étendre le produit de convolution de deux fonctions aux distributions. Soient f et g deux fonctions localement sommables et soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a

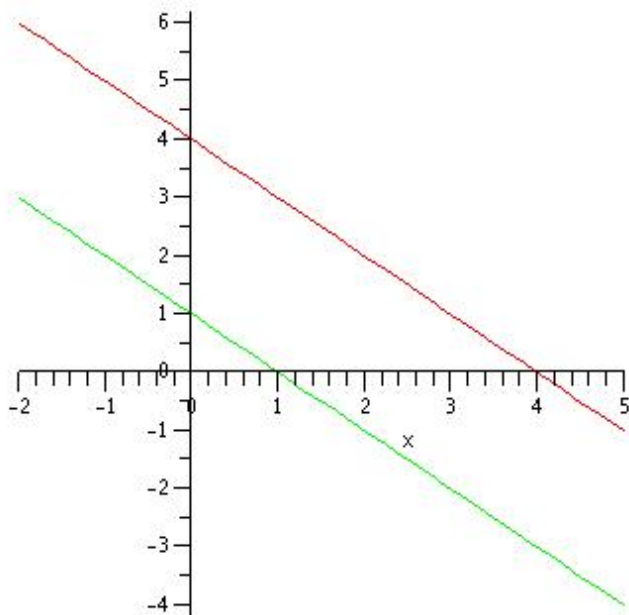
$$\begin{aligned} \langle T_{f*g}, \varphi \rangle &= \int (f * g)(t) \varphi(t) dt \\ &= \int \varphi(t) \left(\int f(s) g(t - s) ds \right) dt \\ &= \int \int f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy \\ &= \langle T_{f \otimes g}, \varphi(x + y) \rangle \end{aligned}$$

Définition 2.2.2. Soient S et T deux distributions. On définit le produit de convolution de S et T comme la distribution notée $S * T$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \varphi(x + y) \rangle .$$

Le produit de convolution de deux distributions appliqué à une fonction test φ de \mathcal{D} est donc égal au produit tensoriel des deux distributions appliqué à $\varphi(x + y)$.

Le produit de convolution de deux distributions n'existe pas toujours. En effet, si la fonction φ a pour support le segment $[a, b]$, alors le support de $\varphi(x + y)$ est la bande comprise entre les deux droites $x + y = a$ et $x + y = b$.



Puisque $\varphi(x + y)$ n'est pas à support compact, il suffit que l'une des deux distributions soit à support compact.

D'une manière générale, on a le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. 1. Les distributions à support borné à gauche (resp. à droite) peuvent toujours être convoluées entre elles.

2. Une distribution à support borné peut être convoluée avec n'importe quelle autre distribution.

2.2.4 Propriétés du produit de convolution de deux distributions

Commutativité et Associativité

1. Soient S et T deux distributions. On suppose que leur produit de convolution $S * T$ existe. Alors $T * S$ existe et $S * T = T * S$.
2. Soient S , T et U trois distributions. Si $S * T$, $T * U$ et $S * U$ existent, alors le produit de convolution $S * T * U$ a un sens et il est défini par

$$S * T * U = S * (T * U) = (S * T) * U.$$

Exemple : il se peut que les deux derniers termes de l'égalité ci-dessus existent mais ne soient pas égaux ! Par exemple $(T_{\mathbb{1}} * \delta') * W \neq T_{\mathbb{1}} * (\delta' * W)$ bien que les deux distributions sont bien définies. On peut vérifier que $T_{\mathbb{1}} * \delta' = 0$. En effet, $T_{\mathbb{1}} * \delta' = T'_{\mathbb{1}}$ et

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T'_{\mathbb{1}}, \varphi \rangle = - \langle T_{\mathbb{1}}, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

et donc $(T_{\mathbb{1}} * \delta') * W = 0$. Or, d'un autre côté, on a $\delta' * W = \delta$ donc $T_{\mathbb{1}} * (\delta' * W) = T_{\mathbb{1}}$. Ceci s'explique par le fait que $T_{\mathbb{1}} * W$ n'est pas définie. Dans ce cas le produit de convolution $T_{\mathbb{1}} * \delta' * W$ n'est donc pas défini.

Convolution et Dirac

1. Soit T une distribution. On a $\delta * T = T * \delta = T$. La distribution de Dirac est donc l'élément neutre du produit de convolution.
2. Soit $a > 0$. La translatée T_a d'une distribution T est égale au produit de convolution de T par la distribution de Dirac δ_a au point a : $T_a = T * \delta_a = \delta_a * T$.
3. Les dérivations d'une distribution T s'obtiennent par convolution par les dérivées des distributions de Dirac : pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T^{(m)} = \delta^{(m)} * T = T * \delta^{(m)}$.

Dérivée d'un produit de convolution

D'après le point 3. ci-dessus, on a $(S * T)' = \delta' * (S * T) = \delta' * S * T = S' * T$. De même $(S * T)' = (S * T) * \delta' = S * T * \delta' = S * T'$. On obtient donc le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des facteurs, i.e., pour tout S et T dans \mathcal{D}' , on a :*

$$(S * T)' = S' * T = S * T'.$$

2.3 Algèbre de convolution et résolution d'équations différentielles

2.3.1 Définition

Définition 2.3.1. On appelle algèbre de convolution \mathcal{A}' tout sous-espace vectoriel de \mathcal{D}' contenant δ tel que le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions de \mathcal{A}' soit toujours défini, soit dans \mathcal{A}' , et que ce produit soit commutatif et associatif.

Remarquons tout d'abord que \mathcal{D}' n'est pas une algèbre de convolution (voir l'exemple de la page précédente sur l'associativité du produit de convolution des distributions).

Proposition 2.3.1. Les espaces \mathcal{D}'_+ (resp. \mathcal{D}'_-) des distributions à support dans \mathbb{R}_+ (resp. \mathbb{R}_-) et \mathcal{E}' des distributions à support compact sont des algèbres de convolution.

2.3.2 Calcul algébrique

Étant donnée une algèbre de convolution \mathcal{A}' , une *équation de convolution* est une équation de la forme

$$A * X = B, \quad (2.1)$$

où A et B sont des distributions de \mathcal{A}' connues et X une distribution inconnue que l'on cherche aussi dans \mathcal{A}' .

Pour résoudre une telle équation (*i.e.*, trouver $X \in \mathcal{A}'$ satisfaisant (2.1)), on est amené à chercher s'il existe, dans l'algèbre de convolution considérée \mathcal{A}' , une distribution notée A^{*-1} et appelée *inverse de convolution de A* (ou parfois *fonction de Green de A*) vérifiant

$$A * A^{*-1} = A^{*-1} * A = \delta.$$

Plus précisément, on a le résultat suivant sur l'existence et l'unicité des solutions de (2.1) :

Proposition 2.3.2. Étant donnée une distribution $A \in \mathcal{A}'$, l'équation de convolution (2.1) possède une solution quel que soit le second membre $B \in \mathcal{A}'$ si et seulement si A admet un inverse de convolution dans l'algèbre \mathcal{A}' . Dans ce cas, l'inverse de convolution A^{*-1} est unique et (2.1) admet une unique solution dans \mathcal{A}' donnée par

$$X = A^{*-1} * B.$$

Le problème du calcul de l'inverse de convolution d'une distribution est en général difficile. Cependant, nous avons le résultat suivant très utile en pratique :

Proposition 2.3.3. Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants, unitaire et d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ en une variable, *i.e.*,

$$D = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0.$$

Alors la distribution

$$D \delta = \delta^{(m)} + a_{m-1} \delta^{(m-1)} + \dots + a_1 \delta' + a_0 \delta \in \mathcal{D}'_+,$$

admet un inverse de convolution dans \mathcal{D}'_+ qui est donné par

$$(D \delta)^{* -1} = W z(t),$$

où z est l'unique fonction solution de l'équation différentielle

$$z(t)^{(m)} + a_{m-1} z(t)^{(m-1)} + \dots + a_1 z(t)' + a_0 z(t) = 0,$$

vérifiant les conditions initiales

$$z(0) = z'(0) = \dots = z^{(m-2)}(0) = 0, \quad z^{(m-1)}(0) = 1.$$

Démonstration. faire le calcul du produit de convolution $D \delta * W z(t)$. □

Exemple : L'oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est caractérisé par une équation de convolution du type

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * X(t) = B(t),$$

où $B(t)$ est une distribution caractérisant le signal extérieur. On peut montrer (appliquer la proposition 2.3.3 - voir TD 2) que

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * \frac{1}{\omega} W \sin(\omega t) = \delta.$$

Or la distribution $\frac{1}{\omega} W \sin(\omega t)$ appartient à \mathcal{D}'_+ donc pour tout $B \in \mathcal{D}'_+$, l'équation admet l'unique solution

$$X(t) = \frac{1}{\omega} W \sin(\omega t) * B \in \mathcal{D}'_+.$$

On montre aussi que

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * -\frac{1}{\omega} W(-t) \sin(\omega t) = \delta,$$

avec $-\frac{1}{\omega} W(-t) \sin(\omega t) \in \mathcal{D}'_-$ donc si $B \in \mathcal{D}'_-$, l'équation admet l'unique solution

$$X(t) = -\frac{1}{\omega} W(-t) \sin(\omega t) * B \in \mathcal{D}'_-.$$

On voit donc que l'inverse de convolution et donc la solution de l'équation dépend de l'algèbre de convolution dans laquelle on travaille. Ici l'équation n'admettra pas de solutions dans \mathcal{E}' .

