

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle

Feuille d'exercices n°1 : Courbes paramétrées planes, courbes polaires

Exercice 1. Soit f et g deux fonctions numériques. Déterminer les symétries de la courbe paramétrée définie par $\phi(t) = (f(t), g(t))$ lorsque :

1. f et g sont paires,
2. f est paire, g est impaire,
3. f est impaire, g est paire,
4. f et g sont impaires.

Exercice 2. Pour chacune des courbes suivantes, donner la nature (i.e point singulier, d'inflexion, de rebroussement, etc.) du point $\Omega_{(t=0)}$ et tracer l'allure locale de la courbe ; on précisera, pour chaque courbe, le repère local $(\Omega, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ utilisé et le sens de parcours.

$$(a) \begin{cases} x = t + t^3 + t^5 + \mathcal{O}(t^6) \\ y = 2t + 2t^3 - t^5 + \mathcal{O}(t^6) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x = t^2 - t^3 + t^4 + \mathcal{O}(t^5) \\ y = -t^2 + t^3 + t^4 + \mathcal{O}(t^5) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x = 1 + t^2 + t^3 + t^4 + \mathcal{O}(t^5) \\ y = 1 - t^2 + t^3 - t^4 + \mathcal{O}(t^5) \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x = 1 + t^3 - t^4 + t^6 + \mathcal{O}(t^7) \\ y = 1 + t^4 - t^3 + t^6 + \mathcal{O}(t^7) \end{cases}$$

Exercice 3. On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) par rapport auquel les coordonnées sont notées x et y . Soit k une constante réelle strictement positive. On note Φ la courbe décrite par le point M de coordonnées :

$$x = 1 + k \cos t, \quad y = \tan t + k \sin t$$

où t décrit la réunion $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

- 1) Dans le cas $k = 1$, étudier le(s) point(s) singulier(s) éventuel(s) de la courbe ϕ et, pour chacun, donner (en justifiant les calculs) sa nature et l'allure locale de ϕ au voisinage.
- 2) Discuter, suivant k , le nombre (et la position) des points de ϕ à tangente horizontale.
- 3) Dans le cas particulier $k = 8$, étudier la courbe Φ (symétries, variations, étude asymptotique, représentation graphique...).
- 4) Donner l'allure de Φ dans le cas général, en distinguant :
 - a) les cas où $0 < k < 1$,
 - b) le cas où $k = 1$,
 - c) les cas où $k > 1$.
- 5) Déterminer une fonction f à deux variables telle que $f(x, y) = 0$ soit une équation de Φ .
- 6) Donner une équation polaire de Φ .

Exercice 4. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit la courbe \mathcal{H} par la paramétrisation suivante:

$$\begin{cases} x(\theta) = 2 \cos 2\theta - \cos 4\theta \\ y(\theta) = -2 \sin 2\theta - \sin 4\theta, \end{cases}$$

lorsque θ décrit l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

1. Déterminer l'expression de $z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta)$ en fonction de θ .
2. Montrer que $|z'(\theta)|^2 = 32(1 + \cos 6\theta)$. En déduire les valeurs de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ correspondant à des points stationnaires.
 - (a) Montrer que $z(\theta + \pi/3) = e^{-2i\pi/3} z(\theta)$. Par quelle transformation géométrique déduit-on le point $z(\theta + \pi/3)$ à partir de $z(\theta)$? Comment déduit-on le tracé complet de \mathcal{H} à partir de sa restriction:
 - à l'intervalle $[-\pi/6, \pi/6]$?
 - à l'intervalle $[0, \pi/6]$?
 - (b) Déterminer la tangente à \mathcal{H} pour $\theta = 0$.
 - (c) Calculer $z''(\pi/6)$ et $z'''(\pi/6)$. En déduire un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{H} en $\theta = \pi/6$ ainsi que la nature du point correspondant (point ordinaire, d'inflexion,...).
 - (d) Tracer la courbe \mathcal{H} pour $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$, puis effectuer le tracé complet de \mathcal{H} .

Exercice 5. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée par $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2 - 9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$.

Exercice 6. Déterminer les points doubles associés à la courbe paramétrée de l'exercice précédent.

Exercice 7. Tracer la courbe d'équation polaire $r = \ln(1 - \sin \theta)$. Préciser les branches infinies et la tangente à l'origine.

Exercice 8. Considérons le plan \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. On appelle *spirale logarithmique* de pôle O la courbe plane d'équation polaire $r = r_0 e^{m\theta}$, où r_0 et m sont deux paramètres réels non nuls. Notons $\mathcal{C}_{r_0, m}$ une telle spirale.

1. Par quelle transformation géométrique du plan passe-t-on
 - a) de $\mathcal{C}_{r_0, m}$ à $\mathcal{C}_{r_0, -m}$?
 - b) de $\mathcal{C}_{r_0, m}$ à $\mathcal{C}_{-r_0, m}$?
 - c) de $\mathcal{C}_{r_0, m}$ à $\mathcal{C}_{-r_0, -m}$?
2. Montrer que l'angle V entre la droite $\mathbb{R} \vec{u}_\theta$ et la tangente à $\mathcal{C}_{r_0, m}$ au point $M(\theta)$ est constant et calculer cet angle en fonction de m .
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{1,1}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 9. Podaire

On s'intéresse à l'arc \mathcal{L} de lemniscate défini par l'équation polaire

$$r = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right].$$

1. Soit \vec{u}_θ le vecteur défini par $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et \vec{T} le vecteur tangent unitaire à \mathcal{L} . Montrer que l'angle $V = \widehat{(\vec{u}_\theta, \vec{T})}$ est égal à $\frac{\pi}{2} + 2\theta$.
La podaire Γ de \mathcal{L} par rapport à O est l'ensemble des projetés orthogonaux de O sur les tangentes de \mathcal{L} . Soit H le projeté orthogonal de O sur la tangente à \mathcal{L} au point M .
2. Calculer l'angle $\widehat{(\vec{u}_\theta, \vec{OH})}$ puis l'angle $\alpha = \widehat{(\vec{i}, \vec{OH})}$ en fonction de θ .
3. Exprimer $\rho = OH$ en fonction de θ et OM , puis en fonction de θ seulement.
4. Donner l'équation polaire (ρ en fonction de α) de la podaire Γ puis tracer la courbe Γ .