Université de Limoges
Faculté des Sciences

Année Universitaire 2007-2008

Licence de Mathématiques
Géométrie Différentielle
Partiel du 8 novembre 2007

Exercice 1. On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \quad .$$

1) Déterminer le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel la courbe est définie ; montrer que cet intervalle donne $\mathcal{C}$ toute entière, puis que l'on peut se contenter d'étudier la courbe sur $I = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction ρ sur l'intervalle I. Préciser le vecteur tangent au point de paramètre 0, ainsi que les points singuliers de la courbe $\mathcal{C}$.

3) Soit $\theta \in I$, montrer que le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ au point de paramètre θ est colinéaire à

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\vec{u}_\theta + \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)\vec{v}_\theta \quad ,$$

où $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.

4) En déduire que le vecteur tangent à $\mathcal{C}$ au point de paramètre θ fait un angle constant, que l'on précisera, avec $\vec{\imath}$. En déduire la nature de la courbe $\mathcal{C}$ et la tracer, en différenciant les points de paramètre $\theta \in I$ des autres.

Exercice 2. Les courbes considérées ici se trouvent dans le plan euclidien, qui est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le résultat de la question 1.b) peut être utilisé pour la question 2.

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ une courbe régulière donnée par le paramétrage $M : t \in I \mapsto M(t)$. Pour $t \in I$, on note $\overrightarrow{V} = \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ le vecteur tangent au point de paramètre t et $\overrightarrow{\Gamma} = \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$ son vecteur dérivé. On note comme d'habitude $\overrightarrow{T}$ le vecteur tangent unitaire et $\overrightarrow{N}$ le vecteur normal unitaire du repère de Frénet au point de paramètre t.
Enfin, on note v la norme de $\overrightarrow{V}$ et $\gamma = \dfrac{dv}{dt}$; on rappelle que $\overrightarrow{V} = v\overrightarrow{T}$.

a) Démontrer que

$$\overrightarrow{\Gamma} = \gamma\overrightarrow{T} + v^2 c\overrightarrow{N} \quad ,$$

où c est la courbure de la courbe au point de paramètre t.

b) En déduire la formule suivante pour la courbure :

$$c = \frac{\det(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma})}{v^3} \quad ,$$

où le déterminant est pris sur les coordonnées de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ (dans n'importe quelle base du plan).

2) Dans la suite, on donne une fonction ρ définie sur I et on définit le paramétrage M de la courbe $\mathcal{C}$ par :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}_\theta \ , \qquad \text{où } \ \vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \ .$$

De plus on suppose que ρ ne s'annule pas sur I et, pour $\theta \in I$, on pose $a(\theta) = \dfrac{1}{\rho(\theta)}$.

a) Vérifier que $\mathcal{C}$ est régulière et que $a^2\overrightarrow{V} = -a'\vec{u}_\theta + a\vec{v}_\theta$, où $\vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.

b) Dériver l'égalité précédente, en déduire que :

$$a^4 \det(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{\Gamma}) = a(a + a'') \ .$$

(On conseille d'utiliser le fait que $\det$ est une application bilinéaire antisymétrique.)

c) Donner la solution générale de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = 0 \ .$$

d) En déduire la forme générale de l'équation polaire des droites ne passant par O.

Exercice 3. On appelle « croix de Malte » la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x &=& \cos(t)(\cos^2(t) - 2) \\ y &=& \sin(t)\cos^2 t \end{cases}$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser les résultats suivants :

(R1) : on pose $a = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, on a

$$\begin{cases} x(a+h) &=& -4/3\,\cos(a) + \cos(a)h^2 + 5/3\,\sin(a)\,h^3 - 1/3\,\cos(a)\,h^4 + O\left(h^5\right) \\ y(a+h) &=& 2/3\,\sin(a) - 2\,\sin(a)\,h^2 + 1/3\,\cos(a)\,h^3 + \dfrac{17}{12}\,\sin(a)\,h^4 + O\left(h^5\right) \end{cases}$$

(R2) : $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ et, plus loin, la linéarisation $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$ (!)

1) Déterminer les symétries de la croix de Malte. En déduire un intervalle d'étude convenable.

2) Montrer que le le vecteur tangent en un point M_t de la courbe est donné par :

$$\frac{d\overrightarrow{M}_t}{dt} = (3\cos^2 t - 2)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \ ;$$

en déduire le repère de Frénet $(M_t, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$.

3) Déterminer les points singuliers de la croix de Malte dans l'intervalle $[0, \pi/2]$; étudier leur nature et tracer l'allure locale (on précisera le sens de parcours de la courbe).

4) Calculer la longueur de l'arc de la croix de Malte décrit par M_t quand t parcourt $[0, a]$, puis quand t parcourt $[0, \pi/2]$.

5) Dans cette question , $t \in [0, a[$. Déterminer $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ puis $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$; en déduire le rayon de courbure de la courbe au point M_t puis les coordonnées du centre de courbure.

6) Soit M_t un point régulier de la croix de Malte. On note τ_t le point d'intersection de la tangente en M_t avec O_x et ν_t le point d'intersection de la normale en M_t avec O_x. Maurice d'Ocagne a écrit en 1884 que τ_t est le milieu de $[O, \nu_t]$. Démontrer ce résultat.