2.3.3 Résolution d'une équation différentielle avec conditions initiales

Un *problème de Cauchy* est la donnée d'une équation différentielle avec des conditions initiales. Par exemple pour le premier ordre, on considère une équation différentielle

$$\dot{u} + \alpha u = 0, \quad (2.2)$$

et on cherche une solution $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(0) = u_0$. Il est possible d'utiliser les distributions pour résoudre ce genre d'équation en cherchant non plus une fonction solution mais une distribution solution de la forme $U = W u$ où u est une fonction indéfiniment dérivable. Si u est solution (2.2), alors $\dot{U} = W \dot{u} + u_0 \delta$ et donc U vérifie l'équation différentielle $\dot{U} + \alpha U = u_0 \delta^1$ qui se réécrit sous la forme d'une équation de convolution dans \mathcal{D}'_+ :

$$(\delta' + \alpha \delta) * U = u_0 \delta.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver dans \mathcal{D}'_+ l'inverse de convolution de $\delta' + \alpha \delta$. D'après la proposition 2.3.3, on peut vérifier que ce dernier est donné par $W \exp(-\alpha t)$. D'où la solution

$$U = W \exp(-\alpha t) * u_0 \delta = W u_0 \exp(-\alpha t) \in \mathcal{D}'_+,$$

et finalement $u(t) = u_0 \exp(-\alpha t)$.

Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur (ou équation de diffusion) à une dimension est donnée par

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0,$$

où $u(x, t)$ représente par exemple la température d'une barre au point x et au temps t . On cherche une solution correspondant à une répartition initiale de température $u(x, 0)$ donnée. On cherche donc une distribution $U(x, t) = W(t) u(x, t)$ solution où u est une fonction solution de l'équation différentielle. La dérivation au sens des distributions conduit à

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U(x, t) = u(x, 0) \delta(t).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t}(W(t) u(x, t)) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(W(t) u(x, t)) \\ &= \delta(t) u(x, t) + W(t) \frac{\partial}{\partial t}(u(x, t)) - \alpha W(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x, t)) \\ &= \delta(t) u(x, 0) + W(t) \left(\frac{\partial}{\partial t}(u(x, t)) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x, t)) \right) \\ &= \delta(t) u(x, 0). \end{aligned}$$

¹ $\dot{U} + \alpha U = W \dot{u} + u_0 \delta + \alpha (W u) = W (\dot{u} + \alpha u) + u_0 \delta = u_0 \delta.$

En écrivant cette équation comme une équation de convolution, on obtient alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \delta(x, t) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x, t) \right) * U(x, t) = u(x, 0) \delta(t).$$

On peut alors vérifier qu'en se plaçant dans une algèbre de convolution convenable, la fonction de Green (l'inverse de convolution) de $\frac{\partial}{\partial t} \delta(x, t) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x, t)$ est donnée par

$$\frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right),$$

de sorte que la solution cherchée s'écrit finalement

$$U(x, t) = u(x, 0) \delta(t) * \frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right),$$

ou encore

$$U(x, t) = \frac{W(t)}{2\sqrt{\alpha\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right) d\xi.$$

2.4 Interprétation physique de la convolution

2.4.1 Systèmes décrits par un opérateur de convolution

Nous allons maintenant voir que beaucoup de systèmes physiques (*e.g.*, systèmes de mesures) peuvent être représentés par des opérateurs de convolution.

Définition 2.4.1. Soit (S) un système physique décrit par un opérateur qui à un signal d'entrée $E(t)$ (ou excitation) fait correspondre un signal de sortie (ou réponse) $S(t)$. Soit R l'opérateur tel que $S(t) = R(E(t))$. Le système est dit linéaire si R est linéaire. Il est dit continu si R est continu c'est-à-dire si des excitations peu différentes conduisent à des réponses peu différentes. Un système est dit invariant par translation si l'opérateur R commute avec la translation c'est-à-dire si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E(t) & \longrightarrow & S(t) = R(E(t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(t-a) & \longrightarrow & S(t-a) = R(E(t-a)) \end{array}$$

La plupart des systèmes physiques sont invariants par translation dans le temps c'est-à-dire que si l'on retarde l'entrée de τ , alors la sortie est aussi retardée de τ .

Définition 2.4.2. On dit qu'un système physique est décrit par un opérateur de convolution s'il existe une distribution T caractéristique du système telle que $R(E(t)) = E(t) * T(t)$.

Définition 2.4.3. La distribution T telle que $R(E(t)) = E(t) * T(t)$ est appelée réponse impulsionnelle ou percussionnelle car elle correspond à la réponse d'une excitation élémentaire $E = \delta$.

Théorème 2.4.1. *Un système physique peut être décrit par un opérateur de convolution si et seulement si il est linéaire, continu et invariant par translation.*

Exemples : Les filtres linéaires en électronique (systèmes formés de résistances, selfs, capacités, amplificateurs sans saturation). Les systèmes formés de masses, de ressorts et d'amortisseurs en mécanique.

2.4.2 Système causal

Définition 2.4.4. *Un système décrit par un opérateur de distribution temporel (c'est-à-dire à une variable qui représente le temps) est dit causal si sa réponse impulsionnelle $T(t)$ est nulle pour $t < 0$ (c'est-à-dire que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ dès que φ est nulle pour $t \geq 0$).*

Dans le cas d'un système causal, l'effet d'un signal ne peut précéder sa cause c'est-à-dire que la réponse $S(\tau)$ d'un tel système à un temps τ ne dépend que des valeurs du signal $E(t)$ pour $t \leq \tau$.

2.4.3 Réponse à une excitation exponentielle

Théorème et Définition 2.4.1 (Régularisation d'une distribution singulière). *Soit Ψ une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution. On note $\Psi * T$ l'application*

$$\Psi * T : x \mapsto \langle T(t), \Psi(x - t) \rangle .$$

*Cette application est indéfiniment dérivable et vérifie $T_\Psi * T = T_{\Psi * T}$. On l'appelle la régularisée de T par Ψ .*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \langle T_\Psi * T, \varphi \rangle &= \langle T(t) \otimes T_\psi(x), \varphi(x + t) \rangle \\ &= \langle T(t), \langle T_\Psi(x), \varphi(x + t) \rangle \rangle \\ &= \langle T(t), \int \Psi(x) \varphi(x + t) dx \rangle \\ &= \langle T(t), \int \Psi(x - t) \varphi(x) dx \rangle \\ &= \langle T(t), \langle T_\varphi(x), \Psi(x - t) \rangle \rangle \\ &= \langle T(t) \otimes T_\varphi(x), \Psi(x - t) \rangle \\ &= \langle T_\varphi(x), \langle T(t), \Psi(x - t) \rangle \rangle \\ &= \int \varphi(x) \langle T(t), \Psi(x - t) \rangle dx \\ &= \langle T_{\Psi * T}, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

□

La réponse impulsionnelle d'un système décrit par un opérateur de convolution joue un rôle important. Un autre type de réponse joue un rôle important : celle aux signaux exponentiels. Considérons donc un système décrit par un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle T c'est-à-dire

$$S = E * T,$$

et examinons la réponse à un signal

$$E(t) = \exp(2i\pi\nu t),$$

correspondant à une oscillation harmonique de fréquence ν . La réponse sera alors

$$S = T * \exp(2i\pi\nu t),$$

et comme la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable, il vient

$$S(t) = \langle T(\tau), \exp(2i\pi\nu(t-\tau)) \rangle = \langle T(\tau), \exp(-2i\pi\nu\tau) \rangle \exp(2i\pi\nu t).$$

En posant $\hat{T}(\nu) = \langle T(\tau), \exp(-2i\pi\nu\tau) \rangle$, on obtient

$$S(t) = \hat{T}(\nu) \exp(2i\pi\nu t).$$

La fonction $\hat{T}(\nu)$ s'appelle la *transformée de Fourier* de la distribution T . Le système transforme donc l'excitation $\exp(2i\pi\nu t)$ en $\hat{T}(\nu) \exp(2i\pi\nu t)$.

Plus généralement la réponse à une excitation $E(t) = \exp(pt)$ où p est un scalaire complexe quelconque est

$$S(t) = \langle T(\tau), \exp(-p\tau) \rangle \exp(pt).$$

La fonction de p donnée par $\langle T(\tau), \exp(-p\tau) \rangle$ est appelée *transformée de Laplace* de la distribution T .

Théorème 2.4.2. *Les fonctions exponentielles sont des fonctions propres pour les opérateurs de convolution. Les valeurs propres correspondantes sont données par les transformées de Fourier (ou de Laplace) de la réponse impulsionnelle.*

On voit ici le rôle important que jouent les transformées de Fourier et de Laplace que l'on va étudier dans les chapitres suivants. Un moyen de calculer $T * E$ sera de décomposer E en combinaison linéaires de fonctions propres

$$E(t) = \int \hat{E}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu.$$

On verra que $\hat{E}(\nu)$ est justement la transformée de Fourier de E . En effet, par linéarité, la réponse $S(t)$ sera alors donnée par

$$S(t) = \int \hat{E}(\nu) \hat{T}(\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu.$$

La transformée de Fourier $\hat{T}(\nu)$ est appelée *fonction de transfert* du système.

Chapitre 3

La Transformation de Fourier

3.1 Transformée de Fourier des fonctions

3.1.1 Définition et existence

Définition 3.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes. On appelle transformée de Fourier (ou spectre) de f , si elle existe, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx.$$

On écrira symboliquement

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f] \quad \text{ou} \quad \hat{f}(\nu) = \mathcal{F}[f(x)].$$

L'intégrale et donc la transformée de Fourier n'existe pas toujours, par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ n'admet pas de transformée de Fourier car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-2i\pi\nu x) dx$$

n'existe pour aucune valeur de ν .

