TD11. Fonctions caractéristiques, convergence

Exercice 1
Soit, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, une variable aléatoire X_n de loi de probabilité uniforme sur $[-n, n]$.

(a) Déterminer la densité f_n et la fonction de répartition F_n de X_n.

(b) Vérifier que la fonction caractéristique Φ_n de X_n est donnée par $\Phi_n(t) = \frac{\sin(nt)}{nt}$. Que vaut $\Phi_n(0)$?

(c) Calculer la limite Φ de la suite de fonctions $(\Phi_n)_{n\geq 1}$. Que peut-on dire de la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$?

Exercice 2
On considère le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

y / x	-1	0	1	
-1	$1/16$	$3/16$	0	
0	$1/16$	$1/4$	$3/16$	
1	$1/8$	$1/16$	$1/16$	

(a) Déterminer les lois marginales de X et de Y ; les deux variables sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer les fonctions caractéristiques Φ_X et Φ_Y.

(c) On pose $W = X + Y$. Etablir la loi de probabilité de W ; en déduire que sa fonction caractéristique vérifie

$$\Phi_W(t) = \cos^4(t/2) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) \ .$$

(d) Exhiber deux variables aléatoires indépendantes W_1 et W_2 telles que $W = W_1 + W_2$.

Exercice 3
On note X une variable aléatoire de loi $p(X{=}a) = 1$ pour un nombre réel a fixé et on considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires.

(a) Pour $\alpha > 0$, établir l'égalité

$$p(|X_n - X| > \alpha) = 1 - F_n(a + \alpha + 0) + F_n(a - \alpha) \ ,$$

où F_n désigne la fonction de répartition de X_n.

(b) On suppose que $(X_n)_n$ converge vers X en probabilité. Montrer que pour tous $\alpha, \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} &\forall x \leq a - \alpha \ , \quad F_n(x) \leq F_n(a - \alpha) < \varepsilon \ , \\ &\forall x \geq a + \alpha \ , \quad F_n(x) \geq F_n(a + \alpha + 0) > 1 - \varepsilon \ . \end{aligned}$$

En déduire que $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

(c) Établir la réciproque.

Exercice 4
On donne un nombre réel $a \neq 0$ et une famille $\mathcal{L} = (X_\theta)_{\theta>0}$ de variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes *fermée pour l'addition* ($X, Y \in \mathcal{L} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{L}$) et telle que $E(X_\theta) = a\theta$ pour tout $\theta > 0$.

1. On note Φ_{X_θ} la fonction caractéristique de X_θ.
   a) Montrer que $\Phi_{X_\theta}\Phi_{X_{\theta'}} = \Phi_{X_{\theta+\theta'}}$ pour tous θ, θ'.
   b) Vérifier que $\Phi_{X_1}(u) \neq 0$ pour u proche de 0. En déduire qu'il existe une fonction $\alpha(u)$ définie sur un voisinage ouvert U de 0 telle que $\Phi_1(u) = \mathrm{e}^{\alpha(u)}$ pour $u \in U$. À quelle condition supplémentaire α est-elle dérivable ?
   c) Montrer que, pour tout $\theta > 0$ et tout $u \in U$, $\Phi_{X_\theta}(u) = \mathrm{e}^{\theta\alpha(u)}$.
2. On note Ψ_{X_θ} la seconde fonction caractéristique de X_θ.
   a) Montrer que, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de 0, sur lequel α est dérivable, on a
   $$\Psi_{X_\theta}(u) = iua\theta\big(1 + \beta(u)\big) \ ,$$
   où β est une fonction de u indépendante de θ qui tend vers 0 quand u tend vers 0.
   b) On suppose $X_\theta \in L^2$ pour tout $\theta > 0$ (donc les moments des X_θ existent au moins jusqu'à l'ordre 2), montrer qu'on peut écrire
   $$\Psi_{X_\theta}(u) = iua\theta + \frac{i^2}{2}u^2\sigma^2\theta + \theta u^2\gamma(u) \ ,$$
   où γ est une fonction de u indépendante de θ qui tend vers 0 quand u tend vers 0 et σ est l'écart-type de X_1.
   c) Montrer qu'alors la variable $Y_\theta = \dfrac{X_\theta - a\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$ est centrée réduite, de fonction caractéristique
   $$\Phi_{Y_\theta}(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{\sigma^2}\gamma\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\theta}}\right)\right) \ .$$
   Qu'en déduit-on pour la convergence en loi de $(Y_\theta)_\theta$ quand $\theta \to +\infty$?

Exercice 5
On considère une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n\geq1}$ de même loi uniforme sur $]0,1[$.

1. On note, pour $n \geq 1$,
   $$M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \frac{1}{2}\right) \ .$$
   (a) Déterminer la fonction caractéristique Φ_{M_n} de M_n pour tout $n \geq 1$.
   (b) Calculer la limite de $\Phi_{M_n}(t)$ quand n tend vers $+\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire la convergence en loi de la suite de variables $\big(M_n\big)_n$.
2. On note maintenant, pour $n \geq 1$,
   $$T_n = \max_{1\leq j\leq n} X_j \ .$$
   (a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$,
   $$T_n < x \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}\,,\ X_j < x \ .$$
   En déduire la fonction de répartition de T_n, puis sa densité.
   (b) Montrer que la suite de variables $\big(T_n\big)_n$ converge en probabilité vers la constante 1.
   (c) On note, pour $n \geq 1$, $A_n = \big\{X_n > 1 - \frac{1}{n}\big\}$. Montrer que la série des $p(A_n)$ diverge ; en déduire que la suite de variables $\big(T_n\big)_n$ converge presque sûrement vers la constante 1.