

Suites numériques

1 Définition, expression

Une *suite de nombres réels* (resp. *complexes*) est une fonction de \mathbb{N} , ou d'une partie de \mathbb{N} , dans \mathbb{R} (resp. dans \mathbb{C}). Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe à chaque entier naturel n le nombre u_n .

Exemple : la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = n^2$ pour tout $n \geq 1$.

Plutôt que de donner u_n directement en fonction de n , la suite $(u_n)_n$ est souvent définie par *réurrence* : on donne le premier terme (disons u_0) et on exprime u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout n . Par exemple, étant donné un nombre r (« raison »), on peut produire des suites *arithmétiques* : $a_{n+1} = a_n + r$ et des suites *géométriques* : $g_{n+1} = rg_n$. De nombreux problèmes sur les suites consistent à passer d'une écriture à l'autre.

Exercice 1 Donner l'expression de a_n (resp. g_n) en fonction de a_0 (resp. g_0), n et r pour tout n ; calculer la somme des n premiers termes de chacune des deux suites.

Exercice 2 Soit $a = 0,\overline{26} = 0,26262626\dots$. Ecrire a comme somme (infinie) des termes d'une suite géométrique; en déduire une écriture rationnelle de a .

On sait multiplier une suite réelle (resp. complexe) par un réel (resp. complexe) et étant donnés deux suites, on peut définir leurs somme, différence, produit, quotient (à condition que la seconde ne s'annule pas à partir d'un certain rang). Toutes ces opérations se font simplement *terme à terme*. Elles munissent l'ensemble des suites réelles (resp. complexes) d'une structure de \mathbb{R} -algèbre (resp. \mathbb{C} -algèbre).

De plus, dans le cas réel, si on connaît le comportement des suites considérées à l'infini (voir section suivante), on peut en déduire celui de la suite résultant de l'opération (règle des signes,...), hormis pour quelques cas indéterminés.

2 Propriétés des suites réelles

Etant donnée une suite réelle $(u_n)_n$, on se demande si elle est croissante / décroissante (à partir d'un certain rang), majorée / minorée / bornée, convergente / divergente.

Exercice 3 Que signifie « $(u_n)_n$ est majorée à partir du rang n_0 » ? Montrer que ceci est équivalent à « $(u_n)_n$ est majorée ».

Quelques définitions indispensables :

- $(u_n)_n$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_n$ converge vers ℓ ;
- $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$;
- $(u_n)_n$ est divergente si elle n'est pas convergente.

Exercice 4 *Ecrire la définition de l'assertion $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. Une telle suite est-elle convergente ? Donner un exemple.*

Si les termes de la suite $(u_n)_n$ sont donnés en fonction de n , disons $u_n = f(n)$ pour tout n , c'est (souvent) l'étude des propriétés de la fonction f qui permettra de déterminer les propriétés de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 5 *Montrer que f croissante entraîne $(u_n)_n$ croissante ; construire un contre-exemple à la réciproque.*

Du fait que toute partie majorée non vide de \mathbb{R} admet une borne supérieure, on déduit la très importante propriété :

Proposition 1 *Toute suite croissante et majorée converge.*

On montre en fait que la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite est sa limite. Il suffit bien sûr que la suite soit croissante et majorée à partir d'un certain rang. On en déduit aisément que toute suite décroissante et minorée converge (considérer la suite opposée). Enfin, si la suite est majorée par $M \in \mathbb{R}$, sa limite sera inférieure ou égale à M . Ceci est un cas particulier du résultat suivant (pourquoi?) :

Proposition 2 *Soient 2 suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$; si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_n$ aussi.*

On utilisera aussi le fameux *théorème des gendarmes* :

Proposition 3 *Soient 3 suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ avec $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n . Si $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ , alors $(v_n)_n$ aussi.*

Enfin, deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence $u_n - v_n$ tend vers 0.

Proposition 4 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Par exemple, les suites de valeurs décimales approchées par défaut $(d_n)_n$ et par excès $(e_n)_n$ d'un réel a sont adjacentes, et convergent vers a .

Considérons maintenant le cas d'une suite définie par récurrence : u_0 fixé et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a supposé implicitement ici que u_n appartient au domaine de définition \mathcal{D} de f pour tout n . Ceci est bien le cas lorsque $u_0 \in \mathcal{D}$ et $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, ce que l'on suppose désormais.