Si des conditions d'existence de la transformée de Fourier d'une fonction sont difficiles à écrire, on a en revanche la condition suffisante suivante :

Théorème 3.1.1. Toute fonction intégrable (au sens de Lebesgue) possède une transformée de Fourier qui est une fonction continue, bornée et tendant vers 0 lorsque $|\nu|$ tend vers l'infini.

Exemples :

1. $\mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ ($= 1$ si $\nu = 0$);
2. $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi\nu^2)$;
3. $\mathcal{F}[\exp(-a|x|)] = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$.

3.1.2 Inversion

Soit f une fonction intégrable admettant une transformée de Fourier \hat{f} elle-même intégrable. Alors, en tout point x où f est continue, on a :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \exp(2i\pi\nu x) d\nu.$$

Cette transformation est appelée *transformée de Fourier inverse*. On écrira symboliquement $f(x) = \mathcal{F}[\hat{f}(\nu)] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\nu)]$ si f est continue en x et de manière générale, si f est continue : $f = \mathcal{F}[\hat{f}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$.

Si f est continue par morceaux, on peut donc obtenir $f(x)$ à partir de $\hat{f}(\nu)$ presque partout. Si f n'est pas continue en x , on a plus généralement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) \exp(2i\pi\nu x) d\nu = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)).$$

3.1.3 Transformée de Fourier en sinus et cosinus

Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Il est connu que f peut se décomposer en somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire q :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + q(x),$$

avec

$$p(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)), \quad q(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)).$$

On a alors

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p(x) + q(x)) (\cos(2\pi\nu x) - i \sin(2\pi\nu x)) dx,$$

d'où

$$\hat{f}(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} p(x) \cos(2\pi\nu x) dx - 2i \int_0^{+\infty} q(x) \sin(2\pi\nu x) dx.$$

On écrit alors

$$\mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}_{\cos}[p(x)] - i \mathcal{F}_{\sin}[q(x)],$$

où \mathcal{F}_{\cos} et \mathcal{F}_{\sin} sont les *transformées de Fourier* respectivement *en cosinus et sinus* définies par :

$$\mathcal{F}_{\cos}[f(x)] = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\nu x) dx, \quad \mathcal{F}_{\sin}[f(x)] = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi\nu x) dx.$$

Lorsque la fonction f est à valeurs complexes, il faut décomposer p et q en parties réelles et imaginaires. On obtient alors la correspondance :

$$\begin{array}{rcccccccc}
 f(x) & = & \text{partie réelle paire} & + & \text{imag. paire} & + & \text{réelle imp.} & + & \text{imag. imp.} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \searrow \swarrow \\
 \hat{f}(\nu) & = & \text{partie réelle paire} & + & \text{imag. paire} & + & \text{réelle imp.} & + & \text{imag. imp.}
 \end{array}$$

Finalement, on a

$f(x)$	\longrightarrow	$\hat{f}(\nu)$
paire	\longrightarrow	paire
impaire	\longrightarrow	impaire
réelle	\longrightarrow	hermitienne ($\hat{f}(\nu) = \overline{\hat{f}(-\nu)}$)
imaginaire	\longrightarrow	antihermitienne ($\hat{f}(\nu) = -\overline{\hat{f}(-\nu)}$)
réelle paire	\longrightarrow	réelle paire
réelle impaire	\longrightarrow	imaginaire impaire
imaginaire paire	\longrightarrow	imaginaire paire
imaginaire impaire	\longrightarrow	réelle impaire

3.1.4 Propriétés

Linéarité :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)] &= \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \lambda \int f(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx + \mu \int g(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \lambda \mathcal{F}[f(x)] + \mu \mathcal{F}[g(x)]
 \end{aligned}$$

Transposition :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(-x)] &= \int f(-x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \int f(y) \exp(2i\pi\nu y) dy \\
 &= \hat{f}(-\nu)
 \end{aligned}$$

Conjugaison :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\overline{f(x)}] &= \int \overline{f(x)} \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \overline{\int f(x) \exp(2i\pi\nu x) dx} \\
 &= \hat{f}(-\nu)
 \end{aligned}$$

Changement d'échelle :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(ax)] &= \int f(ax) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \int f(y) \exp\left(\frac{-2i\pi\nu y}{a}\right) \frac{1}{|a|} dy \\
 &= \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, une dilatation dans le monde réel entraîne une compression dans le monde de Fourier et inversement.

Translation :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x-a)] &= \int f(x-a) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \int f(y) \exp(-2i\pi\nu(y+a)) dy \\
 &= \exp(-2i\pi\nu a) \int f(y) \exp(-2i\pi\nu y) dy \\
 &= \exp(-2i\pi\nu a) \hat{f}(\nu).
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, une translation dans le monde réel correspond à un déphasage (proportionnel à la fréquence ν) dans le monde de Fourier.

Modulation :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[\exp(2i\pi\nu_0 x) f(x)] &= \int \exp(2i\pi\nu_0 x) f(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \int f(x) \exp(-2i\pi(\nu - \nu_0) x) dx \\
 &= \hat{f}(\nu - \nu_0).
 \end{aligned}$$

Moduler la fonction f par une exponentielle imaginaire revient à traduire sa transformée de Fourier.

3.1.5 Dérivation

Par rapport à x :

Supposons f sommable, dérivable et à dérivée sommable. Par intégration par partie, il vient alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f'(x)] &= \int f'(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= [f(x) \exp(-2i\pi\nu x)]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\nu \int f(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= 2i\pi\nu \hat{f}(\nu).
 \end{aligned}$$

Plus généralement, on obtient

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (2i\pi\nu)^m \hat{f}(\nu).$$

De cette formule on tire (en prenant les modules)

$$|2\pi\nu|^m |\hat{f}(\nu)| \leq \int |f^{(m)}(x)| dx,$$

et on conclut que plus f est dérivable, à dérivées sommables, plus \hat{f} décroît rapidement à l'infini. En effet, si f est m fois dérivable et à dérivée m -ième sommable, \hat{f} décroît au moins en $1/\nu^m$.

Par rapport à ν :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \nu} \hat{f}(\nu) &= \int f(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \int (-2i\pi x) f(x) \exp(-2i\pi\nu x) dx \\
 &= \mathcal{F}[(-2i\pi x) f(x)].
 \end{aligned}$$

De manière générale, on obtient

$$\hat{f}^{(m)}(\nu) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)].$$

Ce résultat conduit aussi à une majoration

$$|\hat{f}^{(m)}(\nu)| \leq \int |2\pi x|^m |f(x)| dx.$$

et donc : plus f décroît à l'infini, plus \hat{f} est dérivable (avec ses dérivées bornées). En effet, si f décroît en $1/x^m$ à l'infini, alors, \hat{f} est m fois dérivable (car $|2\pi x|^m |f(x)|$ est alors sommable) et sa dérivée m -ième est bornée.

3.1.6 Transformée de Fourier et convolution

Supposons f et g sommables telles que $f * g$ existe. On a alors

$$\mathcal{F}[f * g] = \int \exp(-2i\pi\nu x) \int f(t) g(x-t) dx dt.$$

Le théorème de Fubini donne alors

$$\mathcal{F}[f * g] = \int f(t) dt \int g(x-t) \exp(-2i\pi\nu x) dx,$$

et après le changement de variable $y = x - t$ dans la seconde intégrale, il vient

$$\mathcal{F}[f * g] = \int f(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt \int g(y) \exp(-2i\pi\nu y) dy,$$

d'où

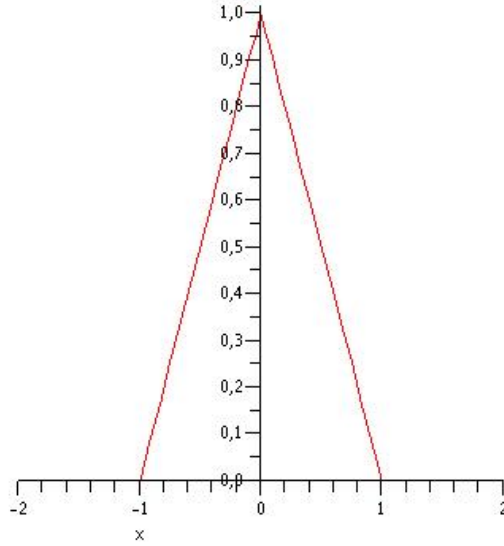
$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g].$$

Théorème 3.1.2. *La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est le produit ordinaire des transformées de Fourier des deux fonctions.*

Exemple : On se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ définie par :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1, \end{cases}$$

ayant le graphe suivant :



On commence par montrer que $\Lambda(x) = (\Pi * \Pi)(x)$ et on en déduit que

$$\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \mathcal{F}[\Pi(x)]^2 = \left(\frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \right)^2.$$

Inversement, on montre que l'on a le résultat suivant :

Théorème 3.1.3. *Lorsque ces expressions sont définies, on a*

$$\mathcal{F}[f g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g].$$

3.1.7 Formule de Parseval-Plancherel

La relation suivante a été établie par Parseval et généralisée par Plancherel aux transformées de Fourier :

Théorème 3.1.4. *Soient f et g deux fonctions de carré sommable. On a alors :*

$$\int f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu.$$

Un cas particulier important est le cas $f = g$ c'est-à-dire

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu.$$

Démonstration. On a

$$\int f(x) \overline{g(x)} dx = \mathcal{F}[f \bar{g}]|_{\nu=0} = [\hat{f}(\nu) * \overline{\hat{g}(-\nu)}]|_{\nu=0} = \left[\int \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t - \nu)} dt \right]_{\nu=0} = \int \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} dt.$$

□

En physique, si f est une onde ou une vibration et si la variable x est temporelle ($x = t$), alors $\int |f(x)|^2 dx$ peut représenter la puissance (ou l'énergie) totale dans le domaine temporel et $\int |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$ représente la puissance totale dans le domaine fréquentiel.

