

TP 2 : cercles, triangles, coniques

On note $\mathcal{P}$ le plan euclidien.

Exercice 1 (Cocyclicité)

On va montrer le résultat suivant.

Théorème 1 Soient A, B deux points distincts, α un réel avec $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$; on note $\mathcal{L}_\alpha$ le lieu des points sommets d'un angle de mesure (en radians) égale à α s'appuyant sur A et B :

$$\mathcal{L}_\alpha = \{M \in \mathcal{P} \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{\pi}\} ,$$

et $\mathcal{C}$ le cercle passant par A et B et admettant pour tangente en A la droite faisant un angle de mesure α avec la droite (AB) , alors :

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{C} \setminus \{A, B\} ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{L}_\alpha$ est égal au cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

1. Construction

- Ouvrir une nouvelle feuille de dessin **Geogebra**. Placer deux points distincts A et B , construire la droite (AB) puis le cercle $\mathcal{C}$ (on pourra choisir $\alpha = 30^\circ$ dans la fonction Angle de mesure donnée ; notons C le point construit par cette fonction).
- Placer un point M sur le cercle et prendre la mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Noter les valeurs trouvées quand M se déplace sur le cercle. Que remarque-t-on ?
- Éditer les Propriétés du point C obtenu à la question a) et modifier la valeur donnée à α ($60^\circ, 90^\circ, \dots, 15^\circ, \dots$) ; noter vos observations.

Sauvegarder le résultat dans un fichier **Cocyclique**.

2. Démonstration

On rappelle le **théorème de l'angle inscrit** prouvé dans le TP1 : soient P et Q deux points distincts d'un cercle Γ de centre Ω . Alors, pour tout point $N \in \Gamma$ distinct de P et Q , on a :

$$(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega Q}) \equiv 2(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}) \pmod{2\pi} ;$$

de plus, si θ est une mesure (modulo π) de l'angle formé par la tangente à Γ en P et la droite (PQ) , on a :

$$(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega Q}) \equiv 2\theta \pmod{2\pi} .$$

On se place dans les hypothèses du **Théorème 1** énoncé au début de l'exercice. On va montrer l'égalité $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ par double inclusion, à l'aide du **théorème de l'angle inscrit** rappelé ci-dessus.

a) L'inclusion $\mathcal{C} \setminus \{A, B\} \subseteq \mathcal{L}_\alpha$:

(i) soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$, justifier que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2\alpha \pmod{2\pi}$;

(ii) En déduire que, pour tout $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, on a $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 2\alpha \pmod{2\pi}$, puis prouver l'inclusion cherchée.

b) L'inclusion $\mathcal{C} \setminus \{A, B\} \supseteq \mathcal{L}_\alpha$:

(i) Soit $M \in \mathcal{L}_\alpha$, justifier que A, B et M ne sont pas alignés.

(ii) On considère le cercle $\mathcal{C}'$ passant par A, B et M . Montrer que la tangente à $\mathcal{C}'$ en A fait un angle de mesure α modulo π avec la droite (AB) ; en déduire que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même centre, puis qu'ils sont confondus.

c) Conclure.

3. Corollaires

Prouver les deux propriétés suivantes :

a) soit ABC un triangle non aplati, alors $M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ appartient au cercle circonscrit à ABC si et seulement si

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} ;$$

b) quatre points distincts A, B, C, D du plan sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi} .$$

Exercice 2 (Triangle podaire)

1. Construction

a) Ouvrir une nouvelle feuille de dessin **Geogebra**. Placer quatre points A, B, C et M , puis construire les droites $(AB), (BC), (CA)$ et les projetés orthogonaux P, Q, R de M sur ces droites. Tracer le *triangle podaire* PQR et faire afficher son aire.

b) Chercher les positions du point M qui rendent l'aire du triangle podaire aussi petite que possible. Que remarque-t-on ?

c) Construire le cercle circonscrit au triangle ABC . Vérifier que les points P, Q, R sont alignés exactement quand M est positionné sur ce cercle. Ils forment la *droite de Simson* de M relative à ABC ; tracer cette droite.

d) Noter la lettre étiquetant le cercle circonscrit (mettons que c'est k). Éditer les **Propriétés** du point M et dans la case **Valeur**, inscrire **Point[k]** ; dans les **Propriétés** de la droite de Simson, cocher la case **Afficher la trace** (et v modifier la couleur pour bien la distinguer du reste de la figure).

Faire tourner M sur le cercle circonscrit à ABC . La figure dessinée par les droites de Simson correspondantes s'appelle un *deltoïde*, pourquoi ?

e) Tracer les symétriques de M par rapport aux trois côtés du triangle ABC ; vérifier qu'ils sont alignés (c'est la *droite de Steiner* de M).

f) Dans la case **Définition** de M , remplacer **Point[k]** par le couple des coordonnées de M (de sorte qu'il ne soit plus astreint à rester sur le cercle). Vérifier que les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle ne sont alignés que quand M appartient au cercle. Sauvegarder le résultat dans un fichier **Podaire**.

