

TD2. Tribus et Mesures

Exercice 1

Soit X un ensemble, A et B deux parties de X . Décrire la tribu engendrée par A et B .

Exercice 2

Soit X un ensemble, on note \mathcal{T} l'ensemble des parties de X qui sont au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrable.

- (a) Montrer que \mathcal{T} est une tribu.
- (b) Quelle est la tribu engendrée par les singletons $\{x\}$, où x décrit X ?

Exercice 3

Soient Ω un ensemble et \mathcal{A} un ensemble de parties de Ω , stable par intersection et contenant Ω . On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties de Ω ; on a donc $\Omega \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On va montrer que le plus petit ensemble de parties \mathcal{F} contenant \mathcal{A} et stable par différence interne et union dénombrable monotone est une tribu : ce résultat est le *lemme de la classe monotone*.

1. On construit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$:
 - i) Montrer que, si \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des ensembles de parties de Ω qui contiennent \mathcal{A} et sont stables par différence interne et par unions dénombrables croissante et décroissante, alors il en va de même pour $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.
 - ii) En déduire qu'il existe une plus partie \mathcal{F} de $\mathcal{P}(\Omega)$ avec ces propriétés. Vérifier que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F} \subset T(\mathcal{A})$, où $T(\mathcal{A})$ est la tribu engendrée par \mathcal{A} .
2. On suppose que \mathcal{F} est stable par intersection. Vérifier que $\Omega \in \mathcal{F}$ et prouver que \mathcal{F} est stable par différence (quelconque) et par union dénombrable.
3. On montre que \mathcal{F} est stable par intersection :
 - i) Soit $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que \mathcal{F}_A contient \mathcal{A} , est stable par différence interne et par unions dénombrables croissante et décroissante. En déduire que $A \cap B \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{F}$.
 - ii) Soit $A \in \mathcal{F}$, on pose encore $\mathcal{F}_A = \{B \in \mathcal{P}(\Omega), A \cap B \in \mathcal{F}\}$. Même question que ci-dessus. En déduire que \mathcal{F} est stable par intersection.

Exercice 4

Quelles sont les mesures sur l'ensemble \mathbb{Z} muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ qui sont invariantes par translation ? (On pourra commencer par s'intéresser à la mesure des singletons.)

Exercice 5

Soit (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et $(T_n)_n$ une suite de parties mesurables. On veut prouver :

$$\mu\left(\liminf_n T_n\right) \leq \liminf_n \mu(T_n) .$$

- (a) Justifier que $\mu\left(\liminf_n T_n\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcap_{n \geq m} T_n\right) = \sup_m \mu\left(\bigcap_{n \geq m} T_n\right)$.
- (b) On fixe $m \in \mathbb{N}$, vérifier que $\mu\left(\bigcap_{n \geq m} T_n\right) \leq \mu(T_N)$ pour tout entier $N \geq m$, en déduire le résultat.

Exercice 6

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive, telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge. Pour A partie finie de \mathbb{N} , on pose :

$$\Phi(A) = \sum_{n \in A} a_n$$

avec la convention $\sum_{n \in \emptyset} a_n = 0$. Pour une partie T quelconque de \mathbb{N} , on pose :

$$\mu(T) = \sup\{\Phi(A), A \text{ finie et } A \subset T\} .$$

1. Quelle est la valeur de $\mu(\mathbb{N})$? de $\mu(\emptyset)$?
2. a) Soient $T \subset T'$ des parties de \mathbb{N} , montrer que $\mu(T) \leq \mu(T')$.
b) En déduire que $\mu(T)$ est finie pour toute partie T de \mathbb{N} .
c) Comparer $\Phi(T)$ et $\mu(T)$ lorsque T est une partie finie de \mathbb{N} .
3. On veut établir que l'application μ est une mesure sur la tribu des parties de \mathbb{N} en montrant, pour T, T' des parties disjointes de \mathbb{N} et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de \mathbb{N} :

$$\mu(T \cup T') = \mu(T) + \mu(T') , \quad \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T_n) .$$

On rappelle que le sup d'une partie de \mathbb{R} est le plus petit de ses majorants.

- a) Soit A une partie finie de $T \cup T'$, montrer que $\Phi(A) = \Phi(A \cap T) + \Phi(A \cap T')$; en déduire que $\mu(T \cup T') \leq \mu(T) + \mu(T')$.
- b) Montrer, pour A, B des parties finies de T et T' respectivement, que $\Phi(A) + \Phi(B) \leq \mu(T \cup T')$; en déduire que $\mu(T) + \mu(T') \leq \mu(T \cup T')$.
- c) Soit A une partie finie de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n$. Vérifier que $(A \cap T_n)_n$ est une suite croissante de parties finies de \mathbb{N} (constante à partir d'un certain rang) et que $\Phi(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(A \cap T_n)$; qu'en déduit-on ?
- d) Vérifier que, pour tout entier m , $\mu(T_m) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right)$ et conclure.