Remarque : Transformée de Fourier des fonctions de carré sommable

Il existe des fonctions non intégrables mais dont le carré l'est (par exemple la fonction sinus cardinal $x \mapsto \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0 par $\text{sinc}(0) = 1$). De telles fonctions apparaissent fréquemment en physique (fonction d'onde d'une particule en mécanique quantique, en électricité ou traitement du signal où $\int |f(t)|^2 dt$ représente l'énergie totale d'un signal temporel $t \mapsto f(t)$). Il existe un moyen (que nous ne traiterons pas ici) d'étendre la transformée de Fourier aux fonctions non sommables mais de carré sommable.

3.2 Transformée de Fourier des distributions

Nous allons maintenant définir une notion de transformée de Fourier pour les distributions. L'intérêt est de :

1. Pouvoir définir la transformée de Fourier des distributions comme $\delta, \text{III}, \dots$,
2. Espérer pouvoir étendre la transformée de Fourier des fonctions sommables (et de carré sommable) à des fonctions intervenant tout le temps en physique et n'étant ni sommables ni de carré sommable comme H .

3.2.1 Définition

Comme d'habitude on va tout d'abord essayer de définir la transformée de Fourier pour les distributions régulières. Soit donc f une fonction intégrable qui définit une distribution régulière T_f et intéressons nous à la distribution régulière associée à \hat{f} : on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int \hat{f}(t) \varphi(t) dt = \int \left(\int f(x) \exp(-2i\pi x t) dx \right) \varphi(t) dt,$$

et en utilisant le théorème de Fubini pour intervertir les deux intégrales :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int f(x) \left(\int \exp(-2i\pi x t) \varphi(t) dt \right) dx = \int f(x) \hat{\varphi}(x) dx = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle.$$

Le problème ici est que si φ appartient à \mathcal{D} , il n'y a aucune raison pour que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartienne à \mathcal{D} et donc $\langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$ n'a en général pas de sens. Pour obtenir une définition satisfaisante de la transformée de Fourier des distributions, on doit donc se placer sur un espace plus grand que \mathcal{D} .

3.2.2 Espace \mathcal{S} et transformée de Fourier

Définition 3.2.1. Une fonction est dite à décroissance rapide si pour tout k dans \mathbb{N} , $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^k f(x)| = 0$. Une telle fonction décroît plus vite que toutes puissance de $1/|x|$ à l'infini. On note \mathcal{S} l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Intéressons nous maintenant à la transformée de Fourier de telles fonctions. Soit φ une fonction de \mathcal{S} . On a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \hat{\varphi}^{(m)}(\nu) = \int (-2i\pi x)^m \exp(-2i\pi \nu x) \varphi(x) dx,$$

et on en déduit que $\hat{\varphi}$ ainsi que toutes ses dérivées sont aussi à décroissances rapides (voir aussi le paragraphe 3.1.5). D'une manière générale, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. La transformation de Fourier est une application linéaire (et continue) de \mathcal{S} dans \mathcal{S} .

3.2.3 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 3.2.2. On appelle distribution tempérée toute fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace de fonctions \mathcal{S} . Les distributions tempérées forment un sous-espace de \mathcal{D}' noté \mathcal{S}' .

Dans la pratique, la plupart des distributions sont tempérées (δ_a , $\text{vp} \frac{1}{x}$). Cependant, en général, si f est une fonction localement sommable, alors T_f n'est pas tempérée.

Théorème 3.2.2 (Caractérisation des distributions tempérées). Pour qu'une fonctionnelle linéaire continue T sur \mathcal{S} soit tempérée, il faut et il suffit qu'il existe $A > 0$ et $p \in \mathbb{N}^+$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on ait :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq A \|\varphi\|_p,$$

où

$$\|\varphi\|_p = \left(\int |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Proposition 3.2.1. L'ensemble des distributions tempérées contient toutes les distributions à support bornée comme les Dirac, les dérivées des Dirac et les distributions régulières associées aux fonctions à croissance lente comme les polynômes, les fonctions périodiques localement sommables.

Exemple : la distribution régulière T_{exp} n'est pas tempérée puisque la fonction exponentielle croît trop rapidement à l'infini.

Théorème et Définition 3.2.1. Toute distribution tempérée T admet une transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}[T]$ ou \hat{T} , qui est également une distribution tempérée. Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

Exemples :

- $\mathcal{F}[T_{\mathbb{1}}] = \delta.$

$$\langle \hat{T}_{\mathbb{1}}, \varphi \rangle = \langle T_{\mathbb{1}}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\nu) d\nu = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

(cf. formule de la transformée de Fourier inverse)

- $\mathcal{F}[\delta] = T_{\mathbb{1}}.$

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \langle T_{\mathbb{1}}, \varphi \rangle,$$

- $\mathcal{F}[T_{\exp(2i\pi\nu_0 x)}] = \delta(\nu - \nu_0),$

- $\mathcal{F}[T_{\cos(2\pi\nu_0 x)}] = \frac{1}{2} (\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)),$

- $\mathcal{F}[T_{\sin(2\pi\nu_0 x)}] = \frac{1}{2i} (\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)).$

3.2.4 Propriétés

On peut définir une transformée de Fourier inverse comme pour les fonctions : on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \langle T, \varphi \rangle .$$

On peut montrer, de la même façon que pour la transformée de Fourier des fonctions, que l'on a les propriétés suivantes :

Théorème 3.2.3. *Soit T une distribution tempérée. On a alors :*

- $\mathcal{F}[T^{(m)}] = (2i\pi\nu)^m \mathcal{F}[T];$

- $\mathcal{F}[T(x - a)] = \exp(-2i\pi\nu a) \mathcal{F}[T];$

- $\mathcal{F}[T(ax)] = \frac{1}{|a|} \hat{T}\left(\frac{\nu}{a}\right);$

- $\mathcal{F}[\exp(2i\pi a x) T] = \hat{T}(\nu - a).$

Théorème 3.2.4. *Si T est une distribution tempérée à support borné, alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}[T]$ est une distribution régulière associée à une fonction indéfiniment dérivable.*

3.2.5 Transformée de Fourier de la distribution peigne de Dirac

On rappelle que la distribution peigne de Dirac notée III est égale à $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)$. Le théorème suivant n'est pas du tout évident à démontrer mais est très important pour les applications comme, par exemple, l'échantillonnage.

Théorème 3.2.5. *La distribution peigne de Dirac est une distribution tempérée. Elle admet donc une transformée de Fourier au sens des distributions. Sa transformée de Fourier est la distribution peigne de Dirac elle-même : $\mathcal{F}[\text{III}(x)] = \text{III}(\nu)$ ou encore*

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n).$$

De plus, on a :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT)\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right).$$

En utilisant la définition de III et la linéarité de la transformée de Fourier, on peut alors écrire :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\delta(x - n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi n\nu) T_{\mathbb{1}}.$$

D'où

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2i\pi n\nu) T_{\mathbb{1}}.$$

Grâce à ces formules, on peut obtenir le résultat très intéressant suivant :

Théorème 3.2.6 (Formule sommatoire de Poisson). *Soit f une fonction continue admettant une transformée de Fourier. Lorsque ces sommes ont un sens, on a :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{T}\right) \exp\left(\frac{2i\pi x n}{T}\right).$$

Dans le cas particulier $x = 0$ et $T = 1$, la formule de Poisson s'écrit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

3.3 Séries de Fourier et Échantillonnage

3.3.1 Transformée de Fourier des fonctions périodiques

Développement en série de Fourier d'une fonction

Soit f une fonction périodique de période T , i.e., $f(x) = f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En notant

$$V_0 = \frac{1}{T},$$

on peut écrire le développement de $f(x)$ en série de Fourier sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n V_0 x) + b_n \sin(2\pi n V_0 x)),$$

avec

$$a_n = 2V_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2\pi n V_0 t) dt, \quad b_n = 2V_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2\pi n V_0 t) dt.$$

En transformant les cosinus et sinus en exponentielles complexes, on peut encore écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi n V_0 x),$$

où

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = V_0 \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-2i\pi n V_0 t) dt.$$

Théorème 3.3.1 (formule de Parseval). *La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ est convergente et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2,$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2).$$

Distributions et fonctions périodiques

Théorème 3.3.2. *Si F est une distribution périodique de période T , alors il existe une distribution F_0 dont le support a une longueur inférieure à T et telle que*

$$F = F_0 * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Sa transformée de Fourier est alors un peigne de Dirac modulé dont les Dirac sont en $\frac{n}{T}$ avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{F}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right), \quad c_n = \frac{1}{T} \hat{F}_0\left(\frac{n}{T}\right).$$

Démonstration. On a $\hat{F}(\nu) = \hat{F}_0(\nu) \mathcal{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)]$. D'après le théorème 3.2.5, on obtient donc $\hat{F}(\nu) = \hat{F}_0(\nu) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T})$. Or d'après le théorème 3.2.4, \hat{F}_0 est une distribution régulière associée à une fonction indéfiniment dérivable de sorte que $\hat{F}_0(\nu) \delta(\nu - \frac{n}{T}) = \hat{F}_0(\frac{n}{T}) \delta(\nu - \frac{n}{T})$ d'où le résultat. \square

