

# Devoir Surveillé 3

20 janvier 2008 - durée 3h

*Documents : une feuille double autorisée par personne ; calculatrice autorisée pour un usage personnel.*

*Toutes les réponses doivent être justifiées. Les exercices sont indépendants.*

## Exercice 1

Un dentiste fait remplir à ses patients un questionnaire dans lequel il leur demande de remplir le tableau suivant, en cochant la case adaptée. «Habituellement, je me brosse les dents : »

	oui	non
le matin		
le midi		
le soir		

- Combien y a-t-il de façons de remplir le tableau (en répondant à chaque question) ?
  - En supposant les différentes façons de remplir le tableau équiprobables (ce qui n'est pas une hypothèse réaliste comme on va le voir ensuite), quelle est la probabilité qu'un tableau pris au hasard comporte au moins 2 croix dans la colonne «oui» ? exactement 2 ?
  - Soit  $N$  la variable aléatoire comptant le nombre de croix dans la colonne «oui» d'un tableau rempli par un patient. Sous la même hypothèse d'équiprobabilité que ci-dessus, écrire la loi de probabilité de  $N$ , calculer son espérance, sa variance et son écart-type.
- Sur l'ensemble des patients qui ont répondu à la question, le dentiste a calculé que 51% se brossent habituellement les dents le matin, 38% le midi, 72% le soir ; 20% se les brossent 3 fois par jour ; enfin 10% ne se les brossent que le matin, 6% que le midi, 35% que le soir.
  - Faire un diagramme qui illustre la situation ; on notera  $x$  le pourcentage de personnes qui se brossent les dents matin et soir (et pas le midi),  $y$  matin et midi (et pas le soir),  $z$  midi et soir (et pas le matin).
  - Écrire les équations vérifiées par  $x$  et  $y$ ,  $x$  et  $z$ ,  $y$  et  $z$ . En déduire que  $x = 13$ ,  $y = 8$  et  $z = 4$ .
  - Calculer le pourcentage de patients qui admettent ne jamais se brosser les dents.
  - Quel est le pourcentage de patients qui se brossent les dents exactement 1 fois par jour ? au moins 1 fois par jour ?

*NB : les données utilisées dans cet exercice sont entièrement fantaisistes.*

## Exercice 2

En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce peut présenter deux sortes de défauts : 8% des pièces présentent le défaut  $D_1$ , 15% le défaut  $D_2$ , 5% présentent les deux défauts à la fois. On choisit une pièce au hasard, on notera :

- $D_1$  l'évènement « la pièce présente le défaut  $D_1$  » ;
- $D_2$  l'évènement « la pièce présente le défaut  $D_2$  » ;
- $D = D_1 \cup D_2$  l'évènement « la pièce présente le défaut  $D_1$  ou le défaut  $D_2$  ».

Dans le dernier cas, on dira que la pièce est *défectueuse*.

- Recopier et compléter :  $P(D_1) = \dots$ ,  $P(D_2) = \dots$ ,  $P(D_1 \cap D_2) = \dots$
  - En déduire la probabilité  $P(D)$  que la pièce soit défectueuse (on précisera la formule utilisée).
- Calculer la probabilité que la pièce ait le défaut  $D_1$ , sachant qu'elle a le défaut  $D_2$  (on rappellera la définition de la probabilité conditionnelle demandée).
  - En déduire la probabilité que la pièce n'ait pas le défaut  $D_1$ , sachant qu'elle a le défaut  $D_2$ .
- Écrire  $P(D_1)$  en fonction de  $P(D_1|D_2)$  et de  $P(D_1|\bar{D}_2)$  (formule des probabilités totales).
  - En déduire la probabilité que la pièce ait le défaut  $D_1$ , sachant qu'elle n'a pas le défaut  $D_2$ .

### Exercice 3

1. a) Calculer les racines réelles de chacun des trinômes suivants :

$$2x^2 - 4x - 6, \quad x^2 - x + \frac{1}{4}, \quad -3x^2 + 8x - 6.$$

- b) Donner les tableaux de signes des 3 trinômes.  
2. a) Donner les formes factorisées des trinômes  $2x^2 - 4x - 6$  et  $x^2 - x + \frac{1}{4}$ .  
b) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{2x^2 - 4x - 6}$$

- c) Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $\frac{1}{2}$  ;  
d) puis les limites de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 3 par valeurs supérieures et quand  $x$  tend vers 3 par valeurs inférieures. Qu'en déduit-on pour le graphe de la fonction  $f$  ?  
e) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Qu'en déduit-on pour le graphe de la fonction  $f$  ?

### Exercice 4

On considère les nombres complexes  $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ,  $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ .

- a) Donner les images de  $z_1$  et  $z_2$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (noter que  $\sqrt{2} \approx 1,4$  et  $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4$ ).  
b) Calculer la forme algébrique de  $z_1 z_2$ .  
c) Prouver que  $|z_1| = 2$  et  $|z_2| = \frac{1}{2}$ , puis que  $\arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$  et  $\arg(z_2) = \frac{\pi}{6}$ .  
d) En déduire les valeurs de  $|z_1 z_2|$  et  $\arg(z_1 z_2)$  ; donner la forme trigonométrique de  $z_1 z_2$ .  
e) Déterminer les valeurs exactes de  $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 5

Soient  $z_1 = a + ib$  et  $z_2 = c + id$  des complexes sous forme algébrique.

- a) Donner en fonction de  $a, b, c, d$  la forme algébrique de  $z_1 + z_2$  et de  $z_1 - z_2$  ;  
b) en déduire des expressions de  $|z_1 + z_2|^2$  et de  $|z_1 - z_2|^2$ .  
c) Établir l'égalité :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

- d) On prend  $a = 4$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  et  $d = 3$ . Représenter les images de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$  et  $z_1 - z_2$  dans le plan complexe. Tracer le quadrilatère reliant l'origine du repère, l'image de  $z_1$ , celle de  $z_1 + z_2$  et celle de  $z_2$ . En déduire une interprétation géométrique de l'égalité précédente.

### Exercice 6

On s'intéresse à la fonction  $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ .

1. a) Donner le domaine de définition de la fonction  $g$ .  
b) Calculer  $g(0)$ , puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .  
2. a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , développer l'expression  $(x-1)(x+1)^2$ .  
b) En déduire que  $g(x) = (x-1)(x+1)^2$  et donner les solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .  
3. On considère la fonction  $h(x) = 3x^2 + 2x - 1$ .  
a) Trouver les racines du trinôme  $3x^2 + 2x - 1$ .  
b) En déduire le tableau de signes de la fonction  $h$ .  
4. a) Calculer  $g'(x)$  ; en déduire le tableau de variations de  $g$ .  
b) Donner la pente de la tangente au graphe de  $g$  aux points d'abscisses  $-1$ ,  $\frac{1}{3}$  et  $1$ .  
c) Calculer  $g(-1)$  et  $g(1)$  ; donner une valeur approchée de  $g\left(\frac{1}{3}\right)$ .  
d) Faire l'esquisse du graphe de  $g$ .