Exercice 7

1. Soient (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré avec $E \in \mathcal{T}$ tel que $0 < \mu(E) < +\infty$ et $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ telle que, si $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ et $A \neq B$, alors $A \cap B = \emptyset$. On définit les ensembles :

$$C = \{A \in \mathcal{A}, \mu(A \cap E) \neq 0\} \text{ et, pour } n \geq 1, C_n = \left\{A \in \mathcal{A}, \mu(A \cap E) \geq \frac{\mu(E)}{n}\right\} .$$

- a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, C_n est fini. (On peut raisonner par l'absurde.)
 - b) Montrer que $C \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ et en déduire que C est dénombrable.
2. On considère le cas particulier où $X = [0, 1]$ et \mathcal{T} est la tribu des parties de $[0, 1]$. Soit f une fonction réelle positive et bornée sur $X = [0, 1]$. Pour $T \in \mathcal{T}$, on pose

$$\mu(T) = \sup\left\{\sum_{t \in A} f(t), A \text{ finie et } A \subset T\right\},$$

avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$.

- a) Montrer qu'on peut prendre pour \mathcal{A} la famille des singletons.
- b) Calculer $\mu(\{x\})$ pour $x \in X$.

- c) On montre que μ est une mesure sur \mathcal{T} . Soit $(T_n)_n$ une suite de parties deux à deux disjointes de X :
- montrer que $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n)$;
 - montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(T_n) \Rightarrow \alpha < \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n\right)$;
 - en déduire la deuxième inégalité et conclure.
- d) Montrer que si $\mu(X) < +\infty$, alors f est nulle sauf sur un ensemble dénombrable (*utiliser 1.b*).

Exercice 8

On note $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu des boréliens de \mathbb{R} , engendrée par les ouverts de \mathbb{R} . On rappelle que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = T(\{]-\infty, x[, x \in \mathbb{R}\})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = T(\{[a, b[, a \leq b \in \mathbb{R}\})$.
2. Pour $a \leq b \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda([a, b]) = b - a \in \mathbb{R}^+$. On admet que ceci définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, appelée la *mesure de Borel*.
 - a) Montrer que $[a, b] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et que $\lambda([a, b])$ est finie pour tous $a \leq b \in \mathbb{R}$.
 - b) En écrivant $[a, b]$ comme intersection décroissante dénombrable d'intervalles $[a, b_n[$ pour des $b_n \in \mathbb{R}$ bien choisis, et en restreignant λ à $[a, b + 1]$, montrer que $\lambda([a, b]) = b - a$.
 - c) En déduire que $\{a\}$ est λ -mesurable de mesure nulle pour tout $a \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on pour $A \subset \mathbb{R}$ dénombrable ? Vérifier que $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = b - a$ pour $a \leq b \in \mathbb{R}$.
 - d) Montrer que tout ouvert non vide (resp. tout compact) de \mathbb{R} a une λ -mesure strictement positive (resp. finie).

Exercice 9

On pose :

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in [0, 1[, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \text{ avec } a_n \in \{0, 1\} \text{ pour tout } n \text{ et } \#\{n, a_n = 0\} \text{ fini} \right\} .$$

- (a) Montrer que $1/2^m \in \mathcal{D}$ pour tout $m \geq 1$.
- (b) Montrer que \mathcal{D} est réunion dénombrable d'ensembles $(\mathcal{D}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et établir pour tout m une bijection entre l'ensemble des parties de \mathbb{N} à m éléments et \mathcal{D}_m . Conclusion ?
- (c) Soit $x \in [0, 1[\setminus \mathcal{D}$ avec $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$ où $a_n \in \{0, 1\}$ pour tout n ; montrer que a_n est égal au reste modulo 2 de la partie entière de $2^n x$ pour tout n .
- (d) En déduire que l'ensemble des $x \in [0, 1[$ dont le développement dyadique existe et est unique est de complémentaire négligeable pour la mesure de Borel sur $[0, 1[$.

Exercice 10

On suppose qu'il existe une fonction f continue sur \mathbb{R} telle que $f = 1_{[0,1]}$ λ -presque partout, où λ désigne la mesure de Borel sur \mathbb{R} , c'est-à-dire :

$$f = 1_{[0,1]} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus N \text{ et } \lambda(N) = 0 .$$

- (a) Montrer que $A = f^{-1}(]0, 1])$ est un ouvert λ -négligeable.
- (b) Montrer que $[0, 1] \setminus N \neq \emptyset$; en déduire que f prend la valeur 1.
- (c) Montrer de manière analogue que f prend la valeur 0, puis que $A = f^{-1}(]0, 1])$ est un ouvert non vide de \mathbb{R} .
- (d) En déduire une contradiction. Conclusion ?