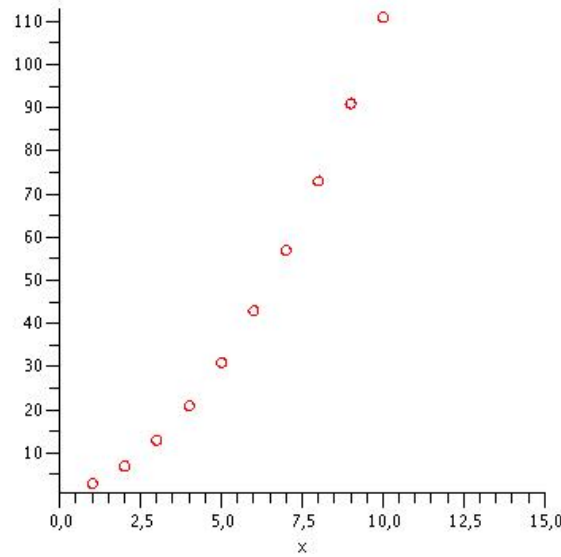
Théorème 3.3.3. Si f est une fonction périodique de période T et si l'on note c_n les coefficients dans son développement en série de Fourier complexe, alors on a

$$\mathcal{F}[T_f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right).$$

Démonstration. Si f_0 représente f sur une période, alors $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(t - nT)$. D'où $T_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{f_0} * \delta(t - nT)$. On a donc $\mathcal{F}[T_f] = \mathcal{F}[T_{f_0}] \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$. Or f_0 est localement sommable donc $\mathcal{F}[T_{f_0}] = T_{\hat{f}_0}$ et $\hat{f}_0(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} f_0(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt$ et on retrouve bien le coefficient $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_0(t) \exp(-2i\pi \frac{\nu}{T} t) dt$ du développement en série de Fourier complexe de f (voir aussi la preuve du théorème précédent). \square

3.3.2 Échantillonnage

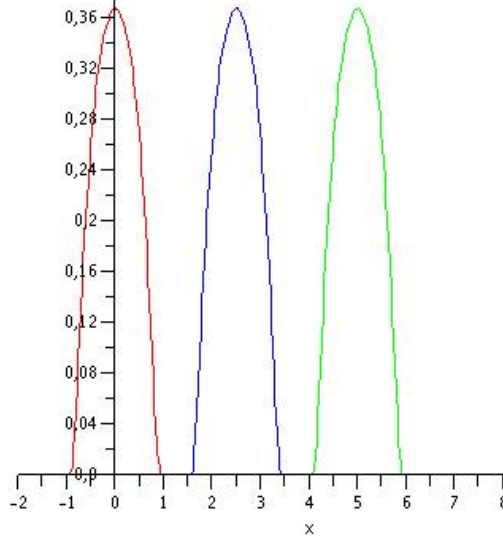
L'expérimentateur est souvent confronté au problème suivant : il ne dispose que d'une suite de mesures de la valeur d'une fonction en certains points.



Supposons que les x_i soient équidistants ($x_j - x_{j-1} = c$ où c est une constante) et suffisamment rapprochés. Peut-on déterminer f ? La réponse est oui à condition que la transformée de Fourier de f soit à support borné et, dans ce cas, on va déterminer l'intervalle maximal entre deux valeurs de x permettant de reconstruire f .

Considérons le produit $\text{III}\left(\frac{x}{T}\right) f(x)$. En appliquant la transformée de Fourier, on obtient $\mathcal{F}\left[\text{III}\left(\frac{x}{T}\right) f(x)\right] = T \text{III}(T\nu) * \hat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) * \hat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$.

Plaçons nous dans le cas où \hat{f} est à support borné compris dans $[-V_0, V_0]$. Pour T donné, on prélève un échantillon $(f(nT), n \in \mathbb{N})$. Si $\frac{1}{T} > 2V_0$ c'est-à-dire $T < \frac{1}{2V_0}$, alors on obtient une série de fonctions disjointes.



On peut alors multiplier par la fonction porte prenant la valeur 1 pour $|\nu| < V_0$ et 0 ailleurs, *i.e.*, $\Pi(\frac{\nu}{2V_0})$ pour obtenir $\hat{f}(\nu)$.

Théorème 3.3.4 (Théorème d'échantillonnage). *Une fonction réelle ayant une transformée de Fourier dont le support est contenu dans l'intervalle $[-V_0, V_0]$ est entièrement déterminée par ses valeurs aux points $x = nT$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $T < \frac{1}{2V_0}$.*

Ce théorème aussi connu sous le nom de théorème de Nyquist-Shannon signifie que pour pouvoir transformer un signal d'une forme discrète à une forme continue, sa fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal (application : conversion analogique-numérique des signaux).

On doit maintenant reconstruire f à partir des valeurs des $f(nT)$. On appelle ce processus *l'interpolation*. Si $\hat{f}(\nu)$ est nulle pour $|\nu| \geq V_0$, alors $\hat{f}(\nu) = (T\Pi(T\nu) * \hat{f}(\nu))\Pi(\frac{\nu}{2V_0})$, pour $T < \frac{1}{2V_0}$. D'où en prenant la transformée de Fourier inverse $f(x) = \Pi(\frac{x}{T}) f(x) * \frac{\sin(2\pi V_0 x)}{\pi x}$ et au final on trouve :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T f(nT) \frac{\sin(2\pi V_0(x - nT))}{\pi(x - nT)},$$

que l'on peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2V_0}\right) \frac{\sin(2\pi V_0 x - n\pi)}{2\pi V_0 x - n\pi}.$$

Chapitre 4

La Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est une sorte de généralisation de la transformation de Fourier qui permet parfois d'éviter d'utiliser les distributions lorsqu'une fonction n'admet pas de transformée de Fourier.

4.1 Transformée de Laplace des fonctions

4.1.1 Définition et existence

Définition 4.1.1. Soit f une fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles ou complexes. La transformée de Laplace de f notée $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $L(s)$ est alors donnée, lorsqu'elle existe, par la fonction de la variable complexe $s \in \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = L(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt.$$

Notons que si on ne fait aucune hypothèse sur f , alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt$ n'existe pas forcément. Par exemple, la fonction $t \mapsto \exp(t^2)$ n'admet pas de transformée de Laplace. Nous avons cependant le théorème d'existence suivant :

Théorème 4.1.1. Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$ et vérifiant de plus

$$\forall t \geq 0, \quad |f(t)| \leq M \exp(\gamma t), \quad (4.1)$$

pour certaines constantes réelles $M > 0$ et γ . Alors la transformée de Laplace de f existe pour tout $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ avec $x > \gamma$.

Les conditions de ce théorème suffisent pour la plupart des applications et il est en général assez facile de vérifier qu'une fonction vérifie une inégalité de la forme (4.1). Notons aussi que ce théorème ne donne qu'une condition suffisante d'existence de transformée de Laplace et que cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple, la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ ne

vérifie pas les conditions du théorème mais admet une transformée de Laplace qui est définie par $\mathcal{L}[1/\sqrt{t}] = \sqrt{\pi/s}$.

Soit f une fonction vérifiant les conditions du théorème 4.1.1 et soit $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$. Alors, la fonction $t \mapsto f(t) \exp(-st)$ est intégrable si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t) \exp(-xt)$ est intégrable.

Définition 4.1.2. On appelle abscisse de sommabilité de la fonction f et on note α la borne inférieure de tous les x pour lesquels il y a sommabilité :

$$\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}; t \mapsto |f(t)| \exp(-xt) \text{ est sommable}\}$$

La transformée de Laplace F de f est donc définie pour tout $s = x + i\omega \in \mathbb{C}$ avec $x > \alpha$ où α est l'abscisse de sommabilité de f . Dans certains cas, F est aussi définie pour $x = \alpha$.

Exemple : on considère la fonction de Heaviside H . Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} H(t) \exp(-xt) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-xt) dt = -\frac{1}{x} [\exp(-xt)]_0^{+\infty}$$

L'abscisse de sommabilité de H est donc $\alpha = 0$ et $\mathcal{L}[H(t)]$ est définie pour tout complexe s ayant une partie réelle strictement positive : on a alors $\mathcal{L}[H(t)] = 1/s$.

4.1.2 Lien entre transformées de Laplace et de Fourier et formule d'inversion

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ et supposons que f admette une transformée de Fourier \hat{f} . On a alors

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2i\pi(\frac{\omega}{2\pi})t) dt = \hat{f}(\frac{\omega}{2\pi}).$$

La transformée de Laplace peut donc se voir comme une extension de la transformée de Fourier. $F(x + i\omega)$ est la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t) \exp(-xt)$ prise en $\omega/(2\pi)$.

Soit f une fonction d'abscisse de sommabilité α et notons F sa transformée de Laplace. On a alors, pour $x > \alpha$,

$$F(x + 2i\pi\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) \exp(-xt) \exp(-2i\pi\nu t) dt.$$

D'où

$$F(x + 2i\pi\nu) = \mathcal{F}[H(t) f(t) \exp(-xt)],$$

et en appliquant la transformée de Fourier inverse, il vient qu'en tout point t où Hf est continue :

$$H(t) f(t) \exp(-xt) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2i\pi\nu) \exp(2i\pi\nu t) d\nu.$$

Notons que pour pouvoir appliquer la transformée de Fourier inverse, on peut supposer que F est intégrable. Ceci entraîne alors

$$H(t) f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2i\pi\nu) \exp(xt) \exp(2i\pi\nu t) d\nu.$$

On obtient donc

$$H(t) f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D_x} F(s) \exp(st) ds,$$

où $s = x + 2i\pi\nu$ et $D_x = \{x + i\omega; \omega \in \mathbb{R}\}$ est appelé *contour de Bromwich*.

Théorème 4.1.2 (Inversion de la transformée de Laplace). *Soient f une fonction vérifiant les conditions du théorème 4.1.1 et F sa transformée de Laplace que l'on suppose intégrable. Si l'on note α l'abscisse de sommabilité de f , on a la formule d'inversion suivante (valable en tout point de continuité de Hf) :*

$$H(t) f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} F(s) \exp(st) ds,$$

avec $x_0 > \alpha$ quelconque.