2. Démonstrations

- Montrer que BQM et BPM sont deux triangles inscrits dans un même cercle ; de même pour CQM et CRM .
- En déduire à l'aide des propriétés établies dans l'exercice précédent l'égalité d'angles orientés de droites :

$$(QP, QR) \equiv (BP, BM) + (CM, CR) \pmod{\pi} .$$

- En déduire que P, Q, R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit à ABC .
- Notons P', Q', R' les symétriques de M par rapport aux droites $(AB), (BC), (CA)$. Montrer qu'ils sont images de P, Q, R par une même application affine que l'on caractérisera. En déduire qu'ils sont alignés si et seulement si P, Q, R le sont.

Exercice 3 (Coniques)

1. Par 5 points du plan, passe une conique et une seule...

- Ouvrir une nouvelle feuille de dessin **Geogebra**. Placer l'origine du repère au centre de la fenêtre, un point A sur l'axe des abscisses, un point B sur celui des ordonnées et un point C en dehors des axes. Faire apparaître les symétriques A' et C' de A et C par rapport à l'axe des ordonnées.
- Tracer la conique passant par les points A, A', B, C, C' . Justifier l'existence et l'unicité d'une conique passant par 5 points du plan, sous une condition à préciser, qui apparaît en raisonnant à l'aide de l'équation cartésienne générale d'une conique du plan :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \eta = 0 .$$

- En déplaçant l'un des points A, B, C , on obtient facilement des ellipses et des hyperboles. Choisir une équation simple de parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et coupant l'axe des abscisses en deux points (indiquer laquelle sur votre compte-rendu) ; puis déplacer A, B et C pour que leurs coordonnées satisfassent à l'équation choisie (si on peine à placer C au bon endroit, on peut éditer ses coordonnées en faisant afficher ses **Propriétés**).
Sauvegarder le résultat dans un fichier **Parabole**.

2. Du cercle à l'ellipse

- Reprendre la stratégie ci-dessus pour obtenir un cercle de centre l'origine et de rayon 5 unités (on se débrouillera pour que C ait ses deux coordonnées entières).
- Placer un point M sur le cercle et construire la tangente au cercle en ce point. Que devient cette droite si l'on déplace le point A ?
- On revient à la position circulaire. Par un clic droit sur la feuille, faire apparaître le menu **Feuille de travail** et à la rubrique **axe x : axe y**, changer le rapport d'échelle de 1:1 en 1:2, 1:5, 2:1... Interpréter mathématiquement les modifications observées ; que devient la tangente au cercle construite à la question précédente cette fois-ci ?

3. Ellipses

De nouveau dans un repère orthonormé, nous allons construire une approximation de la tangente en un point d'une ellipse puis, à partir de là, retrouver sa description en termes de *foyer*, *directrice*, *excentricité*. On rappelle qu'une ellipse admet un *centre* (de symétrie) et,

si F désigne son foyer et F' le symétrique de F par rapport au centre, la droite (FF') est l'axe focal de l'ellipse (orthogonal à la directrice) et recouvre son grand axe.

On admet la propriété suivante : *la tangente en un point M d'une ellipse de foyers F, F' est la bissectrice extérieure issue de M du triangle FMF' .*

- a) Revenir au format 1:1 et déplacer les points pour obtenir une ellipse non circulaire, de grand axe l'axe des ordonnées. Déterminer le centre O de l'ellipse. Placer un point « candidat » F sur le grand axe de l'ellipse et tracer son symétrique F' par rapport à O .
- b) Étant donné un point M sur l'ellipse, construire la bissectrice extérieure issue de M du triangle FMF' , puis le deuxième point d'intersection N de celle-ci avec l'ellipse.
- c) Déplacer le point F jusqu'à ce que les points M et N soient confondus (pour une meilleure précision, on se basera sur les coordonnées de M et N ; on pourra diminuer la valeur de l'**Incrément** des coordonnées de F dans le menu **Algèbre** de ses **Propriétés**).
- d) Faire afficher la quantité $s = MF + MF'$; noter les différentes valeurs prises par s quand M se déplace sur l'ellipse. Qu'en conclut-on ? Cette propriété est à la base de la définition *bifocale* de l'ellipse.
- e) Faire afficher et noter la valeur de $e = FF'/(MF + MF')$.
- f) Placer un point K sur l'axe des ordonnées en dehors de l'ellipse ; tracer la droite horizontale passant par ce point et le projeté orthogonal H de M sur cette droite.
- g) Faire afficher la valeur MF/MH et déplacer le point K jusqu'à ce qu'elle soit égale à e .
- h) Noter les valeurs du rapport MF/MH quand M décrit l'ellipse. En déduire une valeur approchée de son excentricité.
Sauvegarder le résultat dans un fichier **Ellipse**.

FIN du TP

À la fin de la séance, enregistrez votre travail et rassemblez les fichiers contenant les figures dans un répertoire à vos noms, à déposer (par copier-coller) sur ma clé USB ou à m'envoyer par email à l'adresse stephane.vinatier@unilim.fr. Alternativement, vous pouvez aussi le déposer dans le répertoire `/home/echange/vinatier/` (par copier-coller). N'oubliez pas de fermer votre session avant de partir.