Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Feuille d'exercices n° 2 : Enveloppes de droites, lieux géométriques

Exercice 1. a. Déterminer une équation paramétrique de l'enveloppe de la famille de droites d'équation

$$(D_t) \qquad (2t)\,x + 2(t+1)\,y + t^2 = 0.$$

b. Donner une équation cartésienne de l'enveloppe précédente.

Exercice 2. On considère une famille de segments $[A_t, B_t]$ de longueur 1 dont les extrémités se déplacent sur les axes perpendiculaires $[Ox)$ et $[Oy)$. On note t la pente du segment $[A_t, B_t]$ pour $t \in]-\infty, 0]$.

1. a. Donner les coordonnées des extrémités A_t et B_t du segment en fonction de la pente t.
   b. En déduire que l'équation de la droite (A_tB_t) est $-tx + y + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0$.
   c. Déterminer une paramétrisation de l'enveloppe $\mathcal{A}$ de la famille des droites $(A_tB_t)_{t\in]-\infty,0]}$.

2. On note C_t le point tel que $(OA_tC_tB_t)$ forme un rectangle. Montrer que le point de contact entre la tangente (A_tB_t) et l'arc $\mathcal{A}$ est le projeté orthogonal de C_t sur la droite (A_tB_t).

3. On effectue le changement de paramétrisation $t = \tan(-\theta)$.
a. Dans quel intervalle varie θ pour cette nouvelle paramétrisation ?
b. Montrer que la nouvelle paramétrisation de $\mathcal{A}$ est $\Phi(\theta) = (\cos^3(\theta), \sin^3(\theta))$.

Exercice 3. *Antipodaire*
Soit Γ une courbe plane et O un point de $\mathcal{P}$. L'*antipodaire* de Γ par rapport à O est l'enveloppe des droites passant par un point M de Γ et perpendiculaires à (OM).
1. On suppose que Γ est définie par l'équation polaire $r = f(\theta)$ dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que l'antipodaire de Γ par rapport à O admet la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\,\cos\theta - \,f'(\theta)\,\sin\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\,\sin\theta + \,f'(\theta)\,\cos\theta. \end{cases}$$

2. Déterminer l'antipodaire par rapport à O de la courbe d'équation polaire $r = a + b\,\cos\theta$ $(a \geq 0, b \geq 0)$. Que retrouve t-on pour $a = 0$? $b = 0$?
3. Montrer que l'antipodaire par rapport à O de la courbe d'équation polaire $r = \cos 3\,\theta$ admet la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x(\theta) = 2\,\cos 2\,\theta - \cos 4\,\theta \\ y(\theta) = -2\,\sin 2\,\theta - \sin 4\,\theta. \end{cases}$$

Déterminer alors l'expression de $z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta)$ en fonction de θ.

Exercice 4. *Caustique*
Soit (Γ, f) une courbe paramétrée plane de classe $\mathcal{C}^2$ et un point $S \in \mathcal{P}$ (resp. une direction de droite D de $\mathcal{P}$). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit D_t la droite passant par $f(t)$ et S (resp. la droite passant par $f(t)$ et de direction D) et soit Δ_t la droite symétrique de D_t par rapport à la normale à Γ en $f(t)$. L'enveloppe de la famille (Δ_t) s'appelle la *caustique par réflexion* de la courbe Γ.
On s'intéresse désormais au cas où Γ est un cercle.
1. Soit D une droite du plan $\mathcal{P}$. Donner une paramétrisation de la caustique du cercle Γ par rapport à D (on commencera par déterminer dans un repère ad hoc l'équation de la droite Δ_t).
2. Soit S un point du cercle Γ. Déterminer la caustique du cercle Γ par rapport à S.