Si la transformée de Laplace d'une fonction existe, alors elle est unique. En ce qui concerne la transformée de Laplace inverse, nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.1.1. *Soient f et g deux fonctions qui vérifient les conditions du théorème 4.1.1. Si $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, alors $f(t) = g(t)$ en tout point t où f et g sont continues. En particulier, si deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ ont la même transformée de Laplace, alors elles sont identiques.*

4.1.3 Propriétés et transformées classiques

On suppose ici que les fonctions dont on prend la transformée de Laplace vérifient les conditions du théorème 4.1.1, que les fonctions que l'on dérive (resp. intègre) sont dérivables (resp. intégrables), ... On montre alors les propriétés suivantes :

- $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$;
- $\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)]$;
- $\mathcal{L}[f''(t)] = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}[f(t)]$;
- $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n\mathcal{L}[f(t)]$;
- $\mathcal{L}[\int_0^t f(u)du] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$;
- $\mathcal{L}[f(t-T)] = \exp(-sT)\mathcal{L}[f(t)]$;

- $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$;

Les formules de transformées de Laplace classiques données ci-dessous sont très utiles dans les applications. En effet, la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle fait naturellement apparaître les termes ci-dessous (voir Annexe A).

- $\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = H(t)$;
- $\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!}] = \frac{1}{s^{n+1}}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^{n+1}}] = H(t) \frac{t^n}{n!}$;
- $\mathcal{L}[\exp(-at)] = \frac{1}{s+a}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = H(t) \exp(-at)$;
- $\mathcal{L}[\frac{t^n}{n!} \exp(-at)] = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+a)^{n+1}}] = H(t) \frac{t^n}{n!} \exp(-at)$;
- $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega^2}] = H(t) \cos(\omega t)$;
- $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega}{\omega^2+s^2}] = H(t) \sin(\omega t)$.

4.2 Transformée de Laplace des distributions

Définition 4.2.1. Soit $T \in \mathcal{D}'_+$. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > \alpha$, la distribution $\exp(-xt)T$ soit tempérée, i.e., $\exp(-xt)T \in \mathcal{S}'$, alors on peut définir la transformée de Laplace de T par l'application

$$s \mapsto \mathcal{L}[T] = \langle T, \exp(-st) \rangle .$$

On voit donc que la transformée de Laplace d'une distribution n'est pas une distribution mais une fonction qui à un complexe s associe le complexe $\langle T, \exp(-st) \rangle$.

4.2.1 Exemples

On montre assez facilement que l'on a :

- $\mathcal{L}[\delta](s) = \langle \delta, \exp(-st) \rangle = 1$ donc $\mathcal{L}[\delta] = \mathbf{1}$;
- $\mathcal{L}[\delta'](s) = s$;
- $\mathcal{L}[W](s) = \frac{1}{s}$;
- $\mathcal{L}[\text{III}_+](s) = \frac{1}{1-\exp(-s)}$;
- $\mathcal{L}[T * S] = \mathcal{L}[T] \mathcal{L}[S]$.

4.2.2 Lien entre transformée de Laplace et de Fourier

Comme dans le cas des fonctions, il existe un lien entre les transformées de Fourier et Laplace des distributions. Ces liens sont indiqués ici.

Soit f une fonction localement sommable et T_f la distribution régulière associée. Soit $\mathcal{L}[T_f]$ la transformée de Laplace de T_f et notons α son abscisse de sommabilité. On a alors :

1. Si $\alpha > 0$, alors T_f n'est pas tempérée et n'admet donc pas de transformée de Fourier.

2. Si $\alpha < 0$, alors $\hat{T}_f(\nu) = \mathcal{L}[T_f](2i\pi\nu)$.

3. Si $\alpha = 0$, alors

$$\mathcal{L}[T_f](s) = \mathcal{L}(T_g)(s) + \sum_{n \in I} \frac{\lambda_n}{(s - i\omega_n)^{m_n}}$$

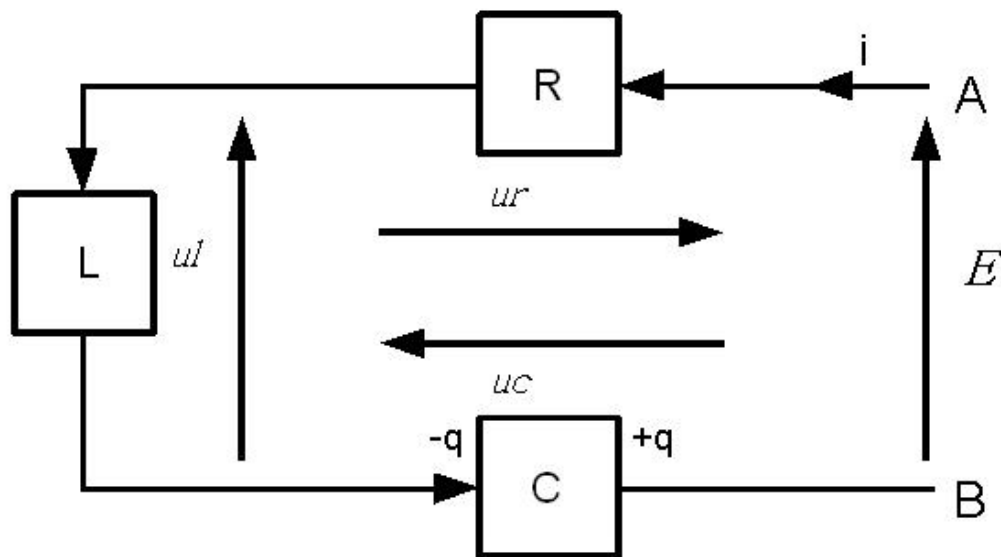
$$\hat{T}_f(\nu) = \text{Pf } \mathcal{L}(T_g)(2i\pi\nu) + \sum_{n \in I} \frac{(2i\pi)^{m_n-1}}{2(m_n-1)!} \lambda_n \delta^{(m_n-1)}(\nu - \nu_n),$$

où Pf est une distribution appelée *partie fractionnaire*.

4.3 Applications en physique

4.3.1 Calcul des fonctions de transfert en électronique

On considère un circuit RLC.



L'équation différentielle régissant un tel circuit est alors donnée par

$$E(t) = L \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du + R i(t).$$

Dans l'espace \mathcal{D}'_+ des distributions à support borné à droite, cette équation s'écrit alors

$$E = (L \delta' + \frac{1}{C} W + R \delta) * i.$$

En prenant la transformée de Laplace, il vient alors

$$E(s) = (L s + \frac{1}{C s} + R) I(s),$$

d'où

$$Z(s) := \frac{E(s)}{I(s)} = L s + \frac{1}{C s} + R.$$

Ce rapport de la tension à l'intensité en régime exponentiel est appelé *fonction de transfert* du circuit en régime exponentiel.

4.3.2 Résolution d'équations différentielles en mécanique

On considère une cabine en translation le long de l'axe Oz d'un référentiel galiléen $Oxyz$ et une masse m suspendue à son plafond par l'intermédiaire :

- d'un ressort de constante de raideur k ,
- d'un amortisseur de coefficient a .

Le principe fondamental de la dynamique nous permet alors d'écrire

$$m \ddot{x} = -a \dot{x} - k x - m \ddot{u}.$$

En prenant $\ddot{u} = a H(t)$ et en appliquant la transformée de Laplace, il vient alors

$$m (-x'(0) - s x(0) + s^2 X(s)) + a (-x(0) + s X(s)) + k X(s) = -m \frac{a}{s}.$$

D'où avec les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$,

$$X(s) = \frac{-m a}{s (m s^2 + a s + k)} = \frac{-a}{s (s^2 + \frac{a}{m} s + \frac{k}{m})}.$$

On pose alors

$$w_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \epsilon_1 = \frac{a}{2 \sqrt{m k}},$$

pour obtenir

$$X(s) = \frac{-a}{s(s^2 + 2\epsilon_1 \omega_0 s + \omega_0^2)}.$$

Le discriminant du trinôme $s^2 + 2\epsilon_1 \omega_0 s + \omega_0^2$ est égal à $4\omega_0^2(\epsilon_1^2 - 1)$ donc, en supposant, $\epsilon_1 > 1$ on a $s^2 + 2\epsilon_1 \omega_0 s + \omega_0^2 = (s - s_1)(s - s_2)$ avec $s_1 = -\omega_0 \epsilon_1 + \omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1}$ et $s_2 = -\omega_0 \epsilon_1 - \omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1}$. On peut alors décomposer la fraction rationnelle $X(s)$ en éléments simples pour l'écrire sous la forme

$$X(s) = \frac{-a}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2},$$

avec

$$A = \frac{-a}{s_1 s_2} = \frac{-a}{\omega_0^2}, \quad B = \frac{-a}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{-a}{2\omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1} s_1}, \quad C = \frac{-a}{s_2(s_2 - s_1)} = \frac{a}{2\omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1} s_2}.$$

Finalement, en prenant la transformée de Laplace inverse, il vient

$$x(t) = \frac{-a}{\omega_0^2} H(t) + \frac{-a \exp(s_1 t)}{2\omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1} s_1} H(t) + \frac{a \exp(s_2 t)}{2\omega_0 \sqrt{\epsilon_1^2 - 1} s_2} H(t).$$

4.4 Résolution d'équations de convolution

La transformation de Laplace peut être utile pour calculer des inverses de convolution dans \mathcal{D}'_+ et donc résoudre des équations de convolution dans \mathcal{D}'_+ .

