Université de Limoges **Année Universitaire 2007-2008**
Faculté des Sciences

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Feuille d'exercices n^o 5 : Cinématique

Exercice 1. Un mouvement ponctuel est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout t, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}(t)$ sont colinéaires.
1. Montrer qu'un mouvement ponctuel est à accélération centrale si et seulement s'il existe O fixe tel que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}$ est constant (où $\overrightarrow{V}$ est le vecteur vitesse).
2. Montrer qu'un mouvement ponctuel à accélération centrale est soit rectiligne, soit plan. Montrer que dans le deuxième cas, la trajectoire ne passe pas par le centre O et que la vitesse ne s'annule pas.

Exercice 2. *Loi des aires*
Soit un mouvement ponctuel dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ défini par : $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = r(t)\, \overrightarrow{u}_{\theta(t)}$, $t \in I$.
Montrer qu'il s'agit d'un mouvement à accélération centrale de centre O si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

où C est une constante dite *constante des aires*.
Application. On se donne une spirale logarithmique (Σ) d'équation polaire $r = r_0 e^{m\theta}$ ($r_0 > 0, m > 0$ fixés). On considère un point M mobile sur la spirale logarithmique (Σ) avec un mouvement à accélération centrale de centre O. Les condition initiales sont : $t = 0$, $\theta_0 = 0$, et $\overrightarrow{V_0} = \frac{r_0}{2m}(m\, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ (vecteur vitesse).
Montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0^2}{2m}$. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$ (c'est à dire θ en fonction de t). En déduire que r suit la loi horaire $r(t) = r_0\sqrt{1+t}$.

Exercice 3. *Formules de Binet*
Considérons un mouvement ponctuel à accélération centrale de centre O dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer en utilisant les coordonnées polaires $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(\theta(t))\, \overrightarrow{u}_{\theta(t)}$ que l'on a :

$$\overrightarrow{V} = -C \frac{dp}{d\theta} \vec{u}_\theta + C\, p\, \vec{v}_\theta, \qquad \overrightarrow{\Gamma} = -C^2 p^2 \left(p + \frac{d^2 p}{d\theta^2} \right) \vec{u}_\theta,$$

où on a posé $p = 1/\rho$ et C est la constante des aires.