

TD4. Mesure de Lebesgue

Exercice 1

Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}_+$. On note μ la mesure sur la tribu des boréliens définie par $\mu(A) = \lambda(kA)$, pour toute partie mesurable A .

- (a) Montrer que μ est invariante par translation.
- (b) En déduire que, pour toute partie mesurable A , et pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, on a $\lambda(kA) = k\lambda(A)$.

Exercice 2

On se place sur \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue λ ; on se donne un système de représentants $\{e_i\}_{i \in I}$ de \mathbb{R}/\mathbb{Q} , c'est-à-dire une famille de nombres réels qui vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! i \in I, x - e_i \in \mathbb{Q} .$$

L'existence d'une telle famille est une conséquence de l'*axiome du choix*.

- (a) Montrer que l'on peut supposer que tous les e_i appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.
- (b) Montrer les inclusions suivantes :

$$[0, 1[\subset \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Q} \\ -1 < a < 1}} \{a + e_i, i \in I\} \subset [-1, 2[.$$

- (c) Montrer que cette réunion est disjointe, c'est-à-dire que pour $a \neq b \in \mathbb{Q}$, on a

$$\{a + e_i, i \in I\} \cap \{b + e_i, i \in I\} = \emptyset .$$

- (d) En déduire que les ensembles $\{a + e_i, i \in I\}$ avec $a \in \mathbb{Q}$, $-1 < a < 1$, ne sont pas λ -mesurables (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 3

On se place sur l'espace \mathbb{R}^2 , muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, engendrée par les $[a, b[\times [c, d[$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$. Sur cette tribu, on dispose de la mesure de Lebesgue, définie par

$$\lambda([a, b[\times [c, d[) = (b - a)(d - c) .$$

Montrer que chacune des parties de \mathbb{R}^2 suivantes est mesurable, et donner sa mesure :

- (a) Un rectangle fermé $[a, b] \times [c, d]$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$.
- (b) Un segment parallèle à l'un des axes, une droite parallèle à l'un des axes.
- (c) Un segment quelconque, une droite quelconque.
- (d) L'intérieur d'un triangle dont deux côtés sont parallèles aux axes.
- (e) Un carré quelconque.

Exercice 4

On se place sur \mathbb{R} , muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue. Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse (en donnant si nécessaire un contre-exemple).

Rappels utiles :

- une *partition* de \mathbb{R} est une famille de parties de \mathbb{R} dont \mathbb{R} est l'union disjointe ;
 - \mathbb{Q} est dénombrable et dense dans \mathbb{R} .
- (a) Tout ouvert non vide U est mesurable et a une mesure strictement positive.
- (b) Si A est une partie mesurable de mesure strictement positive, alors A contient un ouvert U non vide.
- (c) Tout compact K est mesurable et a une mesure finie.
- (d) Si A est une partie mesurable de mesure finie, alors A est incluse dans un compact K .
- (e) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U dense dans \mathbb{R} , de mesure inférieure à ε .
- (f) Il existe une partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R} formée de boréliens A_n de mesure finie.
- (g) Il existe une partition $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R} formée de boréliens B_n de mesure infinie.