Exercice 6 *Démontrer par récurrence que $(u_n)_n$ est monotone si f est croissante sur \mathcal{D} .*

Dans ce cas, il suffit alors d'établir que $(u_n)_n$ est bornée pour montrer qu'elle converge. Si f est décroissante sur \mathcal{D} , alors $f \circ f$ est croissante et on considère les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ (voir section suivante). On a la condition nécessaire suivante pour qu'un nombre soit limite de la suite.

Proposition 5 *Si f est continue sur \mathcal{D} et si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathcal{D}$, alors ℓ est un point fixe de f , c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$.*

L'existence d'un point fixe est assurée sous les hypothèses suivantes.

Proposition 6 *On suppose que $\mathcal{D} = I$ est un intervalle fermé de \mathbb{R} et que f est contractante sur $I : f(I) \subseteq I$ et il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tous $x, y \in I$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| .$$

Alors f a un unique point fixe dans I , vers lequel la suite $(u_n)_n$ converge.

3 Sous-suites, suites de Cauchy, comparaison

Les suites considérées dans cette section sont indifféremment réelles ou complexes.

On appelle *sous-suite* ou *suite extraite* de $(u_n)_n$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_n$, où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Proposition 7 *$(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si toute sous-suite de $(u_n)_n$ converge vers ℓ .*

On peut en déduire : si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ aussi. Autre façon d'utiliser ce résultat : la suite constante égale à 1 et la suite constante égale à -1 sont deux sous-suites de $((-1)^n)_n$, qui est donc divergente. Cet exemple de suite illustre aussi la propriété suivante.

Proposition 8 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

On appelle *valeur d'adhérence* de $(u_n)_n$ la limite d'une sous-suite convergente.

Exercice 7 *Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi\sqrt{n}})_n$. Cette suite converge-t-elle ?*

On dit que la suite $(u_n)_n$ vérifie la condition de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n, m \geq n_0 \implies |u_n - u_m| < \varepsilon) .$$

On rappelle qu'un corps est *complet* si toute suite d'éléments du corps qui vérifie la condition de Cauchy converge. On sait que \mathbb{R} et \mathbb{C} sont complets, en d'autres termes :

Proposition 9 *Une suite réelle ou complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Cette propriété fournit une méthode pour montrer qu'une suite converge sans avoir à déterminer sa limite, ou pour montrer qu'une suite diverge :

Exercice 8 Pour $n \geq 1$, on note $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout n . La suite converge-t-elle ?

Terminons avec les notions de comparaisons de suites. Etant données deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, on définit les notions suivantes :

- $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont *équivalentes*, noté $u_n \sim v_n$, s'il existe $(\varepsilon_n)_n$ telle que $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$ pour tout n et $(\varepsilon_n)_n$ tend vers 0 ;
- $(u_n)_n$ est *négligeable* devant $(v_n)_n$, noté $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \ll v_n$, s'il existe $(\varepsilon_n)_n$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout n et $(\varepsilon_n)_n$ tend vers 0 ;
- $(u_n)_n$ est *dominée* par $(v_n)_n$, noté $u_n = O(v_n)$, s'il existe $(\varepsilon_n)_n$ telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout n et $(\varepsilon_n)_n$ bornée.

Noter que \sim est effectivement une *relation d'équivalence* (réflexive, symétrique, transitive), tandis que o et O sont seulement transitives ; lorsque $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, on a les équivalences :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_n \frac{u_n}{v_n} = 1 ; u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim_n \frac{u_n}{v_n} = 0 ; u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \text{ bornée.}$$

Exercice 9 Soient a, b deux réels > 0 . Montrer que $(\ln n)^a \ll n^b$.

On peut écrire plusieurs propriétés relatives aux relations de comparaison, notamment :

Proposition 10 Deux suites équivalentes se comportent de la même façon quand n tend vers $+\infty$. Si une suite est négligeable devant une suite bornée, alors elle tend vers 0. ...

Exercice 10 Ecrire (et montrer) d'autres propriétés du même type !

Notons enfin que l'équivalence se comporte bien par rapport au produit (quotient) de suites, mais pas nécessairement par rapport à la somme (ex. $u_n = n^2 + 1 \sim n^2$, $v_n = -n^2$).