On considère une équation de convolution

$$A * X = B,$$

où A et B sont deux distributions données dans \mathcal{D}'_+ et l'inconnue est la distribution $X \in \mathcal{D}'_+$. Supposons que les distributions A et B admettent des transformées de Laplace $\mathcal{L}[A]$ et $\mathcal{L}[B]$. S'il existe une solution $X \in \mathcal{D}'_+$ et si cette solution admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[X]$, alors on a

$$\mathcal{L}[A] \mathcal{L}[X] = \mathcal{L}[B] \iff \mathcal{L}[X] = \frac{\mathcal{L}[B]}{\mathcal{L}[A]}.$$

Il suffit alors d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour retrouver X . Pour ceci, on dispose du résultat suivant :

Proposition 4.4.1. *Une fonction R de la variable complexe s est la transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ si et seulement si il existe un demi-plan dans lequel R est holomorphe et $R(s)$ est majorée en module par un polynôme en $|s|$.*

Si la fonction $\mathcal{L}[B]/\mathcal{L}[A]$ vérifie les conditions de la proposition, alors son image inverse $X \in \mathcal{D}'_+$ par la transformée de Laplace est l'unique solution dans \mathcal{D}'_+ de l'équation de convolution. En particulier, si $A \in \mathcal{D}'_+$ admet une transformée de Laplace $\mathcal{L}[A]$ et si $1/\mathcal{L}[A]$ vérifie

les conditions de la proposition, alors son inverse de convolution A^{*-1} est donnée par l'image inverse par la transformée de Laplace de $1/\mathcal{L}[A]$.

Exemples : Considérons la distribution $D\delta \in \mathcal{D}'_+$ où D est un opérateur différentiel unitaire à coefficients constants et cherchons à calculer son inverse de convolution (ce qui équivaut à résoudre l'équation de convolution $D\delta * X = \delta$) en utilisant la transformée de Laplace. La transformée de Laplace de $D\delta$ est un polynôme P de la variable s et $1/P(s)$ vérifie alors les hypothèses de la proposition 4.4.1. D'après ce qui précède, on sait alors que l'unique solution dans \mathcal{D}'_+ de l'équation de convolution $D\delta * X = \delta$ est l'image inverse par la transformée de Laplace de $1/P(s)$. On peut alors effectuer une décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} (voir Annexe A) de la fraction rationnelle $1/P(s)$ pour obtenir

$$\frac{1}{P(s)} = \sum_k \frac{a_k}{(s - s_k)^{\alpha_k}}.$$

La transformée de Laplace inverse de la fraction rationnelle $\sum_k \frac{a_k}{(s - s_k)^{\alpha_k}}$ est donnée par la fonction Hf , où $f(t) = \sum_k a_k \exp(-s_k t) \frac{t^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!}$ donc le candidat naturel pour l'inverse de convolution de $D\delta$ dans \mathcal{D}'_+ est Wf . Notons qu'ici, en utilisant la proposition 2.3.3, on obtient bien

$$(D\delta)^{*-1} = W \sum_k a_k \exp(-s_k t) \frac{t^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!}.$$

Si on considère maintenant la distribution $A = \delta' + W \in \mathcal{D}'_+$. Sa transformée de Laplace est donnée par $\mathcal{L}[A] = s + 1/s = (s^2 + 1)/s$ donc $1/\mathcal{L}[A] = s/(s^2 + 1)$. Cette fraction rationnelle vérifie les hypothèses de la proposition 4.4.1 donc c'est la transformée de Laplace d'une distribution de \mathcal{D}'_+ . Comme $s/(s^2 + 1)$ est la transformée de Laplace de la fonction $\cos(t)$, le candidat naturel est $A^{*-1} = W \cos(t)$. Ici, nous ne disposons pas de l'analogue de la proposition 2.3.3 (qui n'est valable que pour des distributions de la forme $D\delta$) pour valider le résultat donc on doit vérifier que $(\delta' + W) * W \cos(t) = \delta$ ce qui se fait par un calcul direct.

Annexe A

Décomposition en éléments simples

On a vu que l'application de la transformée de Laplace pour la résolution d'équations différentielles et d'équations de convolution utilise la *décomposition en éléments simples* des fractions rationnelles. Le but de cette annexe est de donner (rappeler) les éléments nécessaires au calcul de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Le calcul de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle peut se décomposer en deux étapes :

1. Décomposer la fraction rationnelle en *partie entière* et *partie polaire*,
2. Décomposer la partie polaire en une somme d'*éléments simples*.

Une fraction rationnelle F en la variable x à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} s'écrit sous la forme

$$F = \frac{N}{D},$$

où N et D sont deux polynômes en la variable x à coefficients dans \mathbb{K} et $D \neq 0$. Dans toute cette annexe, on supposera sans perte de généralité que N et D sont premiers entre eux (s'ils ont un facteur commun, alors on peut le simplifier) et que D est unitaire. On appelle *pôle de F* les racines de son dénominateur D . La fraction rationnelle F est alors définie partout en dehors de ses *pôles* c'est-à-dire pour tout x tel que $D(x) \neq 0$.

A.1 Décomposition en partie entière et partie polaire

Proposition A.1.1. *Toute fraction rationnelle F admet une unique décomposition*

$$F = E + \tilde{F} = E + \frac{P}{Q},$$

où E est un polynôme appelé partie entière de F et $\tilde{F} = P/Q$ est une fraction rationnelle vérifiant $\deg(P) < \deg(Q)$ appelée partie polaire de F .

Soit $F = N/D$ une fraction rationnelle. Si $\deg N < \deg D$, alors on pose $E = 0$ et $\tilde{F} = N/D$. Sinon E et \tilde{F} se calculent en effectuant la division euclidienne de N par D . En effet, la division euclidienne de N par D fournit deux polynômes Q et R tels que $N = QD + R$ et $\deg(R) < \deg(D)$. On a alors $F = Q + R/D$ avec $\deg(R) < \deg(D)$ et il suffit donc de poser $E = Q$ et $\tilde{F} = R/D$.

Exemple : On considère la fraction rationnelle

$$F = \frac{N}{D}, \quad N(x) = x^2(2x+1), \quad D(x) = x^2+1, \quad (\text{A.1})$$

ayant pour pôles les nombres complexes i et $-i$. En effectuant la division euclidienne de $N(x) = 2x^3 + x^2$ par $D(x) = x^2 + 1$, on obtient¹ :

$$N(x) = (2x+1)D(x) + (-2x-1).$$

La partie entière de F est alors donnée par $E(x) = 2x+1$ et sa partie polaire est donnée par $\tilde{F}(x) = -\frac{2x+1}{x^2+1}$.

A.2 Décomposition de la partie polaire en éléments simples

On considère maintenant une fraction rationnelle $F = N/D$ avec $\deg(N) < \deg D$ et on va la décomposer en *éléments simples*. Pour ce faire, on doit distinguer le cas où l'on cherche une décomposition sur \mathbb{C} de celui où l'on cherche une décomposition sur \mathbb{R} .

A.2.1 Décomposition en éléments simples sur \mathbb{C}

On va montrer comment écrire F comme une somme de fractions rationnelles de la forme

$$\frac{c}{(x-a)^m}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}^*.$$

Une telle fraction rationnelle est appelée *élément simple d'ordre m* .

Tout polynôme en une variable à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} étant scindé sur \mathbb{C} , on peut toujours factoriser le polynôme unitaire D sous la forme

$$D(x) = (x-a_1)^{m_1} (x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_r)^{m_r},$$

où les nombres complexes a_1, \dots, a_r sont les pôles de F . On a alors le résultat suivant :

Proposition A.2.1. *Avec les notations précédentes, il existe d'unique constantes $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m_i$ telles que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j}. \quad (\text{A.2})$$

¹On rappelle qu'en pratique la division euclidienne peut se calculer en posant la division comme on l'a appris à l'école.

Par exemple, si le dénominateur D de la fraction rationnelle F se factorise sous la forme

$$D(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1)^3,$$

ce qui correspond à $r = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 3$, alors la proposition précédente nous assure l'existence d'unique constantes $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ telles que

$$F(x) = \frac{c_{1,1}}{x+1} + \frac{c_{2,1}}{x-2} + \frac{c_{3,1}}{x-1} + \frac{c_{3,2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{3,3}}{(x-1)^3}.$$

Calculer la décomposition en éléments simples de F consiste donc à calculer ces constantes $c_{i,j}$. En toute généralité, ceci peut se faire de la manière suivante :

1. On réduit au même dénominateur dans l'expression $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j}$ de sorte à obtenir une fraction rationnelle de la forme P/D , où P est un polynôme en la variable x dont les coefficients dépendent des $c_{i,j}$,
2. D'après (A.2), on doit donc avoir $F = N/D = P/D$ c'est-à-dire $N(x) = P(x)$. Deux polynômes étant égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (dans la base monomiale), on écrit que le coefficients constant (en x^0) de N doit être égal à celui de P , le coefficient en x^1 de N doit être égal à celui de P , ... ceci nous conduit à un système linéaire pour les $c_{i,j}$ que l'on résout. Notons que la proposition A.2.1 nous assure que ce système linéaire admet une unique solution.

