TD5. Fonctions de répartition

Exercice 1
Soient $a \leq b \in \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ et

$$F_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ x - a & \text{si } x \in I, \\ b - a & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de F_I, vérifier qu'elle est croissante et continue.
(b) On note λ_I la mesure associée, déterminer $\lambda_I(]-\infty, x])$ pour $x \in \mathbb{R}$.
(c) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\lambda_I(A) = \lambda(A \cap I)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\lambda_I(\overline{I})$?
(d) λ_I est-elle invariante par translation ?

Exercice 2
On prend $I = [0,1]$ et on considère $\varphi : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x}$.
(a) Déterminer $\mathcal{C} = \varphi(I)$, puis $\varphi([x,y])$ pour $x \leq y \in I$.
(b) Montrer que $\lambda_I([x,y])$ est égal, à une constante près, à la longueur de $\varphi([x,y])$.
(c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose $\mu(A) = \lambda_I(\varphi^{-1}(A \cap \mathcal{C}))$. Vérifier que ceci définit une mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ et déterminer son support.

Exercice 3
Soit f une fonction numérique continue par morceaux à valeurs positives. Pour $x \leq y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mu([x,y[) = \int_x^y f(t)dt\ ,$$

où l'intégrale considérée est donnée par la théorie de Riemann.
(a) Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$; en déduire que μ est une mesure localement finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Que vaut $\mu(\mathbb{R})$? Décrire les fonctions de répartition de μ.
(b) Pour quelle fonction f obtient-on la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$? sur un intervalle I ? Retrouver le résultat de la question (c) de l'exercice 1.
(c) Montrer que si f est paire, alors $\mu([x,y[) = \mu([|y|,|x|[)$ dès que $x \leq y \leq 0$.
(d) On pose $f(t) = 1_{[-1,1]}(t)\sqrt{1-t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\mu([0,1])$ (on pourra poser $t = \cos u$), en déduire $\mu(\mathbb{R})$ ainsi que la fonction de répartition de μ.

Exercice 4
Soit F la fonction définie par :

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x+1 & \text{si } 1/2 < x \leq 1, \\ x+2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ x+4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de F et vérifier que c'est la fonction de répartition d'une mesure μ localement finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(b) Pour chaque point de discontinuité y de F, calculer $\mu(\{y\})$. En déduire la partie totalement discontinue μ_d de μ. Quelle est sa fonction de répartition ?

(c) On considère la partie diffuse $\mu_c = \mu - \mu_d$ de μ. Ecrire sa fonction de répartition et la décomposer en faisant apparaître la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit λ un réel strictement positif. Pour $A \subset \mathbb{R}$, on pose

$$\mu(A) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \ .$$

Montrer que μ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Quel est son support ? En déduire que μ est discrète. Donner l'allure du graphe de sa fonction de répartition.
(Cette probabilité est la *loi de Poisson* de paramètre λ).

Exercice 6

(a) Montrer que tout sous-ensemble discret fermé de $\mathbb{R}$ est (au plus) dénombrable ; en déduire qu'une mesure discrète est toujours purement discontinue.

(b) On numérote les nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \{q_n,\ n \geq 1\}$ et on considère

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \delta_{q_n} \ ,$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac en x.

(i) Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, puis que $\mu(\{x\}) = 0$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; cette mesure est-elle diffuse ?

(ii) Déterminer le support de μ ; cette mesure est-elle discrète ?

(iii) Montrer que μ est purement discontinue.

Exercice 7

On considère la transformation T définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \ , \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \ , \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Toutes les mesures μ considérées sont positives et σ-finies, et on désignera par F leur fonction de répartition.

(a) Représenter T dans un repère orthonormé, avec pour unité 6 cm. Quelles sont les images réciproques $T^{-1}(I)$, pour chacun des intervalles I suivants : $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right[$, $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right]$, $\left]-8, -\frac{1}{4}\right[$?

(b) Montrer que pour tout intervalle I, $T^{-1}(I)$ est une réunion d'intervalles que l'on précisera. En déduire que l'application T est mesurable.

(c) La mesure image T_μ de μ par T est définie par $T_\mu(B) = \mu\big(T^{-1}(B)\big)$. Déterminer les mesures images par T de chacune des mesures suivantes sur $\mathbb{R}$:

— $\mu = \delta_{4/3}$;

— μ mesure uniforme sur l'intervalle $[0, 2[$;

— μ mesure uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{3}\right[$.