

TD8. Les grands théorèmes sur l'intégrale

Exercice 1

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définies par $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$.

- (a) Trouver la limite simple de la suite (f_n) .
- (b) Montrer que la suite (f_n) est dominée par une application constante.
- (c) Quelle est la limite de l'intégrale $\int_{[0,1]} f_n d\lambda$ quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2

1. Soient f et g deux applications définies sur X , à valeurs dans \mathbb{R} , avec f μ -intégrable et g \mathcal{T} -mesurable et bornée sur X . Montrer que le produit fg est μ -intégrable.
2. Soit f une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ sur l'intervalle $[a, b]$.
 - (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $x \mapsto \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x)$ est intégrable pour λ sur $[a, b]$;
 - (b) calculer à l'aide du théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} \ln\left(e + \frac{|x|}{n}\right) f(x) d\lambda(x) .$$

Exercice 3

Soit f une fonction mesurable à valeurs réelles positives sur X . Pour tout $n \geq 1$, on suppose que la fonction $x \mapsto f(x)^n$ est intégrable sur X et on note

$$\delta_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} f(x)^k .$$

- (a) Calculer la limite simple de $\delta_n(x)$ pour $x \in [f < 1] = f^{-1}(] - \infty, 1[)$.
- (b) Vérifier que, pour tout $x \in X$, on a $\delta_n(x) = f(x)(1 - f(x)) \sum_{n=0}^{k-1} f(x)^{2n}$; qu'en déduit-on pour la suite de fonctions $(\delta_n \mathbf{1}_{[f < 1]})_{n \geq 1}$?
- (c) Prouver que la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \int_{[f < 1]} f^k d\mu$ converge vers $\int_{[f < 1]} \frac{f}{1+f} d\mu$.
- (d) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $\mu(\{f \geq 1\}) = 0$;
 - (ii) la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \int_X f^k d\mu$ converge vers $\int_X \frac{f}{1+f} d\mu$;
 - (iii) la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \int_X f^k d\mu$ converge.

Exercice 4

On cherche à démontrer la formule suivante :

$$\int_{]0,1]} \frac{1}{x^x} d\lambda(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^m}$$

- (a) A l'aide du développement en série entière $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, écrire le développement en série de $\frac{1}{x^x}$, pour $x \in]0,1]$, et appliquer le théorème de convergence monotone à ce développement.
- (b) Justifier que la fonction $x \mapsto x^p(\ln x)^q$ est intégrable sur $]0,1]$, quand p et q sont deux entiers positifs.

On pose

$$I(p, q) = \int_{]0,1]} x^p(\ln x)^q d\lambda(x) .$$

- (c) Calculer $I(m, 0)$ pour tout entier naturel m ,
- (d) puis $I(p, q)$ par intégration par parties.
- (e) Conclure.

Exercice 5

- (a) Pour $0 < y < 1$, démontrer l'inégalité $(1 - y)^{(1/y)} < e^{-1}$.
- (b) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de l'expression suivante :

$$\int_{]0,n]} (\cos x)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

(On pourra étudier la suite de fonctions définies par $f_n(x) = (\cos x)^n (1 - \frac{x}{n})^n \mathbf{1}_{]0,n]}(x)$.)

Exercice 6

Soient (Ω, \mathcal{A}, p) un espace probabilisé. On rappelle que

$$\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, p) = \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) \text{ mesurable, } N_\infty(f) < +\infty\} ,$$

où $N_\infty(f) = \inf\{\alpha > 0, |f| \leq \alpha \text{ } p\text{-presque partout}\}$.

- (a) Vérifier que $f, g \in \mathcal{L}^\infty \implies (f + g) \in \mathcal{L}^\infty$ et $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
- (b) Montrer que $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^q$ pour tout $q \geq 1$.
- (c) Montrer enfin que $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^{q'}$ pour tous $q \geq q' \geq 1$.

Exercice 7

- (a) Montrer que $x \mapsto x^q \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda_{]0,1]})$ si et seulement si $pq > -1$. En déduire lorsqu'elles existent les valeurs de $N_p(\frac{1}{x^2})$ et de $N_p(\sqrt{x})$ pour $p \in [1, +\infty]$.
- (b) Faire de même avec $\lambda_{]1,+\infty[}$.