Exemple : On considère la partie polaire de la fraction rationnelle donnée par (A.1) trouvée précédemment c'est-à-dire $\tilde{F}(x) = -\frac{2x+1}{x^2+1}$. On factorise le dénominateur $x^2 + 1$ en écrivant $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Avec les notations précédentes, ceci signifie que l'on a $r = 2$, $a_1 = i$, $a_2 = -i$, $m_1 = m_2 = 1$. La proposition A.2.1 nous assure donc l'existence de 2 nombres complexes $c_{1,1}$ et $c_{2,1}$ tels que

$$-\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{c_{1,1}}{x-i} + \frac{c_{2,1}}{x+i}. \quad (\text{A.3})$$

En réduisant au même dénominateur dans le membre de droite, on obtient

$$-\frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{c_{1,1}(x+i) + c_{2,1}(x-i)}{(x-i)(x+i)} = \frac{(c_{1,1} + c_{2,1})x + (c_{1,1} - c_{2,1})i}{x^2+1}.$$

On doit donc avoir $-2x - 1 = (c_{1,1} + c_{2,1})x + (c_{1,1} - c_{2,1})i$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} -2 &= c_{1,1} + c_{2,1}, \\ -1 &= (c_{1,1} - c_{2,1})i. \end{cases}$$

En résolvant ce système on trouve alors $c_{1,1} = -1 + \frac{1}{2}i$ et $c_{2,1} = -1 - \frac{1}{2}i$. La fraction rationnelle F donnée par (A.1) s'écrit donc

$$F(x) = (2x+1) - \frac{2x+1}{x^2+1} = (2x+1) + \frac{-1 + \frac{1}{2}i}{x-i} + \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{x+i}.$$

Il existe des techniques (astuces) pour calculer certains coefficients $c_{i,j}$ d'une décomposition en éléments simples sans écrire le système linéaire. Par exemple, lorsque la fraction rationnelle F admet un *pôle simple* en $\alpha \in \mathbb{C}$, *i.e.*, $D(x) = (x - \alpha) \tilde{D}(x)$ avec $\tilde{D}(\alpha) \neq 0$, le coefficient c apparaissant dans l'élément simple $c/(x - \alpha)$ de la décomposition en éléments simples de F vaut

$$c = \frac{N(\alpha)}{\tilde{D}(\alpha)}. \quad (\text{A.4})$$

Ceci se voit en multipliant par $(x - \alpha)$ dans (A.2), en simplifiant les facteurs $(x - \alpha)$ apparaissant au numérateur et dénominateur d'une même fraction rationnelle et en évaluant le résultat en $x = \alpha$.

Exemple : Dans l'exemple précédent la fraction rationnelle \tilde{F} admet un pôle simple en $x = i$ avec $\tilde{D}(x) = x + i$. D'après (A.4), on a alors

$$c_{1,1} = \frac{N(i)}{\tilde{D}(i)} = \frac{-2i - 1}{i + i} = -1 + \frac{1}{2}i.$$

En effet, en multipliant par $(x - i)$ dans (A.3), on obtient

$$-\frac{(2x + 1)(x - i)}{x^2 + 1} = \frac{c_{1,1}(x - i)}{x - i} + \frac{c_{2,1}(x - i)}{x + i},$$

d'où, en simplifiant,

$$-\frac{(2x + 1)}{x + i} = c_{1,1} + \frac{c_{2,1}(x - i)}{x + i},$$

et en évaluant en $x = i$,

$$-\frac{(2i + 1)}{i + i} = c_{1,1} + 0.$$

Dans cet exemple, on peut évidemment utiliser la même technique pour calculer $c_{2,1}$.

Attention, la formule (A.4) n'est valable que lorsque le pôle α est simple. Si la fraction rationnelle F admet un *pôle d'ordre $m > 1$* en $\alpha \in \mathbb{C}$, *i.e.*, $B(x) = (x - \alpha)^m \tilde{B}(x)$ avec $\tilde{B}(\alpha) \neq 0$, alors la partie de la décomposition en éléments simples correspondant à ce pôle s'écrit

$$\frac{c_{1,1}}{(x - \alpha)} + \frac{c_{1,2}}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{c_{1,m}}{(x - \alpha)^m}.$$

Dans ce cas, une technique analogue à la précédente permet seulement de calculer le coefficient $c_{1,m}$ qui sera donné par la formule

$$c_{1,m} = \frac{N(\alpha)}{\tilde{B}(\alpha)}.$$

Les autres coefficients $c_{i,j}$ doivent être calculés différemment, *e.g.*, en revenant au système linéaire obtenu en réduisant au même dénominateur. Notons qu'il existe d'autres astuces que nous ne détaillerons pas ici pour calculer ces autres coefficients sans passer par le système linéaire.

A.2.2 Décomposition en éléments simples sur \mathbb{R}

Lorsque l'on cherche la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle sur \mathbb{R} , la principale différence avec le cas dans \mathbb{C} est qu'un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} n'est en général pas scindé sur \mathbb{R} (autrement dit il existe des polynômes de degré 2 irréductibles sur \mathbb{R} , *e.g.*, $x^2 + 1$). Par conséquent, le dénominateur D de la fraction rationnelle F ne peut pas s'écrire en général sous la forme $D(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_r)^{m_r}$, avec les a_i dans \mathbb{R} mais seulement

$$D(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} \cdots (x - a_r)^{m_r} (x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} (x^2 + b_2 x + c_2)^{n_2} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{n_s},$$

où $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ et $m_i, n_i \in \mathbb{N}^*$.

Proposition A.2.2. *Avec les notations précédentes, il existe d'uniques constantes $d_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, m_i$ et $e_{k,l}, f_{k,l} \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, s$, $l = 1, \dots, n_s$ telles que*

$$F(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{d_{i,j}}{(x - a_i)^j} + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{n_s} \frac{e_{k,l} x + f_{k,l}}{(x^2 + b_k x + c_k)^l}. \quad (\text{A.5})$$

Par exemple, si le dénominateur D de la fraction rationnelle F se factorise sous la forme

$$D(x) = (x + 1)(x - 1)^3(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)^2,$$

ce qui correspond à $r = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $s = 2$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, alors la proposition précédente nous assure l'existence d'uniques constantes $d_{i,j}, e_{k,l}, f_{k,l} \in \mathbb{R}$ telles que

$$F(x) = \frac{d_{1,1}}{x + 1} + \frac{d_{2,1}}{x - 1} + \frac{d_{2,2}}{(x - 1)^2} + \frac{d_{2,3}}{(x - 1)^3} + \frac{e_{1,1} x + f_{1,1}}{x^2 + 1} + \frac{e_{2,1} x + f_{2,1}}{x^2 + x + 1} + \frac{e_{2,2} x + f_{2,2}}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Comme dans le cas de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} , réduire au même dénominateur dans le membre de droite de (A.5) et identifier les coefficients des numérateurs nous mène à un système linéaire pour les coefficients inconnus $d_{i,j}, e_{k,l}$ et $f_{k,l}$. La proposition A.2.2 nous assure alors l'existence d'une solution unique réelle à ce système. De plus la technique énoncée dans le cas de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} menant à la formule (A.4) peut encore s'appliquer lorsque l'on travaille sur \mathbb{R} . Pour les pôles définis par des facteurs irréductibles de degré 2 sur \mathbb{R} , en évaluant en la racine complexe de ces polynômes et en égalisant les parties réelles et imaginaires des complexes obtenus, on trouve bien à la fois les coefficients $e_{k,l}$ et $f_{k,l}$ (voir l'exemple ci-dessous). Notons aussi que, comme c'était le cas pour la décomposition sur \mathbb{C} , il existe d'autres astuces (*e.g.*, les mêmes que pour la décomposition sur \mathbb{C}) que nous ne détaillerons pas ici pour calculer les coefficients d'une décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} sans revenir au système linéaire.

Exemple : Soit à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{N}{D}, \quad N(x) = x + 1, \quad D(x) = (x - 3)(x^2 + 1)^2.$$

D'après la proposition [A.2.2](#), il existe d'unique constantes $d_{i,j}, e_{k,l}, f_{k,l} \in \mathbb{R}$ telles que :

$$F(x) = \frac{d_{1,1}}{x-3} + \frac{e_{1,1}x + f_{1,1}}{x^2+1} + \frac{e_{1,2}x + f_{1,2}}{(x^2+1)^2}.$$

Le pôle $x = 3$ étant simple, on a $d_{1,1} = (3+1)/(3^2+1)^2 = 4/100 = 1/25$. En multipliant par $(x^2+1)^2$ et en évaluant en $x = i$, on obtient $e_{1,2}i + f_{1,2} = (i+1)/(i-3) = -1/5 - 2/5i$ d'où $e_{1,2} = -2/5$ et $f_{1,2} = -1/5$. En réduisant au même dénominateur et en égalisant les coefficients constants des numérateurs obtenus, on obtient $1 = d_{1,1} - 3f_{1,1} - 3f_{1,2}$ d'où $f_{1,1} = -3/25$. De plus, en égalisant les coefficients en x^4 , on obtient $0 = d_{1,1} + e_{1,1}$ d'où $e_{1,1} = -1/25$. Finalement, on a obtenu la décomposition en éléments simples suivante :

$$F(x) = \frac{1/25}{x-3} + \frac{-1/25x - 3/25}{x^2+1} + \frac{-2/5x - 1/5}{(x^2+1)^2}.$$

Remerciements

Ce document a été rédigé avec l'aide de Marc Rybowicz, enseignant-chercheur à la faculté des sciences et techniques de l'Université de Limoges.

Bibliographie

- [1] Walter Appel. Mathématiques pour la physique et les physiciens, H & K Éditions (2^e édition), 2002.
- [2] Gustav Doetsch. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Springer-Verlag, 1974.
- [3] Erwin Kreyszig. Advanced Engineering Mathematics, 7th Edition, John Wiley & Sons, INC, 1993.
- [4] François Roddier. Distributions et transformation de Fourier (à l'usage des physiciens et des ingénieurs) Ediscience, 1971.
- [5] Laurent Schwartz. Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. 2^e édition revue et corrigée, Hermann, Paris, 1965.
- [6] Joel L. Schiff. The Laplace Transform : Theory and Applications. Springer-Verlag, 1999.